Matrici simmetriche e teorema spettrale

Def. $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice simmetrica se

$$A^T = A$$

ossia $\quad a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j = 1,..,n$

PROPOSIZIONE Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è simmetrica allora

a) ha n autovalori contando le molteplicità
(cioè $\sum_{\lambda \in spA} m(\lambda) = n$)

b) autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali (di più che indipendenti!)

ESEMPIO $\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ è simmetrica

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 1\right] =$$

$$= -(3+\lambda)(9+\lambda^2-6\lambda-1) = -(3+\lambda)(\lambda^2-6\lambda+8)$$

si ha $p_A(\lambda) = 0$ per $\lambda = -3$ e $\lambda = 3 \pm \sqrt{9-8} =$

$= 3 \pm 1 \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow 2 \end{matrix}$, quindi $sp(A) = \{-3, 2, 4\}$

a) E' CONFERMATA perché 3 autovalori reali

Vediamo gli autovettori determinando gli autospazi

$$V_{-3}: \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \end{array} \xrightarrow[EG]{-1/6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5/6 \end{pmatrix}$$

x libera

$x = 1$

$z = 0$

$y = 0$

$$V_{-3} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V_2: \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix}$$

z libera $\quad z = 1$

$y = -1$

$x = 0$

$$V_2 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V_4: \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} \end{pmatrix}$$

z libera

$z = 1 \quad y = 1 \quad x = 0$

$$V_4 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Se ora prendo $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e ne faccio il prodotto scalare con $\mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ o con $\delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ trovo 0!

$$\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (\lambda \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \cdot 0 + 0 \cdot (-\mu) + 0 \cdot \mu = 0$$

$$\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (\lambda \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \\ \delta \end{pmatrix} = \lambda \cdot 0 + 0 \cdot \delta + 0 \cdot \delta = 0$$

e anche

$$0 = \left(\mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (0 \ -\mu \ \mu) \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \\ \delta \end{pmatrix} = -\mu\delta + \mu\delta = 0$$

b) E' CONFERMATA

TEOREMA SPETTRALE

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è simmetrica ammette una base ortonormale di autovettori.
(in più della prop, c'è in sostanza, anche $\dim V_{\lambda_i} = m(\lambda_i)$).

In particolare se $C = C^{(id)}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ è la matrice del corrispondente cambiamento di base (ottenuta considerando come colonne i vettori di $\mathcal{B}$) si ha:

$$1)\quad C^{-1} A C = \mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

UNA MATRICE SIMMETRICA REALE È DIAGONALIZZABILE TRAMITE UNA MATRICE ORTOGONALE

dove i λ_i sono gli autovalori di A (ripetuti a seconda della loro molteplicità)

$$2)\quad C^{-1} = C^T \quad \text{cioè} \quad C^T C = I.$$

In particolare anche $C^T A C = \mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$

COMODO CHE L'INVERSA COINCIDA CON LA TRASPOSTA ...

Def. le matrici $C \in M_n(\mathbb{R})$ t.c. $C^T C = I$ si dicono <u>ortogonali</u>.

Una matrice è ortog sse le sue colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

<u>Esempio</u> $C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ matrice di una rotazione di angolo θ è ortogonale perché $CC^T =$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = I$$

Questa situazione è generalizzabile

Oss. Consideriamo la trasformazione lineare di $\mathbb{R}^n$ data da $L(x) = Ax$. L si dice una isometria se conserva angoli e distanze ossia se (*)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \text{vale} \quad (L(x), L(y)) = (x, y) \quad (1)$$

(con $(\ ,\ )$ che indico il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$)

L è isometria sse la sua matrice di rappresentazione rispetto alla base canonica è ortogonale. Infatti

la (1) si scrive

$$(Ax, Ay) = (x, y) \quad \text{ossia,}$$

per def di prodotto scalare,

$$(Ax)^T Ay = x^T y$$

$$x^T A^T A y = x^T y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Ora si prende $x = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

$y = e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$ e si trova

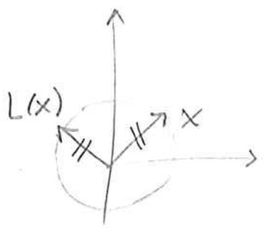
termine ij di $A^T A$ = termine ij di I

ossia $A^T A = I$.

(*) in particolare

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{(L(x), L(x))} = \|L(x)\|$$

ossia si conservano le distanze



dopodiché angolo fra $L(x)$ e $L(y)$

$$\cos \gamma_{L(x), L(y)} = \frac{(L(x), L(y))}{\|L(x)\| \, \|L(y)\|} = \frac{(x, y)}{\|x\| \, \|y\|} = \cos \gamma_{x,y}$$

Non facciamo la dim del teorema spettrale, ma guardiamo due casi significativi. 1) Autovalori distinti
2) Un autovalore di molteplicità ≥ 2.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Lap 1ª riga

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-4\right] + (\lambda-1)$$

$$= +(\lambda-1)\left[-(1-\lambda)^2+4+1\right] = -(\lambda-1)\left((\lambda-1)^2-5\right)$$

$P_A(\lambda)=0$ per $\lambda = 1,\ 1\pm\sqrt{5}$ sono 3 distinti.

V_1 : $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right)$

x_2 libera la fisso 1
$x_3 = 0$
$x_1+2=0$, $x_1=-2$

V_1 ha base $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$V_{1-\sqrt{5}}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 2 & 0 \\ 1 & 2 & \sqrt{5} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 2 & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 0 \\ -\sqrt{5} \end{array} \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-2\sqrt{5}} & \cancel{-4} & \cancel{0} \end{array}\right)$

N.B.
deve sempre accadere che sbuchi una riga almeno da buttare via quando calcolo gli autovettori)

$x_3 = \sqrt{5}$ (la fisso come voglio $\neq 0$ perché è libero)

$\cancel{\sqrt{5}}\, x_2 = -2\cancel{\sqrt{5}}$

$V_{1-\sqrt{5}}$ ha base $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$

$x_1 - 4 + \sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = 0$, $x_1 = -1$

controllo $(v_1, v_2) = 0$: $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}\right) = -2+2=0$ ✓

$$V_{1+\sqrt5} : \left(\begin{array}{ccc|c} -\sqrt5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt5 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -\sqrt5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\sqrt5 & 0 \\ 0 & -\sqrt5 & 2 & 0 \\ -\sqrt5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{0 \\ \sqrt5}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\sqrt5 & 0 \\ 0 & -\sqrt5 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{2\sqrt5} & \cancel{-4} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

x_3 libera

$x_3 = \sqrt5$

$+\cancel{\sqrt5}\, x_2 = +2\cancel{\sqrt5}$ $\qquad x_2 = 2$

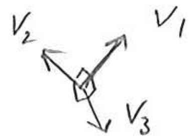
$x_1 + 4 - 5 = 0 \qquad x_1 = 1$

la base $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt5 \end{pmatrix}$

E' ortogonale a v_1 e v_2 ?

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$ ✓

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ \sqrt5 \end{pmatrix} \right) = -1 - 4 + 5 = 0$ ✓



Ora guardo $\|v_1\| = \sqrt{2^2+1} = \sqrt5$

$\|v_2\| = \sqrt{1+4+5} = \sqrt{10}$ $\qquad$ per cui

$\|v_3\| = \sqrt{1+4+5} = \sqrt{10}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2/\sqrt5 \\ 1/\sqrt5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} \\ -2/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 2/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt2 \end{pmatrix} \right\}$$

è base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ fatta da autovettori di A. Si ha $C^T A C =$

$$= \begin{pmatrix} -2/\sqrt5 & 1/\sqrt5 & 0 \\ -1/\sqrt{10} & -2/\sqrt{10} & 1/\sqrt2 \\ 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{10} & 1/\sqrt2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/\sqrt5 & -1/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt5 & -2/\sqrt{10} & 2/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt5 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt5 \end{pmatrix}$$

Controllato!

ESERCIZIO

Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ trovare autovalori e autospazi e costruire una base ortonormale di autovettori (se possibile).

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3/2-\lambda & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[(3/2-\lambda)^2 - 1/4\right] =$$

$$= (1-\lambda)\left[\frac{9}{4} + \lambda^2 - 3\lambda - 1/4\right] =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

ma $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ per $\lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$

Così $p_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

$m(1) = 2$ $\quad m(2) = 1$ quindi 1 è autovalore doppio.

Sappiamo che automaticamente un vettore in V_1 e uno in V_2 sono ortogonali.

Inoltre il teorema spettrale ci garantisce che $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 1$ e che una base ortonormale di autovettori esiste.

Quello che ci resta da fare però è trovare due vettori indipendenti in V_2

che abbiano norma 1 e che realizzino un prodotto scalare 0 (cioè siano ortogonali)

V_1 : risolvo il sistema omogeneo di ri completa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^1 \xrightarrow{EG} \begin{pmatrix} \cancel{0 \quad 0 \quad 0} \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ \cancel{0 \quad 0 \quad 0} \end{pmatrix}$$

2 v. l.

(lo sapevamo che sarebbero state 2)

x , z libere. Classicamente una base si trova assegnando $x = 1$ $z = 0$ e poi $z = 1$ $x = 0$, ma così facendo non siamo certi di avere ortogonalità!

Allora possiamo fare così: uno ce lo prendiamo come si vuole e poi adattiamo il secondo.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\} \ni \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$$

questo ha anche norma 1. Ora scelgo z t.c.

$$\begin{cases} \left(\begin{pmatrix} x \\ z \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \\ x^2 + z^2 + z^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ 2z^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

faccio una scelta fra le 2 possibili

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

V_2 : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ \cancel{0} & \cancel{-1/2} & \cancel{-1/2} \end{pmatrix}$

z libera

$z = 1$

$y = -1$

$x = 0$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ha il difetto di non avere $\| \ \| = 1$

lo normalizzo considerando

$$w = \frac{v}{\|v\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

Una base ortonormale di autovettori di A è

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Ora $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = C^{(id)}_{\mathcal{E}\mathcal{B}} \rightarrow$

$$C^{(id)}_{\mathcal{B}\mathcal{E}} A \, C^{(id)}_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ossia}$$

$$C^{-1} A C = \mathrm{Diag}(1, 1, 2) = C^{T} A C.$$

ESERCIZIO

Trovare autovalori e autovettori per

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

dire se rispetto ad una base opportuna L_A, L_B sono diagonali e se sì trovare tale base e individuare C invertibile t.c. $C^{-1}AC$ o $C^{-1}BC$ siano diagonali

---

a) $P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \underset{\text{mat } \Delta}{\overset{\uparrow}{=}} (-1-\lambda)(2-\lambda)^2$

$Sp(A) = \{-1, 2\}$ $\quad m(-1) = 1, \quad m(2) = 2$

La richiesta si può tradurre in una ricerca di una base di autovettori per cui occorre che la somma delle molteplicità algebriche sia 3 e questo è vero perché $1+2=3$

Poi occorre che $\dim V_{-1} = 1$ e questo è certo perché sappiamo

$$1 \leq \dim V_{-1} \leq m(-1) = 1$$

e che $\dim V_2 = 2$: questo va controllato perché sappiamo solo che

$$1 \leq \dim V_2 \leq 2$$

V_2 : s.o. di ricomp
$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2 \text{ v.l.}$$

$\Rightarrow \dim V_2 = 2$

Troviamo la base $\mathcal{B}_2$ per V_2 : y, z libere

e $-x - y + z = 0$ $\quad x = -y + z$ quindi

$$\begin{array}{ccc} y = 1 & \quad & y = 0 \\ z = 0 & & z = 1 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x = -1 & & x = 1 \end{array}$$

$$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

per V_{-1} : si vede subito che $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

cioè $V_{-1} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ in cui

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{e} \quad (L_A)_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

Sappiamo che ciò significa che esiste $C_{\mathcal{C}\mathcal{B}}^{(id)}$ matrice del cambiamento di base t.c.

$$C_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{(id)} A \, C_{\mathcal{C}\mathcal{B}}^{(id)} = D$$

Ora è facile scrivere $C_{\mathcal{C}\mathcal{B}}^{(id)}$: prendi il 1° vettore di $\mathcal{B}$ e scrivilo rispetto alla canonica metti i coeff. tali coo formando la 1ª colonna di C^{-1} etc. per cui

$$C_{\mathcal{C}\mathcal{B}}^{(id)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inoltre $C_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{(id)} = {C_{\mathcal{C}\mathcal{B}}^{(id)}}^{-1}$ per cui

posto $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ siamo certi che

$$C^{-1} A \, C = D$$

b) $p_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)^2$

1 doppio
3 di molteplicità alg 1 $\qquad\qquad$ $2+1=3$ ok.
con autovettore $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

dim V_1 può essere 1 o 2:

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ ha 1 v.l.
$\Rightarrow$ dim $V_1 = 1$

$\Rightarrow$ questo vieta non c'è una base di autovettori
Si ha per V_1 la soluzione base:
$z = 1$ da cui $y = -1$ $\qquad 2x + 3(-1) - 2 = 0$ $\qquad x = 5/2 \Rightarrow$

$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Non esiste $C \in M_3(\mathbb{R})$ t.c. $C^{-1}AC$ sia diagonale.

ESERCIZI Ricordando che se $A \in M_n(K)$ si definisce $tr(A) = \sum_{i=1} a_{ii}$,

A) Provare che tr soddisfa le seguenti proprietà:

1) $tr(A+B) = tr A + tr(B)$
2) $tr(\lambda A) = \lambda\, tr A$
] tr è lineare

3) $tr(AB) = tr(BA)$.

4) $tr(C^{-1}AC) = tr A$ Tale fatto consente di parlare di traccia anche per una trasformazione lineare, affidandosi ad una qualunque sua matrice di rappresentazione.

B) 1) Se A è invertibile allora $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

2) Una matrice A si dice idempotente se $A^2 = A$. Trovare i possibili valori del determinante di una matrice idempotente. Utilizzare questo risultato per provare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -8 & 10 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$ non è idempotente

3) Dire quali sono i possibili autovalori di una matrice reale A t.c. a) $A^3 = I$ b) $A^3 = A$

c) $A^3 = 0$

C) Se A è diagonalizzabile (cioè esiste C t.c. $C^{-1}AC$ sia diagonale) $\Rightarrow$ ogni potenza di A è diagonalizzabile

dim. esiste C t.e. $C^{-1}AC = D$ con $D = Diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$

allora $D^k = (C^{-1}A\, C)^k = C^{-1}A\cancel{C}\cancel{C^{-1}}A\cancel{C} \dots \cancel{C^{-1}}AC = C^{-1}A^kC$ e poiché $D^k = Diag(\lambda_1^k \dots \lambda_n^k)$, si ha che A^k è diagonalizzabile tramite la stessa C di A.

ESERCIZI

1. Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ trovare C ortogonale t.c. $C^{-1} A C$ sia diagonale

2. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è t.c. $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ si può concludere che:
   a) $\det A \in \mathbb{Z}$?
   b) gli eventuali autovalori di A sono interi ?
   c) se A è invertibile $\Rightarrow$ i coeff di A^{-1} sono interi ?

Domanda Può accadere che $A \in M_n(\mathbb{R})$ sia diagonalizzabile tramite una C ortogonale senza che A sia simmetrica ?

No: infatti supponiamo che sia $C^t A C = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ con $C^t = C^{-1}$. Allora da tale equazione matriciale posso ricavare A:

$$A = C \,\mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)\, C^{-1} = C \,\mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)\, C^T$$

Ma allora

$$A^T = (C \,\mathrm{Diag}\, C^T)^T = (C^T)^T \,\mathrm{Diag}^T\, C^T = C \,\mathrm{Diag}\, C^T = A$$

cioè A è simmetrica.