

Esame di Algebra Lineare e Geometria Analitica

(Dott.ssa D. Bubboloni)

11 Febbraio 2015

Avete due ore e mezzo a disposizione. Potete scegliere 5 esercizi fra i 6 proposti. Giustificate con cura le vostre risposte.

1. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema.

$$\begin{cases} x - ay - z - t = 0 \\ 2x - y - t = -a + 3 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Successivamente, dire se esistono valori di a per cui l'insieme ha ∞^2 soluzioni e, in tal caso esplicitarle.

2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f(X) = AX$ per ogni $X \in \mathbb{R}^3$, dove X è un vettore colonna. Dire perché f è lineare, usando solo la definizione di linearità, e trovarne poi nucleo e immagine. Dire se f è iniettiva e/o suriettiva.

3. Scrivere, in forma matriciale, la forma quadratica su \mathbb{R}^3 associata al polinomio $p(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 6yz + 4xy$ e stabilire se risulta definita/semidefinita positiva/negativa o indefinita. In base a quanto ottenuto si può concludere che risulta $p(x, y, z) > 0$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$?

4. Data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dire se \mathbb{R}^3 ammette una base ortonormale di autovettori di M e in caso affermativo determinarne una.

5. Dire se la seguente lista ordinata

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

è una base di \mathbb{R}^4 e, in caso affermativo trovare le coordinate del vettore $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto ad essa.

6. Risolvere simultaneamente i sistemi

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + z = 9 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

e dire se le sottovarietà lineari affini che ne descrivono le soluzioni sono parallele od ortogonali (o nessuna delle due cose) e quale dimensione hanno.