Esame di Algebra Lineare eprova Geometria Analitica

(Dott.ssa D. Bubboloni) 22 Gennaio 2014

Avete due ore e mezzo a disposizione. Potete scegliere 5 esercizi fra i 6 proposti. Giustificate con cura le vostre risposte.

1. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema.

$$\begin{cases} x + ay - z + t = 0 \\ 2x - y + t = a + 3 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Successivamente, dire se esistono valori di a per cui l'insieme ha ∞^2 soluzioni e, in tal caso esplicitarle.

2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(X) = AX$ per ogni $X \in \mathbb{R}^3$, dove X è un vettore colonna. Dire perché f è lineare, usando solo la definizione di linearit à, e trovarne poi nucleo e immagine. Dire se f è iniettiva e/o iniettiva.

3. Scrivere, in forma matriciale, la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ associata al polinomio $p(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6yz$ e stabilire se risulta denita/semidefinita positiva/negativa o indefinita. In base a quanto ottenuto si puo' concludere che risulta $p(x, y, z) > 0$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$?

4. Data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dire se $\mathbb{R}^3$ ammette una base ortonormale di autovettori di M e in caso affermativo determinarne una.

5. Dire se la seguente lista ordinata

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

è una base di $\mathbb{R}^4$ e, in caso affermativo trovare le coordinate del vettore $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto ad essa.

6. Risolvere simultaneamente i sistemi

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y - z = -3 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + y = -3 \end{cases}$$

e dire se le sottovarietá lineari affini che ne descrivono le soluzioni sono parallele od ortogonali (o nessuna delle due cose) e quale dimensione hanno.