Prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$

Vediamo ora una importante operazione che fa passare da due vettori a un numero: il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Tramite questo saremo in grado di introdurre l'angolo fra due vettori (e in particolare il concetto di ortogonalità fra vettori) e poi una moltiplicazione fra matrici.

Def. Dati $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ si definisce prodotto scalare fra X e Y il numero

$$(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \text{ossia} \qquad (X,Y) = X^T \underset{\text{PRC}}{\uparrow} Y$$

Proprietà

a) $(X,Y) = (Y,X)$

b) $(\lambda X, Y) = \lambda (X,Y)$

c) $(X_1 + X_2, Y) = (X_1, Y) + (X_2, Y)$

b) e c) ovvie perchè vere per PRC

d) $(X,X) \geq 0$ e $(X,X) = 0$ sse $X = 0$

dim. a) $X^T Y$ è un numero quindi coincide col suo trasposto $(X^T Y)^T = Y^T X$.

d) Si ha $(X,X) = \sum x_i^2$ per cui chiaramente tale numero è ≥ 0 e proprio 0 solo se ogni $x_i = 0$.

Definizione Si dice norma di $X \in \mathbb{R}^n$ il numero reale $\|X\| = \sqrt{(X,X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

ES. $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $(X,Y) = 1 \cdot 0 + (-1)(1) + 2(-1) = -1 - 2 = -3$

Riflessioni

a) E' senz'altro vero che se $X = 0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$(X,Y) = (0,Y) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot y_i = 0$$

Ma secondo voi posso dire che

$(X,Y) = 0 \Rightarrow$ uno dei due fra X e Y è il vettore nullo?

No! Esempio: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$ ma nessuno dei due vettori usati è 0

b) L'equazione $2x + 3y = 0$ (una retta per l'origine)

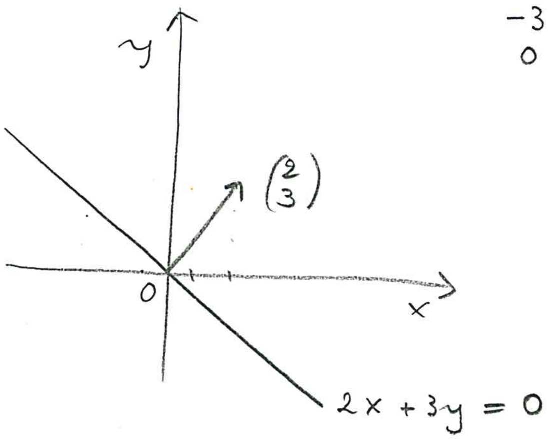
può rileggersi

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = 0$$

Cosa ha a che fare il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ con la retta $2x + 3y = 0$?

x	y
-3	2
0	0

Vediamo



E' ortogonale ad essa!

<u>Esercizio</u> $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Infatti $\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum x_i^2} = |\lambda| \sqrt{\sum x_i^2} =$

$= |\lambda| \, \|x\|$. ∎

Teorema (Disuguaglianza Cauchy – Schwarz)

$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Inoltre $|(x, y)| = \|x\| \, \|y\|$ sse x, y sono lin. dip.

<u>dim.</u> Se x, y sono lin. indip. il vettore $\lambda x + y$ non è mai il vettore nullo, qualunque sia $\lambda \in \mathbb{R}$ (se per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$ forse $\lambda x + y = 0$ con un coeff (quello di y) sicuramente non zero $\Rightarrow$ x, y sarebbero dipendenti, contro l'ipotesi)

Allora per d)

$$0 < (\lambda x + y, \lambda x + y) \overset{b) \text{ e } c)}{=} \lambda^2 (x, x) + \lambda (x, y) + \lambda (y, x) + (y, y) \overset{a}{}$$

$$= \lambda^2 \underset{\mathbb{R}}{\underbrace{(x, x)}} + 2 \lambda \underset{\mathbb{R}}{\underbrace{(x, y)}} + \underset{\mathbb{R}}{\underbrace{(y, y)}}$$

Questo è un polinomio in λ di grado 2 e stiamo dicendo che è positivo in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ il suo $\Delta/4$ deve essere negativo ossia

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) < 0$$ che posso scrivere

$$|(x, y)|^2 < (\|x\| \, \|y\|)^2$$ ed estraendo la $\sqrt{\ }$ (essendo le basi positive ciò è lecito)

si ottiene $|(x, y)| < \|x\| \, \|y\|$

Se invece X, Y sono l.d. avremo che sono uno multiplo dell'altro, diciamo $Y = \lambda X$ per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$, quindi

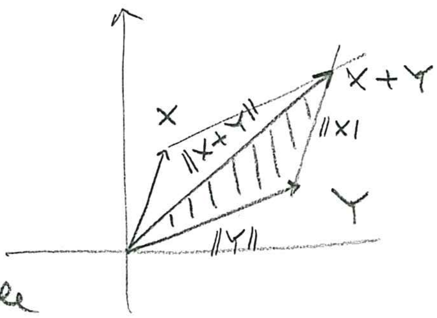
$$|(X,Y)| = |(X, \lambda X)| = |\lambda|\,(X,X) = |\lambda|\,\|X\|^2 = \|X\|\,\|\lambda X\| =$$

$$= \|X\|\,\|Y\|$$ ossia vale $=$

In generale avremo dunque il $\leq$ dell'enunciato.

<u>Corollario</u> (Disuguaglianza triangolare)

$$\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$



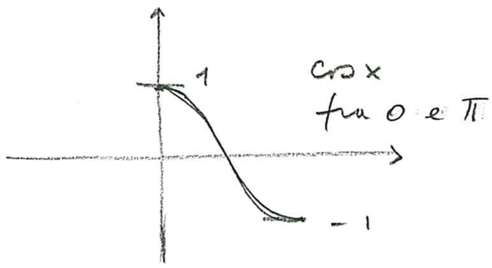
Geometricamente: il lato di un triangolo è minore o uguale della somma degli altri due.

<u>Def.</u> Essendo $\left|\dfrac{(X,Y)}{\|X\|\,\|Y\|}\right| \leq 1$ abbiamo

$$-1 \leq \frac{(X,Y)}{\|X\|\,\|Y\|} \leq 1$$ e quindi esiste un unico

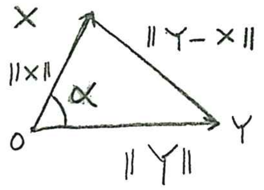
$\vartheta \in [0,\pi]$ t.e.

$$\cos\vartheta = \frac{(X,Y)}{\|X\|\,\|Y\|}$$



Tale ϑ si dice <u>l'angolo fra i vettori X e Y</u> e corrisponde alla definizione della geometria elementare

Infatti nel triangolo



per il teorema del coseno si ha

$$\|Y-X\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2\,\|X\|\,\|Y\|\cos\alpha$$

e per le proprietà del prodotto scalare

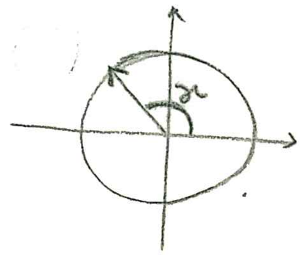
$$\|Y-X\|^2 = (Y-X,\,Y-X) = (Y,Y) - (Y,X) - (X,Y) + (X,X) =$$
$$= \|Y\|^2 + \|X\|^2 - 2\,(X,Y)$$

pertanto $\cancel{-2}\,\|X\|\,\|Y\|\cos\alpha = \cancel{-2}\,(X,Y)$

ossia $\cos\alpha = \dfrac{(X,Y)}{\|X\|\,\|Y\|}$ ossia quello che per definizione è il nostro $\cos\vartheta$.

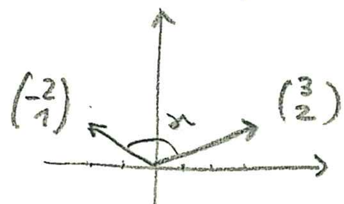
<u>Esercizi</u> a) Trovare l'angolo fra $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$$\cos\vartheta = \frac{\left(\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right)}{\left\|\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\|\,\left\|\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\|} = \frac{-6+3}{\sqrt{4+1}\,\sqrt{9+4}} = \frac{-3}{\sqrt{65}}$$



$$\vartheta = \arccos\frac{-3}{\sqrt{65}} \simeq 1{,}9 \text{ radianti}$$

b) Dire se sono ortogonali
$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$



Sì perché $\cos\vartheta = \dfrac{\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\right)}{\|\cdot\|\,\|\cdot\|} = 0 \iff \vartheta = \pi/2$.

<u>Def.</u> Due vettori X, Y di $\mathbb{R}^n$ si dicono <u>ortogonali</u> se l'angolo fra i due è $\pi/2 \iff (X,Y) = 0$

<u>Def.</u> Una $\underbrace{\text{base}}_{}$ ($\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n\}$) di $\mathbb{R}^n$ si dice ortonormale se

$$(X_i, X_j) = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j \\ 0 & \text{per } i \neq j \end{cases}$$

(significa che i vettori hanno tutti lunghezza 1 e in più sono due a due ortogonali)

La base canonica è ortonormale.
Controllate!

<u>ES.</u> L'equazione $\quad x_1 - 3x_2 + 4x_4 = 0$

esprime l'ortogonalità fra $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^4$.

Ciò significa che rappresenta tutti i punti $X \in \mathbb{R}^4$ t.c. $\overrightarrow{OX}$ è ortogonale a $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

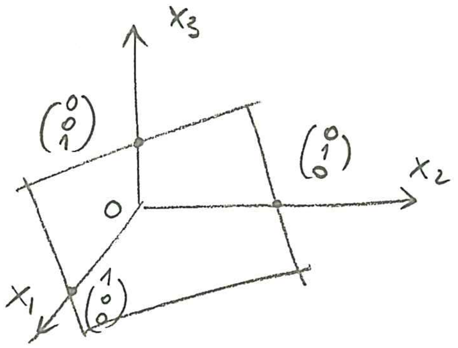
Tali punti sono le sol di un sistema lineare fatto dalla sola equazione $\quad x_1 - 3x_2 + 4x_4 = 0$

di matrice $\quad (1 \quad -3 \quad 0 \quad 4 \mid 0)$ in cui ci sono 3 var. libere: lo pensiamo dunque come uno spazio per l'origine entro $\mathbb{R}^4$.

In generale l'eq. $\quad a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$

in $\mathbb{R}^n$ se ha almeno un $a_i \neq 0$ si dice che definisce un <u>iperpiano</u> $\subseteq \mathbb{R}^n$.

Essendoci $n-1$ var. libere tale oggetto è assimilabile a $\mathbb{R}^{n-1}$



<u>ESERCIZIO</u>

Scrivere l'eq dell'iperpiano per $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

È del tipo

$ax_1+bx_2+cx_3=d$ e

deve aversi

$$\begin{cases} a\cdot 1 + b\cdot 0 + c\cdot 0 = d \\ a\cdot 0 + b\cdot 1 + c\cdot 0 = d \\ a\cdot 0 + b\cdot 0 + c\cdot 1 = d \end{cases} \qquad \begin{cases} a = d \\ b = d \\ c = d \end{cases}$$

quindi è $\quad dx_1 + dx_2 + dx_3 = d \quad$ con $d \in \mathbb{R}$

e ora dovendosi escludere $d=0$ (perché in tal caso non si ha almeno un coeff delle variabili $\neq 0$) si divide per d ottenendo

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Tale oggetto avendo dimensione $2 = 3 - \text{rank}\,(1 \;\; 1 \;\; 1)$ è un piano di $\mathbb{R}^3$

Esercizio

Dato il vettore $X=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ trovare un vettore Y di norma doppia e che formi con X un angolo di $\frac{\pi}{3}$

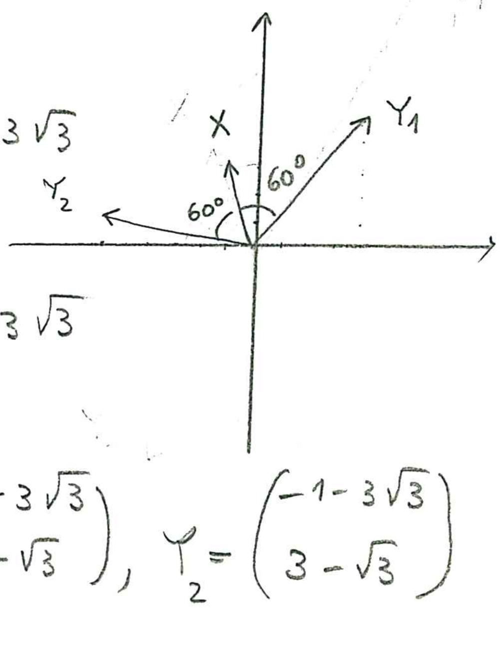
Cerco $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ t.e. $\cos\vartheta = \dfrac{\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right)}{\left\|\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right\| 2 \left\|\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{2}$

cioè $\dfrac{-a+3b}{(1+9)\cdot\cancel{2}} = \dfrac{1}{\cancel{2}}$ $\quad\begin{cases}-a+3b=10\\ \sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{10}\end{cases}$

$\begin{cases}a=3b-10\\ (3b-10)^2+b^2=40\end{cases}$ $\quad\begin{cases}a=3b-10\\ 9b^2+100-60b+b^2-40=0\end{cases}$

$\begin{cases}a=3b-10\\ 1\cancel{0}b^2-6\cancel{0}b+6\cancel{0}=0\end{cases}$ $\quad\begin{cases}{''}\\ b=3\pm\sqrt{9-6}\end{cases}$

da cui $\begin{cases}a=3(3+\sqrt{3})-10=-1+3\sqrt{3}\\ b=3+\sqrt{3}\end{cases}$



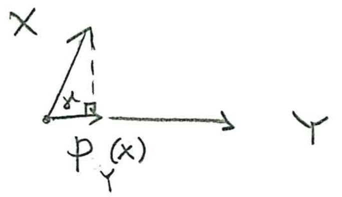
oppure $\begin{cases}a=9-3\sqrt{3}-10=-1-3\sqrt{3}\\ b=3-\sqrt{3}\end{cases}$

Ci sono due Y possibili: $Y_1=\begin{pmatrix}-1+3\sqrt{3}\\3+\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $Y_2=\begin{pmatrix}-1-3\sqrt{3}\\3-\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$3+\sqrt{3}\simeq 4{,}7$, $3-\sqrt{3}\simeq 1{,}2$ $\quad -1+3\sqrt{3}\simeq 4{,}1$ $\quad -1-3\sqrt{3}\simeq -6{,}1$

Concetti di natura geometrica ottenibili grazie al prodotto scalare.

1) <u>Proiezione ortogonale di un vettore $X \in \mathbb{R}^n$ su un vettore $Y \in \mathbb{R}^n$</u>. Denotiamola con $P_Y(X)$.



Sappiamo che

$(X,Y) = \|X\| \, \|Y\| \cos\vartheta$

(per come si è definito $\cos\vartheta$ angolo fra X e Y)

Ora la lunghezza (con segno) del vettore $P_Y(X)$ che vogliamo descrivere è, per considerazioni di trigonometria elementare (un cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente) $\|X\|\cos\vartheta$. Noi vogliamo piazzare questa lunghezza nella direzione di Y cioè sopra $\frac{Y}{\|Y\|}$ quindi

$$P_Y(X) = \frac{(X,Y)}{\|Y\|} \frac{Y}{\|Y\|} = \frac{(X,Y)\,Y}{\|Y\|^2}$$

Ovviamente se $\|Y\|=1$ la formula è più semplice e diventa $P_Y(X) = (X,Y)Y$ che si legge a volte "X scalar Y lungo Y".

2) Distanza fra due punti (o due vettori) $X, Y \in \mathbb{R}^n$

La distanza fra X e Y è definita da

$$d(X,Y) = \| X - Y \|$$

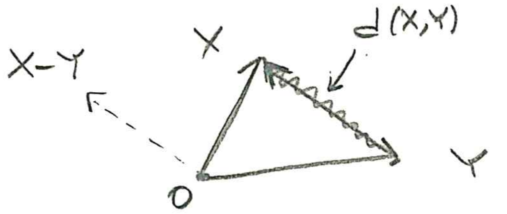
Si noti che a) $d(X,Y) \geq 0$ e $d(X,Y) = 0$ se $X = Y$

b) $d(X,Y) = d(Y,X)$ simmetria

c) $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$

$\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$

(disuguaglianza triangolare)



$d(X,Y)$ misura la lunghezza della diagonale secondaria del solito parallelogramma $\mathcal{P}$ di lati $\vec{OX}$ e $\vec{OY}$.
Più $\mathcal{P}$ è aperto più i punti sono distanti.

Esplicitamente se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ si ha

$$d(X,Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

che generalizza a n dimensioni la formula ben nota della geometria analitica in $\mathbb{R}^2$.

3) ORTOGONALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT

Teorema Fissati comunque n vettori $v_1, .., v_n$ di $\mathbb{R}^n$, per ogni s con $1 \leq s \leq n$ si possono costruire s vettori $w_1, .., w_s$ due a due ortogonali t.e.

$$\text{span}\{v_1, .., v_s\} = \text{span}\{w_1, .., w_s\}.$$

Eliminando tra i vettori $w_1, .., w_s$ quelli eventualmente nulli si ottiene poi una base ortogonale per

$$\text{span}\{v_1, .., v_s\}$$

Operativamente i w_i si costruiscono così:

$$w_1 = v_1$$

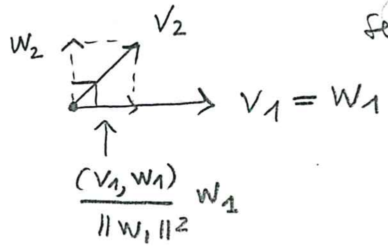
$$w_2 = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{\|w_1\|^2} w_1$$

(cioè togliamo da v_2 la proiezione ortogonale su $w_1 = v_1$)

$$w_3 = v_3 - \frac{(v_3, w_1)}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{(v_3, w_2)}{\|w_2\|^2} w_2$$

$\vdots$

Geometricamente sensato!



Vediamo perché
Se nella lista compaiono degli 0 li buttiamo via, quelli che restano sono vettori indipendenti: infatti se ho $w_1, .., w_k \neq 0$ e 2 a due ortogonali e risulta
$\sum_{i=1}^{k} a_i w_i = 0$ per certi $a_i \in \mathbb{R}$
faccio il prodotto scalare con w_1 e trovo

Per w_3 partiamo da v_3 e togliamo le sue proiezioni ortogonal sui w_1, w_2 già costruiti etc.

$(w_1, \sum a_i w_i) = (w_1, 0)$ ossia

$\sum_{i=1}^{k} a_i (w_1, w_i) = 0$ ma tutti i (w_1, w_i) sono 0 tranne $(w_1, w_1) = \|w_1\| \neq 0$ perché $w_1 \neq 0$ per ipotesi. Così ho

$a_1 \|w_1\|^2 = 0$ prodotto fra 2 numeri reali che fa 0 e in cui $\|w_1\|^2 \neq 0$: quindi $a_1 = 0$

Nello stesso modo, moltiplicando per w_2 e poi w_3 ... trovo che ogni $a_i = 0$.

<u>ESEMPIO</u> Trovare una base ortonormale per $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^4$

$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{\left(\begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}\right)}{\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}\right\|^2} \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{3-1}{1+1+4} \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8/3\\4/3\\-2/3\\1\end{pmatrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix}4\\0\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{\left(\begin{pmatrix}4\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}\right)}{\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}\right\|^2} \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{\left(\begin{pmatrix}4\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8/3\\4/3\\-2/3\\1\end{pmatrix}\right)}{\left\|\begin{pmatrix}8/3\\4/3\\-2/3\\1\end{pmatrix}\right\|^2} \begin{pmatrix}8/3\\4/3\\-2/3\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4\\0\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{\cancel{6}}{\cancel{6}} \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{9}{\frac{64}{9}+\frac{16}{9}+\frac{4}{9}} \begin{pmatrix}8/3\\4/3\\-2/3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{28}{3} \begin{pmatrix}8/3\\4/3\\-2/3\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{224}{9} \\ 112/9 \\ -56/9 \\ 28/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -197/9 \\ -103/9 \\ 65/9 \\ -31/3 \end{pmatrix}$$

La base ortogonale fornita dal metodo di G-S è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8/3 \\ 4/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -197/9 \\ -103/9 \\ 65/9 \\ -31/3 \end{pmatrix}$$

o anche

$$w_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2' = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3' = \begin{pmatrix} -197 \\ -103 \\ 65 \\ -62 \end{pmatrix}$$

Se la vogliamo ortonormale dobbiamo dividere ciascuno di questi per la sua norma ossia passare a

$$\frac{w_1'}{\|w_1'\|}, \quad \frac{w_2'}{\|w_2'\|}, \quad \frac{w_3'}{\|w_3'\|}$$

Si ha

$$\frac{w_1'}{\|w_1'\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{1+1+4} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/6 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{w_2'}{\|w_2'\|} = \dots$$

Completate per esercizio.

Esercizio Trovare una base ortonormale per $W = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} \right\}$ ssp di $\mathbb{R}^3$

Poniamo

$$w_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{e calcoliamo} \quad \|w_1\|^2 = 1+1 = 2$$

$$w_2 := \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} - \frac{(-1\ 2\ -1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} - \cancel{\frac{-2}{2}}^{\,-1} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

e calcoliamo $\|w_2\|^2 = 4$

$$w_3 := \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} - \frac{(0\ 3\ -1)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$- \frac{(0\ 3\ -1)\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}}{4} \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{4}_{\,2}}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix}$$

Normalizziamo i vettori trovati:

$\|w_1\| = \sqrt{2}$ per cui il normalizzato

è $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\|w_2\| = 2$ per cui il normalizzato è

$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\|w_3\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ per cui il normalizzato è

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

Quindi

$$W = \operatorname{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right)$$

è una base ortonormale di W.

Esercizio

Provare che se $\mathcal{B}(v_1, \dots, v_n)$ è base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ allora ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si esprime come c.l. dei v_i tramite
$$v = \sum_{i=1}^{n} (v, v_i)\, v_i$$

Infatti essendo $\mathcal{B}$ una base sappiamo che esistono unici $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

Basta vedere che necessariamente $a_i = (v, v_i)$.

Per farlo calcoliamo

$$(v, v_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j, v_i\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j (v_j, v_i)$$

Per definizione di base ortonormale abbiamo che $(v_j, v_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$. Quindi

$$(v, v_i) = 0 + 0 + \dots + 0\, a_i + 0 \dots + 0 = a_i$$ come volevasi.

$\blacksquare$

Questo esercizio mostra che le coordinate di un vettore rispetto ad una base ortonormale sono immediatamente calcolabili tramite dei semplici prodotti scalari.