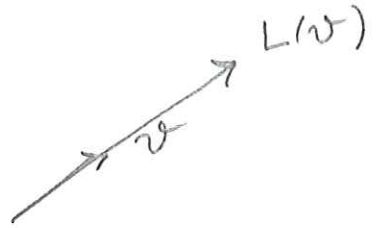
Autovalori e autovettori

Consideriamo le trasformazioni di uno sp. vett V ossia le applicazioni lineari da V in sè

$$L : V \to V$$

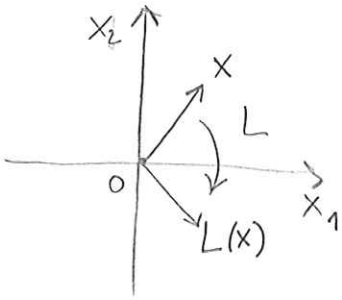
e cerchiamo di analizzare, cominciando da alcuni esempi se L "fissi qualche direzione" cioè se esista $v \in V$, $v \neq 0$ t.c. $L(v) = \lambda v$ per un certo $\lambda \in F$.



Vedremo che queste eventuali direzioni v ci danno delle preziose informazioni su L e che ci consentono spesso di scrivere la matrice di rappresentazione di L in forma particolarmente semplice (spesso diagonale).

Cominciamo con qualche esempio importante in ambiente $V = \mathbb{R}^n$.

ESEMPI DI TRASF. NEL PIANO $\mathbb{R}^2$ / SPAZIO $\mathbb{R}^3$

1. 

La simmetria rispetto all'asse x_1

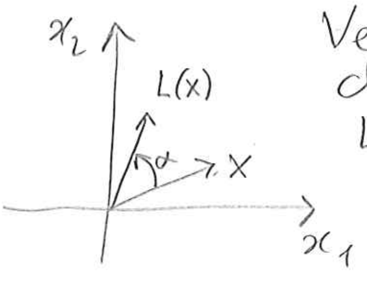
è la funzione $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

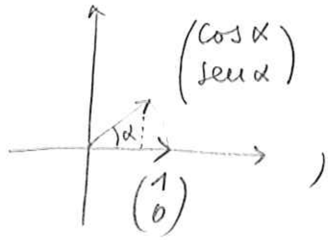
È lineare? Sì perché vedo subito che è del tipo L_A con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Quali direzioni fissa? Quella dell'asse x_1 sicuramente: infatti $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; ma anche quella dell'asse x_2 perché $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

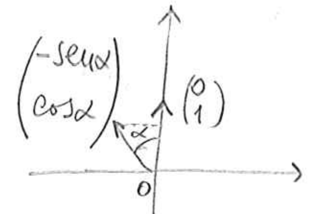
2. La rotazione di angolo α in $\mathbb{R}^2$:



Vediamo chi sono $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



,



$\longrightarrow$

la matrice $\overbrace{\qquad\qquad}^{\text{rispetto alla } \mathcal{E}}$ $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Notate: $\det A = (\cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha)^2 = 1$.

Quindi la rotazione di angolo α si scrive

$$\rho_\alpha(x) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\alpha - x_2 \operatorname{sen}\alpha \\ x_1 \operatorname{sen}\alpha + x_2\cos\alpha \end{pmatrix}$$

o anche denotato con $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ il vettore immagine

$$\begin{cases} x_1' = x_1\cos\alpha - x_2 \operatorname{sen}\alpha \\ x_2' = x_1 \operatorname{sen}\alpha + x_2\cos\alpha \end{cases}$$

Qui non ci sono direzioni fissate: perché "tutto ruota" a meno che $\alpha = 0, \pi$. Vedremo meglio il perché rigorosamente fra poco.

3. La simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$ è invece

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ di matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. Data $L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix}$ scriverla in forma matriciale.

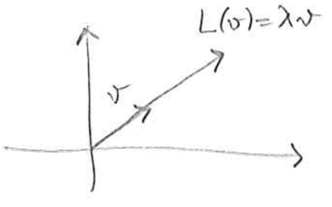
Basta "estrarre" i coeff degli x_i per avere la matrice A di L rispetto alla base canonica nei due $\mathbb{R}^3$ in gioco.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Infatti $A \overset{\text{PRC}}{\downarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ coincide con $L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

<u>Def.</u> Sia $L : V \to V$ una trasf. lineare di V vett su K.

Un vettore $v \in V$ con $v \neq 0$ si dice <u>autovettore</u> di L, relativo all'<u>autovalore</u> $\lambda \in F$, se risulta



$$L(v) \overset{(*)}{=} \lambda v$$

(cioè L fissa la direzione individuata da v)

- Domande:

a) Uno stesso $\lambda \in F$ può essere autovalore per due diversi autovettori v_1 e v_2? Sì:
ad esempio se $L(v_1) = \lambda v_1$ anche
$$L(3v_1) = 3L(v_1) = 3\lambda v_1 = \lambda(3v_1)$$

e $v_2 := 3v_1 \neq v_1$.

In generale dato λ l'insieme dei suoi autovettori è "grande" è forma un ssp.

b) Uno stesso v può essere autovettore per due diversi $\lambda_1, \lambda_2 \in F$? NO

Infatti supponiamo che risulti
$L(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v$ allora $(\lambda_1 - \lambda_2) v = 0$
e poiché $v \neq 0$ e siamo in uno sp. vett., deve essere 0 lo scalare ossia $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$
cioè $\lambda_1 = \lambda_2$.

DUE DEFINIZIONI IMPORTANTI

L'insieme degli autovalori di L si chiama lo spettro di L e si denota $sp(L)$ o $sp(A)$, dove A è la matrice di rappresentazione di L.

Se $\lambda \in sp(L)$ l'insieme

$$V_\lambda := \{ v \in V \mid L(v) = \lambda v \}$$

è un ssp di V di dimensione ≥ 1.

(perché è ssp? Siano $v_1, v_2 \in V_\lambda$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$: allora

$L(v_1) = \lambda v_1$, $L(v_2) = \lambda v_2$ per cui

$L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2) = \lambda_1(\lambda v_1) + \lambda_2(\lambda v_2) =$

$= \lambda [\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2]$) detto l'autospazio di L (di A) associato a λ : esso contiene tutti gli autovettori associati a λ più il vettore nullo 0.

- Questi oggetti sono geometricamente interessanti; ci danno per una trasf. lin delle direzioni privilegiate

Ma come li troviamo? Ci sono due cose da trovare: prima tutti i $\lambda \in F$ per i quali esiste qualche $v \neq 0$ con $L(v) = \lambda v$ e poi, per ciascuno di questi λ, i $v \in V_\lambda$!!

Pensiamo $L = L_A$ perché si ragiona meglio!

L'eq(*) è allora $Ax = \lambda x$ dove $x \in k^n$, che possiamo scrivere

$$Ax - \lambda x = 0 \quad , \quad Ax - \lambda I_n x = 0 \quad , \quad (A - \lambda I_n)x = 0$$

Descrivere il nucleo di $A - \lambda I_n \in M_n(k)$

Facile! $\Leftrightarrow$ le sol del sist. omog. di incompleta $A - \lambda I_n$.

1° PASSO

- Ricerca degli autovalori λ: per quali λ le sol del s.o. $(A - \lambda I_n)x = 0$ non si riducono a quelle banale? Ciò avviene sse

$$\boxed{\det(A - \lambda I_n) = 0}$$

Quindi $sp(A) = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \det(A - \lambda I_n) = 0 \}$

Per fortuna $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ è un polinomio di grado n (detto polinomio caratteristico di A)

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 0 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

Quindi $sp(A) = \{-1, 1\}$

2. $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha \in (0, 2\pi)$, $\alpha \neq \pi$ (A è una rotazione propria)

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} =$$

$= (\cos\alpha - \lambda)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha$ = pol. di grado 2 in λ

ora esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$(\cos\alpha - \lambda)^2 + \text{sen}^2\alpha = 0 \quad ?$$

Questo è una somma di quadrati per cui

dovrei avere $\begin{cases} \cos\alpha - \lambda = 0 \\ \text{sen}\,\alpha = 0 \end{cases}$ ma $\text{sen}\,\alpha \neq 0$ per le nostre α

$\Rightarrow$ non ci sono soluzioni ossia Nessun autovalore (e di conseguenza nessun autovettore)

2° PASSO ricerca degli autovettori per un dato autovalore λ

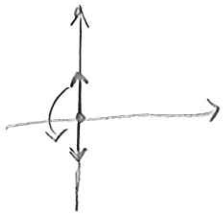
Siamo di fronte a un λ t.c. $(A - \lambda I_n)X = 0$ ha sol. n.b. e vogliamo trovarle. Poco male: c'è un s.o. da risolvere e si fa con EG.

Notiamo che $V_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I_n)X = 0\}$.

1. Qui è facilissimo:

$\lambda = 1$: $\quad A - 1 I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ x_1 è libero, $x_2 = 0$

ossia $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0, \ x_1 \text{ qualsiasi} \right\}$



$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ ssp di $\mathbb{R}^2$ di base $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ cioè l'asse x! (infatti lo sapevamo)

$\lambda = -1$ $\quad A + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ x_2 libero, $x_1 = 0$

$V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ ssp di $\mathbb{R}^2$ di base $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ cioè l'asse y (giusto)

Un caso più interessante:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -5-\lambda & -9 \\ 4 & 7-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-5-\lambda)(7-\lambda) + 36 = (\lambda-1)^2$$

$\rightsquigarrow \lambda = 1$ è l'unico autovalore

$sp(A) = \{1\}$

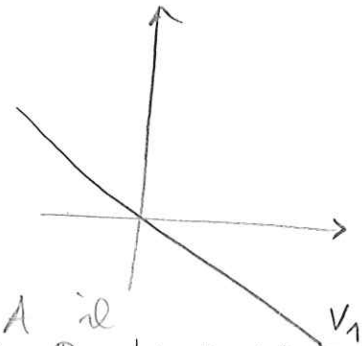
V_1: sol di $\left(\begin{array}{cc|c} -6 & -9 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{0} \end{array}\right)$ ∞^1 sol

x_2 libera

$2x_1 + 3x_2 = 0 \qquad x_1 = -\frac{3}{2} x_2$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -3/2\, x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

è un ssp di dim 1 $\subseteq \mathbb{R}^2$



DEF. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ si definisce traccia di A il numero reale $tr A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. $tr: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che proprietà ha?

ESERCIZIO Descrivere le matrici 2×2 reali che ammettono 2 autovalori distinti / nessun autovalore / un autovalore doppio

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ allora $p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} =$

$$= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$= \lambda^2 - tr A \cdot \lambda + \det A$ e tutto dipende dal segno di

$$\Delta = (tr A)^2 - 4 \det A = a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{11}a_{22} - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}a_{21} = a_{11}^2 + a_{22}^2 - 2a_{11}a_{22} + 4a_{12}a_{21}$$

Cosa abbiamo capito dagli esempi visti?

Varie cose:

1. <u>Gli autovalori possono non esistere</u> perché il polinomio caratteristico può non avere radici reali .... ma se la matrice ha ordine dispari ce n'è sempre almeno uno (perché?)
   Su $K = \mathbb{C}$ gli autovalori esistono sempre.
2. <u>Un autovalore può comparire con molteplicità 2 in $p_A(\lambda)$ ma l'autospazio associato può avere dimensione < 2.</u>

In generale vale il seguente:

TEOREMA

1) $1 \leq \dim V_\lambda \leq$ molteplicità $m(\lambda)$ di λ come radice di $p_A(\lambda)$

2) autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti

3) se una matrice è diagonale gli autovalori coincidono con gli elementi sulla diagonale

4) $0 \in sp(A) \iff \det A = 0$

5) Esiste una base di autovettori di L $\Rightarrow$ rispetto a tale base (la matrice di L è diagonale) $\Leftarrow$

6) Esiste una base di autovettori di L $\iff$ per ogni autovalore λ si ha $\dim V_\lambda = m(\lambda)$ e $\sum_{\lambda \in sp(A)} m(\lambda) = n$

7) Dato $A \in M_n(\mathbb{R})$ esiste C invertibile t.c. $C^{-1}AC = D$ con D diagonale $\iff L_A$ ha una base di autovettori.

dim (alcune e in casi semplici)

2) Limitatamente al caso di due autovalori:

Siano $\lambda_1 \neq \lambda_2$ due autovalori di A e

v_1 un autovettore per λ_1 ⊛

v_2 " λ_2

Supponiamo che (1) $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$ per certi a_i

e proviamo che necessariamente $a_1 = a_2 = 0$

Infatti da (1) segue

$$A(a_1 v_1 + a_2 v_2) = A0 = 0$$

cioè per la linearità

$$a_1 A v_1 + a_2 A v_2 = 0 \qquad \text{e per ⊛}$$

$$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 = 0$$

Ora (1) ci dà $a_2 v_2 = -a_1 v_1$ (1') quindi otteniamo

$$a_1 \lambda_1 v_1 + \lambda_2(-a_1 v_1) = 0 \qquad \text{cioè}$$

$$a_1 (\underbrace{\lambda_1 - \lambda_2}_{\neq 0}) v_1 = 0$$

ma $v_1 \neq 0$ essendo un autovettore $\Rightarrow a_1 = 0$

e sostituendo in (1') $a_2 v_2 = 0$ che di nuovo, essendo $v_2 \neq 0$ perché autovettore, fornisce $a_2 = 0$

3) Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ allora $A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$

per cui $\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$

che vale 0 esattamente per λ uguale a uno degli a_{ii} cioè $sp(A) = \{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$.

4) Se $0 \in sp A$ esiste $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$ t.c. $AX = 0X$, cioè $AX = 0$ quindi abbiamo sol non banali in questo S.O.
$\Rightarrow$ $n - \text{rank} A \geq 1$ ossia $\text{rank} A < n$ $\Rightarrow$ $\det A = 0$
(se fosse $\neq 0$ il rango coinciderebbe con il massimo ordine di un minore non nullo di A ossia con n)

5) Sia $L : V \to V$ e sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base d'autovettori, diciamo $L(v_i) = \lambda_i v_i$ con λ_i non necessariamente distinti. Costruiamo

$A_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(L)$ calcolando $L(v_1)$ e scrivendolo rispetto a $\mathcal{B}$: si ha $L(v_1) = \lambda_1 v_1$ per cui $[\lambda_1 v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Analogamente $L(v_2) = \lambda_2 v_2$ " $[\lambda_2 v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Alla fine $A_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ che è diagonale.

Viceversa se rispetto ad una certa base $\mathcal{B}$ la matrice di L è diagonale, allora se X è il vettore delle coo rispetto a $\mathcal{B} = (v_1, \dots v_n)$ vale

$$AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} X$$

Quindi $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ e in generale

$A e_i = \lambda_i e_i$

per cui $L(v_i) = \lambda_i v_i$ cioè $\mathcal{B}$ è fatta di autovettori.

6) Se $\sum_{\lambda \in Sp(A)} m(\lambda) = n$ vuol dire che, contando le molteplicità ci sono tante radici di $p(\lambda)$ quanto è il grado e poi $\dim V_\lambda = m(\lambda)$ ci dice che gli autospazi hanno la dimensione massima possibile.
Selezioniamo una base in ciascun V_λ e riuniamo tali basi in una sola lista $\mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ è fatta da vettori indipendenti a causa di 2) e in $\mathcal{B}$ ci sono $\sum \dim V_\lambda = \sum m(\lambda) = n$ elementi $\Rightarrow$ formano una base. Tale $\mathcal{B}$ è costituita tutta da autovettori.
Viceversa supponiamo che vi sia una base di autovettori $\Rightarrow$ ho n autovettori lin indip. Poiché ogni autovettore è relativo ad un unico autovalore li possiamo raggruppare a formare basi per $V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_k}$ dove $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori di L.
Dato che in totale sono n ho

$$n = \sum_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i} \quad \circledast$$

Se fosse $\dim V_{\lambda_i} < m(\lambda_i)$ almeno in un caso, avrei che

$$n = \sum_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i} < \sum_{i=1}^{k} m(\lambda_i) \overset{\text{T. Ruffini}}{\leq} n$$

che è una contraddizione. Segue $\dim V_{\lambda_i} = m(\lambda_i)$ per ogni i e $\circledast$ si può scrivere $\sum m(\lambda_i) = n$.

7) Se L_A ha una base di autovettori $\overset{5)}{\Rightarrow}$ rispetto a tale base è diagonale ossia esiste C matrice invertibile t.c. $C^{-1} A C = D$

Complementi

1. Determinante a blocchi

Supponiamo di avere una matrice M ottenuta assemblando a blocchi più matrici nel seguente modo

$$M = \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \in M_{m+n}(K)$$

dove

$$\left.\begin{array}{l} A \in M_m(K) \\ B \in M_n(K) \end{array}\right] \text{ quadrate di ordini possibilmente } \neq$$

$$\left.\begin{array}{l} O \in M_{m,n}(K) \\ C \in M_{n,m}(K) \end{array}\right] \text{ rettangolari di ordini atti a completare } M$$

allora $\det M = \det A \cdot \det B$

ESEMPIO

$$\det \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = [3 - (0)][2+4] = 18$$

Si potrebbe pensare che, più in generale, valga

$$\det\begin{pmatrix} A & D \\ C & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B - \det C \cdot \det D \qquad (\text{se } D=0 \text{ vale!})$$

ma ciò è falso come mostra il seguente controesempio.

$$M = \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \ominus & \oplus & \ominus & \oplus \end{array}\right|$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -2 - 1 \cdot 1 = -3$$ mentre

$$\det M \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Laplace} \\ 4^a \text{ riga}}}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 + 0$$

perché si notano colonne uguali.

<u>OSS.</u> La stessa proprietà vale con 0 in basso a sin

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

infatti questa tipologia si può ottenere trasponendo la precedente e $\det M = \det M^t$.

ESERCIZIO

Dato $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Trovare sp(A) e individuare tutti gli autospazi.
Dire se esiste C t.e. $C^{-1}AC$ sia diagonale.

Abbiamo $A - \lambda I = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{array}\right)$

e possiamo trovare il polinomio caratteristico di A calcolando il det a blocchi

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^3 \left[(1-\lambda)^2 - 1 \right] \qquad \text{pol di grado 5}$$

che ovviamente non conviene scrivere nella forma $a\lambda^5 + b\lambda^4 + \ldots$ in quanto, essendo scomposto in fattori le sue radici sono facili da calcolare.

$\lambda = 2$ 3 volte

$1-\lambda = \pm 1$ $\quad \lambda = 0, 2$

così

$\lambda = 2$ è di molt. 4

$\lambda = 0$ " 1

V_2 si determina risolvendo il s.o. di incompleta

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}\end{array}$$

∞^3 soluzioni $\Rightarrow$

$\dim V_2 = 3 < m(2) = 4$

x_3, x_4, x_5 libere. Troviamo una base (v_1, v_2, v_3)

$x_3 = 1, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0$ dà $x_2 = -x_4 + x_5 = 0$

$x_1 = -x_3 + x_4 - x_5 = -1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 0, \ x_4 = 1, \ x_5 = 0$ dà $x_2 = -1$

$x_1 = 1$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 0, \ x_4 = 0, \ x_5 = 1$ dà $x_2 = 1$

$x_1 = -1$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Così $V_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

V_1 si determina risolvendo il s.o. di incompleta

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix}$$

1 v.l. (come ci aspettavamo)

x_5 libera: pongo $x_5 = 1$ e ricavo

$x_4 = -1$

$x_3 = 0$

$x_2 = -x_4 - x_5 = 1 - 1 = 0$

$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$

$x_1 = 1 - 1 = 0$

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{è base per } V_1$$

Non posso riunire v_1, v_2, v_3, v per avere una base di $\mathbb{R}^5$ perché sono solo 4 vettori $\Rightarrow$ NO base di autovettori $\Rightarrow$ NO C.

ESERCIZI VARI (per ora NO 5. e 8.)

1. Trovare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Trovare autovalori e autovettori per

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \end{cases}$$

4. Dire se esiste l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e calcolarla

5. Dire se sono l.i. i vettori seguenti

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$ e normalizzarli

6. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ determinare il rango di

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1+a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Considerata $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ trovarne

Ker A e Im A (sempre al variare di A)

7. Scrivere l'eq. parametrica della retta passante per i punti $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

8. Scrivere l'eq dell'iperpiano avente come direzione ortogonale $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e passante per $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. Calcolare l'espressione $X^T A Y$ dove

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dire se la funzione $f(X,Y) = X^T A Y$ con $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ risulta lineare in X, lineare in Y, iniettiva, suriettiva.

10. Dire per quale n sta in $\mathbb{R}^n$ l'espressione

$$Ax + (x^T B)^T$$

se $x \in \mathbb{R}^6$, $A \in M_{7,6}(\mathbb{R})$, $B \in M_{6,7}(\mathbb{R})$.

Altri Esercizi

1. Trovare se esiste l'inversa di $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Dire quante soluzioni ha il sistema lineare

$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e determinarle (sfruttando la conoscenza di A^{-1})

2. Trovare il rango di

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Considerata $L_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dire se è iniettiva, suriettiva. Determinare $\ker B$ e $\operatorname{Im} B$

3. Determinare la trasformazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c.

① $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sia autovettore con autovalore 2

② $\ker L = \{x - y + 2z = 0\}$

③ $L\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Trovare quindi autovalori e autospazi per L.

4. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - y + z + t + s = 1 \\ 2x - y + 2t + 3s = 0 \\ y - 3z - s = 1 \end{cases}$$

5. Dire se sono indipendenti i vettori di $\mathbb{R}^4$

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

6. Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ che contenga

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e V_3, V_4 t.c.

$(V_3, V_1) = 0, \quad (V_4, V_1) = 0$

Trovare l'angolo fra V_1 e V_2 e normalizzare la base ottenuta.