ESERCIZIO (proposto). Riflettere sulle seguenti

PROPRIETÀ DELLA TRASPOSTA

controllandole nel caso $A, B \in M_2(\mathbb{R})$.

$$(A^T)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Una matrice si dice simmetrica se $A^T = A$

e tali matrici sono molto importanti e frequenti nelle applicazioni

ES. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ è simmetrica

$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ +3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ non è simmetrica

Def. Data $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ si dice rango per colonne (per righe) di A il massimo numero di colonne (righe) indipendenti presenti in A.

- C'è una sola matrice possibile in $M_{m,n}(\mathbb{F})$ per cui il rango è 0: nemmeno un pivot $\Leftrightarrow$ nessun non nullo in ogni riga $\Rightarrow$ tutti 0.

- Proposizione $\operatorname{rank} A$ = massimo numero di colonne di A indipendenti come vettori di $\mathbb{F}^m$

= " righe di A

" " " " di $\mathbb{F}^n$

In particolare $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A^T)$

rango per colonne di A := max numero di colonne di A ind.dip.
" righe di A := " righe "

Capire la proposizione (non proprio una dimostrazione)

su $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ controllando che rank A = rango per colonne di A.

Se cerco di capire quante colonne indip. ho parto dal sistema omogeneo

$$x \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

che ha come completa $(A \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right)$

Se via EG trovo 3 pivot ⇒ sol unica ⇒ necessariamente $x = y = z = 0$ (perché lei c'è sempre)

⇒ vettori indip. cioè $3 = \operatorname{rank} A = \#$ colonne ind

Se trovo 2 pivot la riga in fondo è per forza $(0 \ 0 \ 0 \mid 0)$ in quanto il sist. è omogeneo ⇒ i 3 vett. sono dipendenti. E' il nostro caso perché EG ci dà

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{EG} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

. Questa situazione, come sappiamo ci dice anche che i primi due vettori sono indipendenti.

Meno ovvio è vedere che rank A = = rango per righe di A...

Esercizio sui ssp span

2). Trovare la dimensione del ssp di $\mathbb{R}^4$

$$W = \text{Span}\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Notiamo che entro le { } ci sta un sistema di generatori per W. Ma da ogni sistema di generatori si può estrarre una base, nel senso che un opportuno sottoinsieme dei $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base.

Una volta dunque che avremo estratto una base basterà contare gli elementi: quel numero è la dimensione cercata

Siamo in $\mathbb{R}^4$ e il nostro pb è estrarre una base dalla lista dei $v_1, \dots, v_4$.

Chi ci aiuta? Gauß!

Una delle applicazioni di EG garantisce che

I. Scritti i v_i in colonna formando la mat A

II. Ridotta a scala la matrice A e guardato dove cadono i pivot

Allora <u>i vettori indipendenti fra i v_i sono quelli (originari) corrispondenti alle colonne dove cadono i pivot.</u>

$$A = \begin{array}{@{}c@{}c@{}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \end{array} \xrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4}$$

per comodità ci piace il pivot 1

$$\rightarrow \begin{array}{@{}c@{}c@{}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ -5 \\ -4 \end{array} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ & & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} \Rightarrow \dim W = 3.$$

b) Scrivere, se possibile, il vettore v_4 come c.l. dei v_1, v_2, v_3

La cosa deve essere possibile perché $v_4 \in W$ e v_1, v_2, v_3 sono base.

Per non fare troppa fatica guardo A come $\underbrace{\bar{A}x=b}$ dove $(\bar{A}\,|\,b)=A$ e risolvo il sistema associato.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

EG è già stata fatta!

Quindi riparto da

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma & \end{array} \end{array}$$

e risolvo

Voglio $v_4 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$

$2\gamma = -6$, $\boxed{\gamma = -3}$

$\boxed{\beta = 1}$

$\alpha + 1 - 3 = -1$, $\boxed{\alpha = 1}$

Infatti:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Quali vettori, in generale, appartengo no a W? Cerco

~~[illegible]~~ <u>tutti</u> gli $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ t.c. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in W$

cioè ~~[illegible]~~ t.c. ammette soluzione il sistema (tolgo v_4 perchè inutile)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 4 & 1 & y \\ -1 & 4 & 1 & z \\ 1 & \underline{2} & 1 & t \end{array}\right)$$

x, y, z, t parametri reali

E le incognite? Nascoste, perchè non servono

Riguardo i passaggi fatti e riutilizzo i moltiplicatori sulla colonna nuova

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 4 & 1 & y \\ 0 & 5 & 2 & z+x \\ 0 & 1 & 0 & t-x \end{array}\right)$$

$R_2 \leftrightarrow R_4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & t-x \\ 0 & 5 & 2 & z+x \\ 0 & 4 & 1 & y \end{array}\right) \begin{matrix} -5 \\ -4 \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & t-x \\ 0 & 0 & 2 & z+x-5t+5x \\ 0 & 0 & 1 & y-4t+4x \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & t-x \\ 0 & 0 & 1 & y+4x-4t \\ 0 & 0 & 2 & 6x-5t+z \end{array}\right)^{-2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & t-x \\ 0 & 0 & 1 & -4x+y-4t \\ 0 & 0 & 0 & -2x-2y+z+3t \end{array}\right)$$

La condizione è $\boxed{-2x - 2y + z + 3t = 0}$

Ad es $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$? $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$?

$-2\cdot(-4) - 2\cdot 1 + 0 + 3\cdot 1 = 0$?

$8 - 2 + 3 = 0$ NO

Invece $-2\cdot 0 - 2\cdot 0 - 3 + 3\cdot 1 = 0$ SÌ

La $-2x - 2y + z + 3t = 0$ la chiamiamo l'EQUAZIONE cartesiana DEL SSP W.

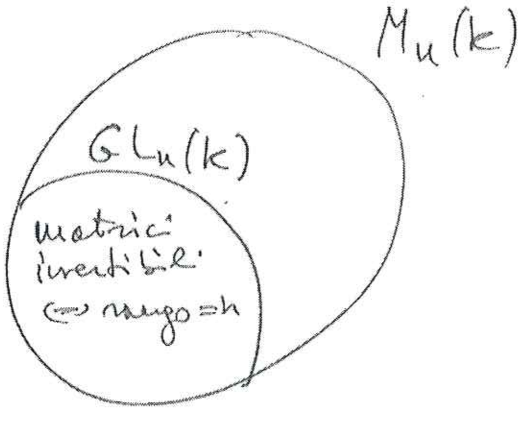
Esercizio Provare che $A \in M_n(\mathbb{F})$ è invertibile $\iff$ rank $A = n$

Un paio di pagine di approfondimento per capire la seguente affermazione: Una matrice quadrata è invertibile $\iff$ non è un divisore di zero in $M_n(F)$.

dim. Chiediamoci come sia fatto l'insieme delle matrici non invertibili cioè il complementare in $M_n(F)$ dell'insieme $GL_n(k) = \{A \in M_n(F) \mid A^{-1}$ esiste$\}$ delle matrici invertibili.

Fra esse ci sono senz'altro quelle che sono divisori di 0: infatti se $A \in M_n(F)$ divide 0 esiste $B \neq 0$ tale che $AB = 0$.

Se esistesse A^{-1} avrei allora $A^{-1}(AB) = A^{-1}0$ cioè $(A^{-1}A)B = 0$ cioè $I_n B = 0$ da cui $B = 0$ contro l'ipotesi.



Questo prova per ora che

$$GL_n(F)' \supseteq \text{divisori di zero.}$$

Vogliamo vedere che in realtà vale $=$ cioè che

$$GL_n(F)' = \text{divisori di } 0 \text{ in } M_n(F)$$

Occorre ora provare che anche l'altra $\subseteq$ vale. Possiamo farlo controllando che

"Se $A \in M_n(\mathbb{F})$ ha rango $< n$ allora A è un divisore di 0"

Infatti se A ha rango $< n$ e cerco $B \neq 0$ con $AB = 0$ scrivo la mia richiesta

$$A\,(B_1 | \cdots | B_n) = (0 | \cdots | 0)$$

con $B_i \in \mathbb{R}^n$ vettori colonna di B e $0 \in \mathbb{F}^n$

che significa $AB_1 = 0$, $AB_2 = 0 \ldots, AB_n = 0$

Quindi B_1 prima colonna di B la ottengo risolvendo il s.o. $AX = 0$: tale sistema ha una sol non banale (cioè $\neq 0$) perché ~~A avendo rango $< n$, una volta ridotta a scala ha un numero di pivot $< n$ ossia la una sua ridotta a scala è una triangolare con almeno un elemento diagonale $= 0$~~ un s.o. ha sempre sol e sono $\infty^{n - \#pivot} = \infty^{n - \text{rango} A}$. e $n - \text{rango}(A) > 0$ per ipotesi.

Prendiamo allora una soluzione non banale di $AX = 0$ e ripetiamo n volte questo vettore formando la $B \neq 0$ t.e. $AB = 0$. ∎

~~c) rango per righe di A := # max di righe di A l.i. e denotato $\operatorname{rank}_r A$~~

~~TEOREMA (Sorprendente!) Data una qualunque matrice A, si ha~~

~~$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}_c A = \operatorname{rank}_r A$.~~

OSSERVAZIONI Se $A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \Rightarrow$

i) $\operatorname{rank} A \leq \min\{m, n\}$ ES. $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \leq 3$

ii) il rango di una matrice non cambia scambiando 2 righe (o 2 colonne) fra loro.

iii) il rango non cambia sostituendo una riga con lei più la c.l. di altre sue righe. Idem per le colonne.

es $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

DEF A ha rango pieno se $\operatorname{rank} A = \min\{m, n\}$.

TEOREMA Rouché-Capelli: Il sistema $Ax = b$ ammette sol $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|b)$.

(Rango incompleto = rango completo)

~~Esercizio~~

~~Il determinante d'una matrice triangolare è pari al prodotto dei suoi elementi diagonali~~

~~dim?~~

~~ES. $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = -1$~~

Riflessione su Ax:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (\underset{m\times 1}{A_1} | \cdots | \underset{m\times 1}{A_n}) \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} =$$

$$= A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n$$

con A_i i-ma colonna

TEOREMA DI Rouché-Capelli

> Il sistema $Ax = b$ ammette soluzioni sse $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|b)$

Il loro numero è $\infty^{n-\operatorname{rank} A}$

VIA RANGO PER COLONNE

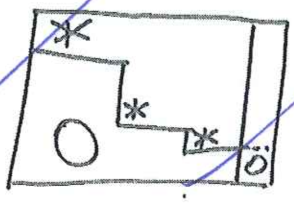
dim. Perché se le sol esistono significa che ho dei valori numerici $x_1, \dots, x_n$ t.c.

dove A_i è la i-ma colonna di A.

(*) $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = b$ → l'ultima colonna b è c.l. di quelle (A_i) di A e poiché il rango conta il max numero di colonne indipendenti, b, che dipende dalle altre, aggiunta alla lista non fa crescere il rango $\Rightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|b)$.

Viceversa se il rango di $(A|b)$ coincide con quello di A, significa che b non è indip dalle colonne di A ossia b si scrive come loro c.l. cioè vale (*) $\Rightarrow$ esistono soluzioni

~~ossia avrei rango$(A|b) \neq$ rango A, contro l'hp. Pertanto necessariamente~~

~~$(S|b') =$~~  ~~e il sistema ha $\infty^{n-|\text{pivot}|} \geq 1$ soluzioni.~~

■

<u>ESERCIZIO</u> Una matrice 2×2

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \quad \text{ha rango } \underset{\min\{2,2\}=2}{\overset{}{2}} \text{ (pieno)}$$

sse $\boxed{ad - cb} \neq 0$.

(sempre vero)

<u>dim</u> Avere rango 2 significa che i 2 vettori colonna $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ sono l.i., cioè non proporzionali $\Leftrightarrow$ $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ che si rilegge

$$\frac{ad-cb}{bd} \neq 0 \quad \text{ossia} \quad ad-cb \neq 0.$$

Notate qualche piccola imprecisione nel mio ragionamento? ...

<u>Def.</u> Il numero reale $ad-cb$ si chiama det A. $\quad A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$

§ Il determinante

Def. Per $A = (a) \in M_1(F)$ si pone, per definizione,
$\det A := a$; per $A \in M_2(F)$
$\det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ dove, al solito $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Per ordini $n \geq 3$,

la definizione si dà, per induzione, attraverso la formula di Laplace seguente:

$$\det A := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

DETTO SVILUPPO DI LAPLACE RISPETTO ALLA i-MA RIGA

dove i può essere scelto a piacere da 1 a n

e A_{ij} è il complemento algebrico di a_{ij} ossia la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta togliendo da A la i-ma riga e la j-ma colonna.

(ovviamente è un teorema il fatto che tale numero sia lo stesso qualunque sia l'i che si sceglie!)

det A si legge "determinante di A" ed è un elemento del campo F in esame.

ESEMPIO

$(-1)^{i+j} = (-1)^{1+j}$

scelgo $i=1$ e assegno i segni

$$\det \begin{array}{ccc} \oplus & \ominus & \oplus \\ \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = -1 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cancel{- 0 \det \ldots} + 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -(4+3) + 3 \cdot 3 = 2$$

$i=3$ conviene!

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 9 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ \overset{\oplus}{0} & \overset{\ominus}{1} & \overset{\oplus}{0} & \overset{\ominus}{0} \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} \overset{\oplus}{1} & \overset{\ominus}{9} & \overset{\oplus}{9} \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{i=1}{=}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cancel{- 9 \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 9 \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} = 0$$

Un fatto utile: a meno del segno $\det A$ è il prodotto ~~dei pivot~~ degli elementi diagonali di una ridotta a scala di A.

Proviamo: ci aspettiamo che sbuchi uno 0 sulla diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 9 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -4 \\ 0 \\ -2 \\ \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & -35 & -35 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -17 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{+ divisioni}]{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ECCOLO

Più precisamente vale il

TEOREMA $\det A = (-1)^k s_{11} \cdots s_{nn}$, dove k conta il numero di scambi riga e colonna utilizzati e s_{ii} sono gli elementi diagonali della ridotta a scala S di A.

ESERCIZIO

Il caso triangolare

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{\text{Laplace } n\text{-ma riga}}{=}$$

$$= 0 \cdots + a_{nn} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1\,n-1} \end{pmatrix} \overset{\text{Laplace } (n-1)\text{-ma etc}}{=}$$

$$= a_{nn}\, a_{n-1\,n-1} \cdots a_{11} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

ES. $\det \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -\pi \\ 0 & -\sqrt{2} & 4 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\sqrt{2} = -2$

TEOREMA Il numero $\det A$ non dipende dalla riga scelta per lo sviluppo e può essere calcolato anche riferendosi ad una colonna, ossia

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

(mi muovo sulla colonna j-ma)

Abbiamo così una funzione

$$\det : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$$

TEOREMA det è l'unica funzione $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che gode delle seguenti proprietà:

1) $\det(A_1 | \dots | A_n) = 0$ se $A_i = A_j$ per qualche $i \neq j$
2) $\det(A_1 | \dots | \lambda A_i | \dots | A_n) = \lambda \det(A_1 | \dots | A_i | \dots A_n)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
3) $\det(A_1 | \dots | A_i' + A_i'' | \dots | A_n) = \det(A_1 | \dots | A_i' | \dots | A_n) + \det(A_1 | \dots A_i'' | \dots A_n)$
4) $\det I_n = 1$

dove $A_1 \dots A_n$ sono le colonne di A. L'enunciato vale identico per le righe.

dim NON ELEMENTARE

COROLLARIO det gode di ulteriori proprietà:

5) se A ha una riga (colonna) nulla $\Rightarrow \det A = 0$
6) il valore di det non cambia sommando a una riga (colonna) di A un multiplo di un'altra riga (colonna)
7) il valore di det cambia segno se si scambiano di posto due righe (colonne)
8) Se le righe (colonne) di A sono linearmente dip $\Rightarrow \det A = 0$
9) Se S è una ridotta a scala di $A \Rightarrow \det A = (-1)^k s_{11} \cdots s_{nn}$
10) $\det A = \det(A^t)$.

dim 5) dalla formula di Laplace su tale riga

6) $\det(\dots$ ~~riga~~

$\overset{2)}{=} \det(A_1 | A_2 \dots | A_n) + \det(\lambda A_2 | A_2 \dots A_n) \overset{2)}{=}$

$= \det(A_1|A_2|\dots|A_n) + \lambda \det(\cancel{A_2|A_2|\dots A_n}) \overset{(1)}{=}$

$= \det(A_1|A_2|\dots|A_n)$

7) $\det(A_2|A_1|A_3 \dots A_n) = -\det(A_1|A_2|\dots|A_n)$ (*) da provare.

Parto da

$0 \overset{1)}{=} \det(A_1+A_2 | A_1+A_2 | A_3 \dots |A_n) =$

$\overset{3)}{=} \det(A_1 | A_1+A_2 | A_3 \dots |A_n) + \det(A_2 | A_1+A_2 | \dots |A_n)$

$\overset{3),1)}{=} \cancel{\det(A_1|A_1|\dots A_n)} + \det(A_1|A_2|A_3 \dots A_n) +$

$+ \det(A_2|A_1|\dots A_n) + \cancel{\det(A_2|A_2 \dots |A_n)}$

ossia $\quad 0 = \det(A_2|A_1|\dots|A_n) + \det(A_2|A_1|\dots A_n)$

equivalente alla (*).

8) Se le colonne di A sono l.d. abbiamo

che una colonna, diciamo per semplicità la prima, è c.l. delle restanti

$$A_1 = \sum_{i=2}^{n} a_i A_i$$

per cui:

$$\det(A_1|\dots|A_n) = \det\left(\sum_{i=2}^{n} a_i A_i | A_2 | \dots A_n\right) =$$

$$= \sum a_i \det(A_i|A_2|\dots A_n) = \sum 0 = 0$$

9) Basta seguire EG passo passo e tenere conto ~~segno~~ ~~in~~ ~~scambio~~ di riga/colonna cambia il

Regola di Sarrus per matrici 3x3

Il calcolo di una matrice 3x3 può essere eseguito anche con il seguente metodo

$$
\begin{array}{ccc|cc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{array}
$$

$\searrow$ prodotti con segno +

$\dashrightarrow$ prodotti con segno −

ESEMPIO Provare che non è mai nullo in $\mathbb{R}$ il

$$\det\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

costruisco

$$
\begin{array}{ccccc}
a & -1 & 2 & a & -1 \\
0 & a & -1 & 0 & a \\
1 & 2 & 1 & 1 & 2
\end{array}
$$

e lavoro sulle 3 linee $\searrow$ e le 〃 $\dashrightarrow$

$$= a^2+1+0-\cancel{2a}+\cancel{2a}-0 = a^2+1 \neq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Il concetto di determinante si lega molto bene a quello di prodotto righe per colonne grazie all'importante

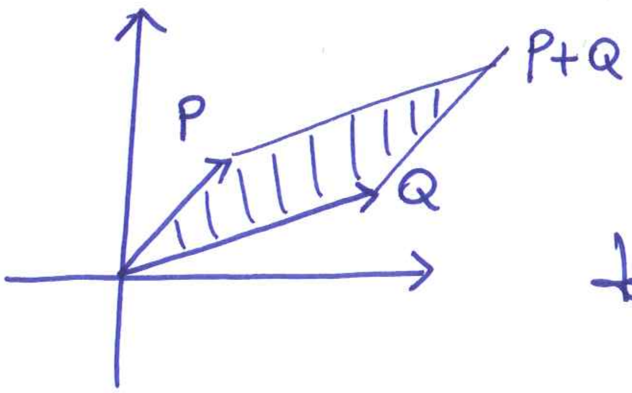
TEOREMA DI BINÈT: se $A, B \in M_n(F) \Longrightarrow$
$\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Interpretazione geometrica del determinante

$n = 2$ il determinante rappresenta un area a meno del segno

$n = 3$ // un volume a meno del segno.

In dimensione superiore possiamo immaginarci la misura di un oggetto n-dimensione, un ipervolume ...



$$P = \begin{array}{c} 1^a \text{ colonna} \\ \downarrow \text{ di } A \\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \end{array} \qquad Q = \begin{array}{c} 2^a \text{ colonna} \\ \downarrow \text{ di } A \\ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

per considerazioni di geometria analitica elementare, è l'area del parallelogramma $O\ P\ Q\ P+Q$. Sapete colmare i dettagli mancanti?

Il concetto di determinante è utile per rivedere/riaffrontare molte delle idee sviluppate fin qui

Teorema 1

A è invertibile sse $\det A \neq 0$ e posto

$A^{-1} = (a^{ij})$ si ha

$$a^{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det A_{ji}}{\det A}$$ (Notare l'inversione degli indici)

ossia $A^{-1} = \left(\frac{(-1)^{i+j} \det A_{ij}}{\det A}\right)^T$.

(cioè abbiamo una formula che consente di scrivere tramite il calcolo di cert. determinanti l'inversa di una matrice)

Es. Calcola A^{-1} dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

intanto $\det A = 3+2 = 5 \neq 0$ che garantisce A^{-1} esiste

$a^{11} = \frac{(-1)^{1+1} \det A_{11}}{5} = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $a^{12} = -\frac{\det A_{21}}{5} = \frac{-2}{5}$

$a^{21} = -\frac{\det A_{12}}{5} = \frac{1}{5}$ $\qquad$ $a^{22} = +\frac{1}{5}$

quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osservazione

Per le matrici quadrate abbiamo allora

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{d} & -\frac{a_{12}}{d} \\ -\frac{a_{21}}{d} & \frac{a_{11}}{d} \end{pmatrix}$$

dove $d = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$

Infatti $\begin{pmatrix} +\frac{a_{22}}{d} & -\frac{a_{21}}{d} \\ +\frac{a_{12}}{d} & +\frac{a_{11}}{d} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{d} & -\frac{a_{12}}{d} \\ -\frac{a_{21}}{d} & \frac{a_{11}}{d} \end{pmatrix}$

check: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22}/d & -a_{12}/d \\ -a_{21}/d & +a_{11}/d \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{d} & \cancel{\frac{-a_{11}a_{12} + a_{11}a_{12}}{d}} \\ \cancel{\frac{a_{21}a_{22} - a_{21}a_{22}}{d}} & \frac{-a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}}{d} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Corollario. Se A è invertibile $\Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

dim. Si ha l'uguaglianza matriciale $A \cdot A^{-1} = I$ e applicando det ai due membri $\det(A A^{-1}) = \det I$. Per il Teorema di Binet e la prop 4) si ha $\det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$ da cui $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$. ∎

Controllo

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2 \quad \checkmark$$

Teorema 2 Se $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ allora rank A è il massimo ordine di un minore $r \times r$ con determinante diverso da 0, dove minore significa una sottomatrice di A ottenuta eliminando $m-r$ righe e $n-r$ colonne e $1 \leq r \leq \min\{m,n\}$.

ES. $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 4\\ -1 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 3 & 6\end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

Si ha che i minori possono essere 1×1, 2×2, 3×3. Quali sono i minori 3×3?

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ -1 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

(si è tolta una delle 4 colonne) Ma tutti hanno determinante 0.

Il fatto è che in A vale $R_3 = R_1 + R_2$ e quindi questa relazione si conserva su tutti i minori 3×3. Poiché però $\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix} = 1+2=3 \neq 0$ si può concludere che rank $A = 2$

Esercizio

Se A è matrice quadrata, il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ ha solo la soluzione banale $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

dim. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ quadrata

Ovviamente $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|0)$ ⊛ per cui per Rouché-Capelli si hanno $\infty^{n - \operatorname{rank}(A)}$ soluzioni

Ora se $\det A \neq 0$, il massimo ordine di un minore con $\det \neq 0$ è n cioè $\operatorname{rank}(A) = n$ $\Rightarrow \infty^0 = 1$ sol. Dunque il sistema ha sol unica che necessariamente è quella banale.

Viceversa supponiamo che $x = 0$ sia la sola soluzione per $Ax = 0$ $\Rightarrow n - \operatorname{rank}(A) = 0$ cioè $\operatorname{rank}(A) = n$ cioè l'intera matrice è un minore con $\det \neq 0$ che significa $\det A \neq 0$ ∎

⊛ perché aggiungere una colonna di 0 non fa certo crescere il rango dato che il vettore 0 è sempre dipendente.

COROLLARIO $GL_n(k) = \{A \in M_n(k) \mid A \text{ è invertibile}\} = \{A \in M_n(k) \mid \det A \neq 0\}$ è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne.

Altre utili caratterizzazioni dell'essere $\det A \neq 0$

TEOREMA
Sia $A \in M_n(k)$. Sono logicamente equivalenti le seguenti:

1) $\det A \neq 0$.

2) $\mathrm{rank}(A) = n$

3) L'unica sol del sistema omogeneo $Ax = 0$ è $x = 0 \in \mathbb{R}^n$

4) A è invertibile

5) non esiste alcuna combinazione lineare non banale fra le righe di A $\Leftrightarrow$ le righe di A sono indipendenti.

6) non esiste alcuna c. l. non banale fra le colonne di A $\Leftrightarrow$ le colonne di A sono indipendenti

7) $\forall b \in \mathbb{R}^n$ esiste un unico $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Ax = b$

Vediamo un caso come esercizio.
Volendo vedere tutto posso fare così

1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 6) $\Rightarrow$ 7) $\Rightarrow$ 1)

così con 7 dimostrazioni ne ho 14...

<u>Esempio</u> Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ ammette soluzioni il sistema

$$\begin{cases} ax - y + z = 1 \\ -x + y - az = 0 \\ x - 2y + z = a \end{cases}$$

sfruttando il teorema di Rouchè-Capelli:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -a & 0 \\ 1 & -2 & 1 & a \end{array}\right)$$

Vediamo per quali $a \in \mathbb{R}$ il rango di A è 3 $\Leftrightarrow$ a t.c. $\det A \neq 0$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -a \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = a(1-2a) + (-1+a) + (2-1) =$$

$$= a - 2a^2 \cancel{-1} + a \cancel{+1} = -2a^2 + 2a = -2a(a-1)$$

Se $a \neq 0, 1$ $\operatorname{rank} A = 3$ e poiché quello di $(A|b)$ non può essere più di 3 a causa delle dimensioni della matrice $\Rightarrow$ $\operatorname{rank}(A|b) = 3$ e $\infty^0 = 1$ sol.

Se $a = 0$ vediamo quanto valgono i ranghi di A e $(A|b)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

in A c'è il minore 2×2 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con $\det = -1 \neq 0$ quindi $\operatorname{rank} A = 2$.

Si deve capire se $\operatorname{rank}(A|b) = 3$ (4 casi!)

Facciamolo con Gauß!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)^{\substack{0 \\ -1}} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)^{-1} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad 3 \text{ pivot} \Rightarrow \text{rango } 3$$

$\Rightarrow$ NO soluzioni per $a = 0$

Se $a = 1$ ho $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)^{\substack{1 \\ -1}} \to$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

rango 3 $\Rightarrow$ NO SOL anche per $a = 1$.