Prodotto righe per colonne fra matrici (PRC)

Vogliamo definire un prodotto

$$M_{m,n}(K) \times M_{n,p}(K) \longrightarrow M_{m,p}(K)$$

che associ a una matrice A, $m \times n$ a coefficienti nel campo K e una " B, $n \times p$ "
" una " C, $m \times n$ "

"

Lo facciamo nello stesso modo indicato per le matrici quadrate pensando di eseguire

$$(a_1 \dots a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

(DETTO PRODOTTO SCALARE FRA I VETTORI a^T e b)

su tutte le righe di A e le colonne di B: la moltiplicazione della riga i-ma di A con la j-ma colonna di B produce il generico elemento c_{ij} della matrice $C = AB$.

Es.

$$\underset{3 \times 2}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{2 \times 3}{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{3 \times 3}{\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Precisamente, se

$$A=(a_{ik}), \qquad B=(b_{kj})$$

con $i=1\ldots m$, $k=1\ldots n$, $j=1\ldots p$

allora

$$C=(c_{ij}) \qquad \text{con } \begin{matrix} i=1\ldots m \\ j=1\ldots p \end{matrix}$$

dove

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

- Ricordiamo anche che se $\lambda\in K$ e $A\in M_{m,n}(K)$ si pone $\lambda A=(\lambda a_{ij})$. PRODOTTO FRA UNO SCALARE E UNA MATRICE.
- Due matrici si dicono <u>compatibili per la moltiplicazione</u> se la prima sta in $M_{m,n}(K)$ e la seconda in $M_{n,p}(K)$ cioè se il numero di colonne della prima coincide con il numero di righe della seconda. Le matrici in $M_n(K)$ (quadrate) sono sempre compatibili per la moltiplicazione. $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&2\\\sqrt{2}&\pi&0\end{pmatrix}$ non lo sono.

PROPRIETÀ Siano A, B, C compatibili per le moltiplicazioni indicate e $\lambda \in K$ uno scalare. Allora valgono le:

a) $A(B+C) = AB + AC$

b) $AB \neq BA$ (in generale)

c) $AI = IA = A$ dove I matrice identità

d) $A(\lambda B) = \lambda(AB)$

e) $(AB)^T = B^T A^T$

f) $\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$

Siete capaci a dimostrare tali proprietà? Un caso "facile": $A(\lambda B) = \lambda(AB)$.
Si deve vedere che per ogni i,j l'entrata di posto i,j nella matrice $A(\lambda B)$ coincide con quella di posto i,j nella $\lambda(AB)$ cioè che $\sum a_{ik}(\lambda b_{kj}) = \lambda \sum a_{ik} b_{kj}$

e questo viene dal fatto che il prodotto in K è commutativo e associativo per cui

$$a_{ik}(\lambda b_{kj}) = (a_{ik}\lambda) b_{kj} =$$

$$= (\lambda a_{ik}) b_{kj} = \lambda (a_{ik} b_{kj})$$

e dal fatto che il prodotto è distributivo rispetto alla somma per cui

$$\lambda \sum a_{ik} b_{kj} = \lambda (a_{i1} b_{i1} + a_{i2} b_{i2} + \dots$$

$$+ a_{in} b_{nj}) = \lambda a_{i1} b_{i1} + \lambda a_{i2} b_{i2} + \dots +$$

$$+ \lambda a_{in} b_{nj} = \sum \lambda (a_{ik} b_{kj})$$

- $(AB)^T = B^T A^T$: termine generale di posto i,j per $(AB)^T$ è $c_{ji} = \sum a_{jk} b_{ki}$ (1)

  per $B^T A^T$ è $\sum_k (i,k)$ di $B^T \cdot (k,j)$ di A^T

  $= \sum_k b_{ki} a_{jk}$ (2)

  per cui (1) $\equiv$ (2).

- $\mathrm{rank}(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$

  non è elementare ...

$AB \neq BA$: facile

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \\ & \end{pmatrix} \qquad 3 \neq 2 \text{ basta}$$

infatti due matrici $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ sono uguali se hanno stesso # numero di righe e colonne e in più

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$$

Di conseguenza sono diverse se

$$\exists\, i, j \ \text{ t.c. } \ a_{ij} \neq b_{ij}.$$

Forma matriciale di un sistema lineare

Se S ha matrice completa $A \in M_{m,n}(K)$
e colonna dei termini noti $b \in M_{m,1}(K)$
allora S si scrive con il PRC così:

$$Ax = b$$

dove $x \in M_{n,1}(K) \simeq K^n$ è un vettore colonna
con n componenti (le variabili del sistema)

• Legame fra le soluzioni di $Ax = b$ (1)
e del sistema omogeneo associato
$Ax = 0$ (2)

PROPOSIZIONE Le soluzioni di (1) si ottengono tutte sommando ad una soluzione particolare x^0 di (1), una soluzione di (2).
Si dice che le soluzioni di (1) sono un TRASLATO di quelle del S.O. associato.

<u>dim.</u> Sia $x^0 \in K^n$ una soluzione particolare di (1) ossia valga $Ax^0 = b$.
Vogliamo vedere due fatti:

I) se x risolve (2) allora $x + x^0$ risolve (1)

II) se y risolve (1) allora esiste x che risolve (2) t.c. $y = x + x^0$

Sarà tutto molto semplice da fare grazie alle proprietà del PRC e alla forma matriciale dei sistemi in gioco!

I). Se x risolve (2) allora $Ax = 0$ e così

$$A(x + x^0) \underset{(2)}{=} Ax + Ax^0 = 0 + b = b$$

ossia $x + x^0$ è soluzione di (1)

II) Se y risolve (1) consideriamo $x = y - x^0$ e vediamo se risolve (2):

$$A(y - x^0) = Ay - Ax^0 = b - b = 0$$

perché y risolve (1) e anche x^0 risolve (1).

ES. Visualizzazione come traslato delle soluzioni S_0 del s.o. associato, l'insieme S delle soluzioni di

$$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right)^{-1} \xrightarrow{EG} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3.]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

z libera

x, y Dipendenti.

$$\boxed{y = z + 1}$$

$$\boxed{x} = \cancel{z} + 1 - \cancel{z} + 4 \boxed{= 5}$$

(*)

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ z+1 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Pensiamo ora di risolvere $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

i passaggi sono identici e ci portano a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{per cui} \quad \boxed{y = z}, \quad \boxed{x} \boxed{- \cancel{z} + \cancel{z}} \boxed{= 0}$$

$$S_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

In questo esempio si vede anche

$$x^0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad !!$$

Chiaramente

$$S = S_0 + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notate che tutto sta nella scrittura (*) di S: la parte $z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ descrive le sol dell'omogeneo; $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ è la soluzione particolare che trova

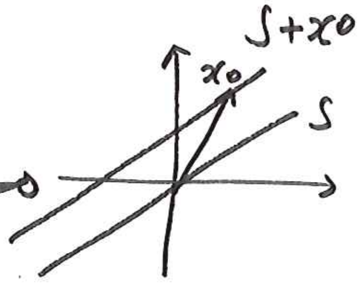
<u>Def</u>. Se $\underset{(\text{insieme})}{S \subseteq K^n}$ e $\underset{(\text{punto})}{x_0 \in K^n}$ si definisce

traslato di S tramite x_0

l'insieme ottenuto considerando la somma fra un generico elemento di S e x_0

$$S + x_0 := \{ s + x_0 \mid s \in S \} \subseteq K^n$$

(la definizione è sensata perché la somma di elementi $\in K^n$ resta $\in K^n$)

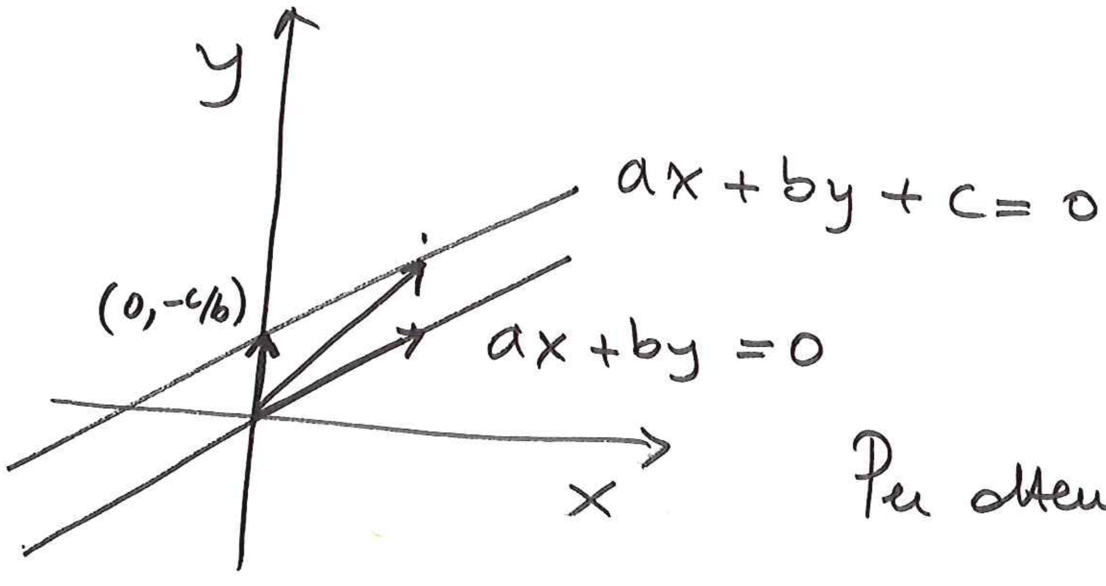


<u>Oss</u>. Se S è un sottospazio $\Rightarrow$ $S + x_0$ è ancora un sottospazio sse $x_0 = 0 \in K^n$.

I traslati di sottospazi di K^n si chiamano <u>sottovarietà lineari affini</u> (s.l.a)

<u>ES.</u> <u>Una retta nel piano è una s.l.a</u>

Infatti $ax+by+c=0$ generica retta di $\mathbb{R}^2$ è ottenuta traslando $ax+by=0$ retta per $(0,0)$ parallela alla data e sottospazio di $\mathbb{R}^2$.



Per ottenere $ax+by+c=0$ da $ax+by=0$ si trasla usando una qualunque soluzione di $ax+by+c=0$, ad es se $b\neq 0$ si può usare $(0,-c/b)$ come in fig.