**Esame di Algebra Lineare e Geometria Analitica**

(Prof.ssa D. Bubboloni) 7 Settembre 2016

Avete due ore e mezzo a disposizione. Potete scegliere 5 esercizi fra i 6 proposti. Giustificate con cura le vostre risposte.

**1.** Discutere al variare di $b \in \mathbb{R}$ il seguente sistema.

$$\begin{cases} x - y + bz = 0 \\ 2x + y + z = b + 3 \\ x + 2y - bz = -z \end{cases}$$

Successivamente, dire se esistono valori di $b$ per cui l'insieme delle soluzioni costituisce un sottospazio e in tal caso trovarne una base.

**2.** Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (x - y + z, -x - y + 4z, 2x - 3z)$$

provare che e' lineare e trovarne nucleo e immagine.

**3.** Scrivere in forma matriciale la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ associata al polinomio $p(x, y, z) = x^2 + xy + 4yz + xz + 3y^2 + z^2$ e stabilire se è definita positiva/negativa o indefinita. In base a quanto ottenuto si può concludere che risulta $p(x, y, z) > 0$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$?

**4.** Data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

dire se $\mathbb{R}^3$ ammette una base di autovettori di $M$ e in caso affermativo determinarne una.

**5.** Dato l'insieme $W = \{[x, y, z, t]^T \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z + t = 0\}$, giustificare il fatto che $W$ sia un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e, dopo averne indicata la dimensione, determinare un vettore di $\mathbb{R}^4$ ad esso ortogonale.

**6.** Dire se sono dipendenti in $\mathbb{R}^4$ i vettori seguenti.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

In caso affermativo esprimerne uno come somma dei restanti, in caso negativo dire se il vettore $v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \\ -700 \\ 1 \end{pmatrix}$ può essere espresso come loro combinazione lineare. Non è richiesto di esplicitare la combinazione.