Forme bilineari

Def Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ si può considerare la funzione di due variabili $X, Y \in \mathbb{R}^n$ data da

$$b(X,Y) = \underbrace{\underset{1\times n}{X^T}\ \underset{n\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{Y}}_{1\times 1}$$

e a valori in $\mathbb{R}$.

Tale $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è detta la <u>forma bilineare associata ad A</u>. Il motivo di questa terminologia deriva dal fatto che b è lineare sia rispetto alla prima variabile X che alla seconda Y ossia valgono

a) $b(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) = \lambda b(X_1, Y) + \mu b(X_2, Y)$

b) $b(X, \lambda Y_1 + \mu Y_2) = \lambda b(X, Y_1) + \mu b(X, Y_2)$

ES Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ la forma bilineare associata è $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$b(X,Y) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ 2y_1 + 4y_2 \end{pmatrix} = x_1(y_1 - y_2) + x_2(2y_1 + 4y_2) =$$

$$= x_1 y_1 - x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 4x_2 y_2$$

Questo esempio ci dice che se $A = (a_{ij})$ allora $b(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ o se si preferisce ci dice che $b(e_i, e_j) = a_{ij}$ cioè se b è la forma bil associata ad A allora i termini a_{ij} della matrice A sono i valori che b assume sulla coppia (e_i, e_j).

Si noti che b è un polinomio di grado 2 nelle $2n$ variabili $x_1 \dots x_n, y_1 \dots, y_n$.

Df. Se A è matrice simmetrica (caso importante) la forma bil. b associata si dice simmetrica in quanto $b(X,Y) = b(Y,X)$. Infatti

$b(X,Y) = X^T A Y \in \mathbb{R}$ e quindi coincide con il suo trasposto, cioè con $(X^T A Y)^T = Y^T A^T X =$
$= Y^T A X$ e questo è $b(Y,X)$.

$\uparrow$
perché $A^T = A$

<u>ESEMPIO 1.</u> Il prodotto scalare fra vettori è la forma bilineare simmetrica associata alla matrice $A = I_n$.

ESERCIZIO Riconoscere come forma bilineare in $\mathbb{R}^2$ il polinomio a 4 variabili

$$p(x_1, x_2, y_1, y_2) = 3x_1y_1 - x_1y_2 + 6x_2y_2$$

E' del tipo $\sum a_{ij} x_i y_j$ dove $a_{11} = 3$, $a_{12} = -1$ $a_{21} = 0$ $a_{22} = 6$ per cui si ha $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

e $p(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Ai fini del nostro corso più che le forme bilineari simmetriche b sono interessanti le forme quadratiche Q ottenute calcolando b su coppie uguali di vettori ossia le funzioni $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definite da

$$Q(x) := x^T A x = b(x, x)$$

Forme quadratiche

Def. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica (cioè $A = A^T$). La funzione $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da $Q(x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ si dice la forma quadratica associata ad A (dove $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$). Se $n=2$ spesso usiamo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ anziché $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ per denotare il generico elemento di $\mathbb{R}^2$.

ES. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \implies Q(x) = \underset{1\times 2}{(x \;\; y)} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} =$

$= (x \;\; y) \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -3x + y \end{pmatrix} = x(2x-3y) + y(-3x+y) =$

$= 2x^2 - 3xy - 3yx + y^2 \underset{xy=yx}{=} 2x^2 - 6xy + y^2$

Notate il $-6 = 2 \cdot (-3)$ comparso come coefficiente del termine misto.

(*) cioè ogni termine ha grado 2; es. x^2+y^2-x+1 non è omogeneo.

- Q quadratica si esprime come un polinomio omogeneo di grado 2 (*) nelle componenti di $x \in \mathbb{R}^n$. Dal polinomio si risale facilmente alla matrice ricordando di dividere per 2 i termini misti.

ES. Dato il polinomio $x^2 - 2y^2 - z^2 - 4xz + 5yx$ interpretarlo, se possibile, come forma quadratica in $\mathbb{R}^3$. Vogliamo vederlo come

$$Q(x) = x^T A x \quad \text{dove} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Poiché il pol è omogeneo la cosa è possibile via

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 & -2 \\ 5/2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

N.B. A differenza delle forme bilineari ci dobbiamo ricordare di dividere per 2 i coeff. dei termini misti: xy, xz, yz

OSS. 1) Se $Q(x) = x^T A x$ allora $Q(e_i) = a_{ii}$ cioè gli elementi diagonali di A sono valori assunti da Q; invece gli a_{ij} con $i \neq j$ non sono necessariamente valori assunti dalla funzione Q (altra differenza rispetto alle bilineari!)

2) Gli esempi più semplici di f.q vengono dalle A diagonali. E' chiaro che se $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ allora

$$Q(x) = x^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix} x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

ES. $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Q_A(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \left(= \|x\|^2\right)$

$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ $\quad Q_B(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2$

$C = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & -2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ $\quad Q_C(x) = -3x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2$

$Q_D(x) = x_1^2 + x_3^2$

3) È interessante notare che se $B \in M_n(\mathbb{R})$ è una matrice non simmetrica e si vuol calcolare

$f(X) = \overbrace{\underset{1\times n}{X^T} \underset{n\times n}{B} \underset{n\times 1}{X}}^{1\times 1}$, essendo $f(X) \in \mathbb{R}$, si ha

$f(X) = [f(X)]^T = X^T B^T X$ per cui

$$f(X) = \frac{f(X) + f(X)}{2} = \frac{X^T B X + X^T B^T X}{2} =$$

$$= X^T \left(\frac{B + B^T}{2}\right) X$$

La matrice $A = \dfrac{B + B^T}{2}$ è simmetrica

perché $\left(\dfrac{B + B^T}{2}\right)^T = \dfrac{1}{2}(B^T + B) = \dfrac{B + B^T}{2}$

Ad es. $f(X) = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 4y^2 - 2xy +$

$+ 3yx = x^2 + 4y^2 + yx$ coincide con la f.q. di matrice

$$A = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 4 \end{pmatrix}$$

In altre parole le funzioni $f(X) = X^T B X$ con B qualunque sono sempre pensabili come f.q. (banalmente perché sono sempre descritte da polinomi omogenei di grado 2).

Le f.q. sono interessanti nelle applicazioni soprattutto in relazione al loro segno, cioè al segno che può assumere il numero reale $Q(x)$. Che $Q(0)=0$ è chiaro qualunque sia Q; ma per gli altri $x \in \mathbb{R}^n$ che succede?

Negli esempi visti è chiaro cosa accade:

Q_A è positiva, $\forall x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$

Q_C è negativa, $\forall x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$

Q_B ha segno variabile perché

$$Q_B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1 > 0, \quad Q_B\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = -1 < 0$$

Q_D è positiva o nulla perché $x_1^2 + x_3^2 \geq 0 \quad \forall x_1, x_2, x_3$ e inoltre $Q_D(0, a, 0) = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Def. Sia Q f.q di matrice A e W ssp di $\mathbb{R}^n$

Diciamo che

i) $Q^{(o\,A)}$ è definita positiva su W se

$$Q(x) > 0 \quad , \forall x \in W - \{0\}$$

ii) $Q^{(o\,A)}$ è semidefinita positiva su W se

$$Q(x) \geq 0 \quad , \forall x \in W - \{0\}$$

iii) $Q^{(o\,A)}$ è definita negativa su W se

$$Q(x) < 0 \quad , \forall x \in W - \{0\}$$

(iv) Q $(\text{o } A)$ è semidefinita negativa su W se

$$Q(x) \leq 0 \qquad \forall x \in W - \{0\}$$

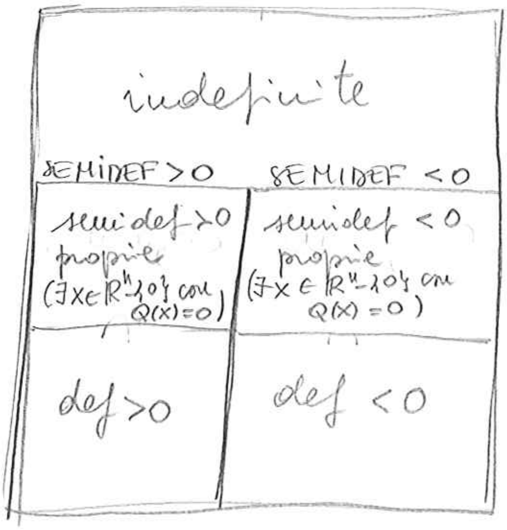
(v) Q $(\text{o } A)$ è indefinita su W

se non è né semidef > 0
né " < 0

ossia se esistono $x_1, x_2 \in W$ t.e.

$$Q(x_1) > 0 \;, \quad Q(x_2) < 0$$

Forme quadratiche non identicamente 0



N.B. 1) la forma quadratica identicamente 0 è l'unica che risulta sia semidef > 0 che semidef < 0. 2) Le matrici def > 0 (< 0) sono un sottoinsieme delle semidef > 0 (< 0).

- Se la matrice di Q è diagonale, tutto è chiaro: basta guardare i segni degli elementi sulla diagonale e controllare la presenza o no di 0.
  - Solo $+$ $\Rightarrow$ def > 0
  - Solo $-$ $\Rightarrow$ " < 0
  - alcuni $+$ e alcuni $-$ $\Rightarrow$ indefinita
- solo $+$ o 0 $\Rightarrow$ semidef > 0
- solo $-$ o 0 $\Rightarrow$ semidef < 0.

ES. $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2$ è def > 0 su $\mathbb{R}^3$; è semidefinita positiva " su $\mathbb{R}^4$, le rispettive matrici sono

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 3 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Si noti che su $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si ha $Q(x) = 0$ quindi su $\mathbb{R}^4$ è semidefinita propria.

Esercizio

Nell'ambito delle f.q. Q non identicamente nulle, non esistono Q che risultino contemporaneamente semidef > 0 e semidef < 0

Infatti, per esempio, sia $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $Q \neq 0$. che sia semidef > 0 e semidef < 0. Allora $\forall x \in \mathbb{R}^n$ si ha $Q(x) \geq 0$ e $Q(x) \leq 0$ quindi $Q(x) = 0$ $\forall x$ contro il fatto che $Q \neq 0$.

In altre parole l'insieme delle f.q non identicamente 0 è ripartito in 5 regioni due a due disgiunte.

Questa semplice osservazione renderà più facile il compito di individuare a quale delle def (i) – (v) una certa Q soddisfi.

Un'altro caso semplice è quello in cui sulla diagonale di A vi siano elementi di segno diverso. In tal caso Q è indefinita su $W = \mathbb{R}^n$

ES. $Q(x) = x^T A x$ con $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ è indef.

perchè $Q(e_1) = \underset{0}{\underset{\wedge}{-1}}$, $Q(e_2) = \underset{0}{\underset{\vee}{2}}$

Ovviamente su $W = \text{span}\{e_2\}$ A è def > 0

mentre su $Z = \text{span}\{e_1\}$ " < 0

Com'è su $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$?

$$Q\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1\ 3)\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1\ 3)\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

e poi poichè

$$Q(\lambda x) = (\lambda x)^T A \lambda x \underset{\uparrow}{=} \lambda^2 x^T A x = \lambda^2(-1) < 0$$

gli scalari migrano nei prodotti RC

abbiamo Q definita negativa su U.

Abbiamo imparato che: se $Q(x) > 0$ (< 0) $\Rightarrow Q(\lambda x) > 0$ (< 0), $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, cioè se una forma quadratica assume un certo segno su un certo $x \in \mathbb{R}^n$, allora lo assume su tutto il sottospazio $\text{span}\{x\} = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ generato da x.

In realtà per controllare se Q è def > 0 su $\mathbb{R}^n$ si può sempre ragionare su una opportuna "versione diagonale" di Q.

Infatti se ci interessa il segno della funzione $Q(X) = X^T A X$ per una certa A simmetrica, scriviamo $X = CY$ con C matrice invertibile $n \times n$: poiché $Y \mapsto CY$ è biunivoca, al variare di Y in $\mathbb{R}^n - \{0\}$ le X descritte da $X = CY$ sono tutti gli elementi di $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

(di X $=$) (Y)

Dunque i valori assunti da $Q(X)$ per $X \in \mathbb{R}^n$ sono gli stessi di quelli assunti per $Y \in \mathbb{R}^n$ dalla funzione di Y

$$Q(CY) = (CY)^T A\, CY = Y^T (C^T A C) Y$$

Si noti che $Q'(Y) = Y^T (C^T A C) Y$ è una f.q. perché $(C^TAC)^T = C^T A^T C = C^T A C$, ossia C^TAC è ancora simmetrica.

Può essere + facile ragionare su $C^T A C$ anziché su A? Sì se C^TAC è diagonale!

importante!

Abbiamo ora due strumenti per ragionare:

1) L'algoritmo di Gauß simmetrico

2) Il segno degli autovalori.

1 Gauß simmetrico

Un modo facile per passare da una matrice A ad una $C^T A C$ è utilizzare l'algoritmo di Gauß in modo simmetrico cioè ripetendo sulle colonne, passo per passo, quello che è stato fatto sulle righe. Questo perché le azioni riga dell'alg. di Gauß possono vedersi come moltiplicazione a destra per una matrice M (omettiamo i dettagli) e le corrispondenti azioni sulle colonne come moltiplicazioni a sinistra per M^T. Per cui facendo azioni riga seguite da azioni colonna si passa da A a $M^T A M$

ESEMPIO Stabilire il segno della f. q.

$$Q(X) = X^T A X \quad \text{se}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Qui a_{ii} sono tutti <0 per cui si può solo dire che A non è semidef > 0. Uso EG simmetrico

$$\xrightarrow[R]{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C]{C_2 \to C_2 + C_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1}$$

$$\xrightarrow{R} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 - C_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

check: tutte le volte che faccio una "operazione riga" seguita da una "operazione colonna" trovo una nuova mat simmetrica

Ci troviamo in un punto critico perché devo ragionare sulla sottomatrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e qui ogni $a_{ii} = 0$

Vedo che $a_{23} = -1 \neq 0$: eseguo $R_2 \to R_2 + R_3$ e poi $C_2 \to C_2 + C_3$ (Zona III. dell'algoritmo)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ora si può proseguire.

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \to C_3 - \frac{1}{2}C_2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(Attenzione: se fate qualcosa sulle righe lo dovete ripetere sempre anche sulle colonne. Es. Moltiplico per -1 la 2^a riga, Allora sono costretto a molt. per -1 anche la 2^a colonna e quindi non è un gran vantaggio)

Quindi Q è indefinita.

VEDI PAG. SEGUENTE PER LA DESCRIZIONE DELL'ALGORITMO

Metodi per studiare la definizione di matrici su $\mathbb{R}^p$:

$Q \neq 0$

INDEFINITE	
semidef ≥ 0	semidef ≤ 0
SEMIDEF stretta	SEMIDEF stretta
def > 0	def < 0

1. EG simmetrica fa passare dalla matrice originaria ad una congruente (=) che descrive la stessa forma quadratica.
Così tutto si può leggere nella matrice finale facilmente perché è $\boxed{\text{diagonale}}$

RIDUZIONE DI GAUß SIMMETRICA

I $a_{11} \neq 0$ $\Rightarrow$ operazioni riga seguite dalle corrispondenti operazioni colonna

II $a_{11} = 0$ ma $a_{ii} \neq 0$ per almeno un $i > 1$. Allora

$$R_1 \leftrightarrow R_i \quad e \quad C_1 \leftrightarrow C_i$$

porta a_{ii} in prima posizione diag e si procede come in I.

III. $a_{ii} = 0$ $\forall i$. Si cerca un $a_{ij} \neq 0$ e poi si opera con

$$R_i \to R_j + R_i$$
e
$$C_i \to C_j + C_i$$

portando $2 a_{ij} \neq 0$ in i-ma posizione diagonale per cui si ricade in II

N.B. Il ragionamento è scritto per il passo 1 cioè per a_{11} ma riguarda tutti i passi

Proposta: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ è indefinita (con EG simm; si impantana in III !!)

2. Il segno degli autovalori

Teorema Sia Q la forma quadratica $Q(x) = x^T A x$ con $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica. Q risulta:

def > 0 (< 0) $\iff$ $\forall$ autovalore è > 0 (< 0)

semidef > 0 (< 0) $\iff$ " è ≥ 0 (≤ 0)

Di conseguenza Q è indefinita $\iff$ esistono λ_1, λ_2 autovalori di A t.e. $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$.

Infine Q è semidef > 0 propria se gli autovalori sono 0 con molteplicità ≥ 1 e gli altri positivi; semidef < 0 propria se autovalori tutti < 0 e 0 almeno con molt. 1.

dim. Sia Q def > 0. Allora $Q(x) = x^T A x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Per il teorema spettrale, applicabile perché A è simmetrica, esiste $C \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonale (ossia t.e. $C^T = C^{-1}$) tale che

$$C^T A C = C^{-1} A C = \mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

dove i λ_i sono gli autovalori di A.

Allora $Q(CY) = (CY)^T A\, CY = Y^T C^T A C Y =$

$$= Y^T \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 > 0 \quad \forall Y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

e quindi ogni $\lambda_i > 0$

Viceversa se tutti gli autovalori di A sono positivi considerata la C che proviene dal teorema spettrale ancora una volta, si ha che

$$C^T A C = C^{-1} A C = \mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

e i valori assunti da $Q(x)$ per $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ coincidono con quelli assunti da $Q(CY) = Y^T \mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n) Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$. per $Y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$; ma se $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \neq 0$ ciò significa che $y_i \neq 0$ per almeno un i_0 e quindi

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 = \underset{0}{\overset{\vee}{\lambda_{i_0}}} \underset{0}{\overset{\vee}{y_{i_0}^2}} + \underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}} \lambda_i y_i^2}_{\overset{\vee\!\!|}{0}} > 0$$

Pertanto Q è definita positiva.

La dimostrazione negli altri casi è analoga. Completate per esercizio. $\blacksquare$

ES.1 Dire è definita positiva la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)\left[(3-\lambda)(1-\lambda) - 1\right] - (3-\lambda)$$

$$= (4-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3 - 1) - 3 + \lambda =$$

$$= (4-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) - 3 + \lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda + 4\lambda^2 - 16\lambda + 8 - 3 + \lambda = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 5$$

E ora ?

~~Si capisce come~~

Tale metodo sarebbe di scarsa utilità se fosse necessario trovare esplicitamente gli autovalori di A. Per fortuna, si possono contare permanenze e variazioni nel polinomio caratteristico di A usando il <u>Criterio di Cartesio</u>:

<u>TEOREMA</u>

Sia $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_d x^d \in \mathbb{R}^{(n)}[x]$ con $a_d \neq 0$ con tutte le radici reali (questo accade al pol caratteristico di A simmetrica!) Allora:

(i) 0 è radice di p $\Leftrightarrow d \geq 1$ e in tal caso $m(0) = d$

(ii) p ha <u>tante radici positive</u>, contate con la relativa molteplicità, <u>quante</u> sono <u>le variazioni di segno nella successione dei coefficienti non nulli di p.</u>

N.B.
(le radici negative vengono di conseguenza)

ES2 $p(x) = -x^3 + 38x - 31$ è il pol caratt. d'una mat simm. $\bar{A}$

$\Rightarrow$ • 0 non è radice • la sequenza dei coeff $\neq 0$ è $(-1, 38, -1)$

$-\ +$ una variazione $\quad +\ -$ una variazione

Quindi abbiamo 2 radici > 0

Ne segue che la terza radice è invece < 0, quindi $\bar{A}$ è indefinita.

Nel caso affrontato prima (es 1) avevamo invece

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 5$$

quindi no 0 e 3 variazioni per cui 3 radici > 0

e possiamo concludere che A è definita positiva.

Controllate anche con Gauß simmetrico!

Oss. Si potrebbe pensare che lavorando con EG simmetrico su A gli elementi diagonali che appaiono sulla matrice diagonale finale siano necessariamente gli autovalori di A ma non è così (provare per credere!). Quello che è vero è che hanno gli stessi segni degli autovalori di A.

Def. Se A è simmetrica, $Q(x)=x^T A X$ e per una certa C ortogonale si ha $C^{-1}AC = \mathrm{Diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_n)=D$, si dice che la forma quadratica

$$Y^T D Y$$ è la forma canonica di Q.

Es. Data $Q(x) = 5x^2 + 3y^2 - 6xy$ dire quale è il suo segno e trovarne la forma canonica.

Si ha $Q(x) = x^T A x$ dove $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

e $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ Essendo $P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (5-\lambda)(3-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 8\lambda + 6$

da cui $p_A(\lambda)=0$ per $\lambda = 4 \pm \sqrt{16-6} = 4\pm\sqrt{10}$

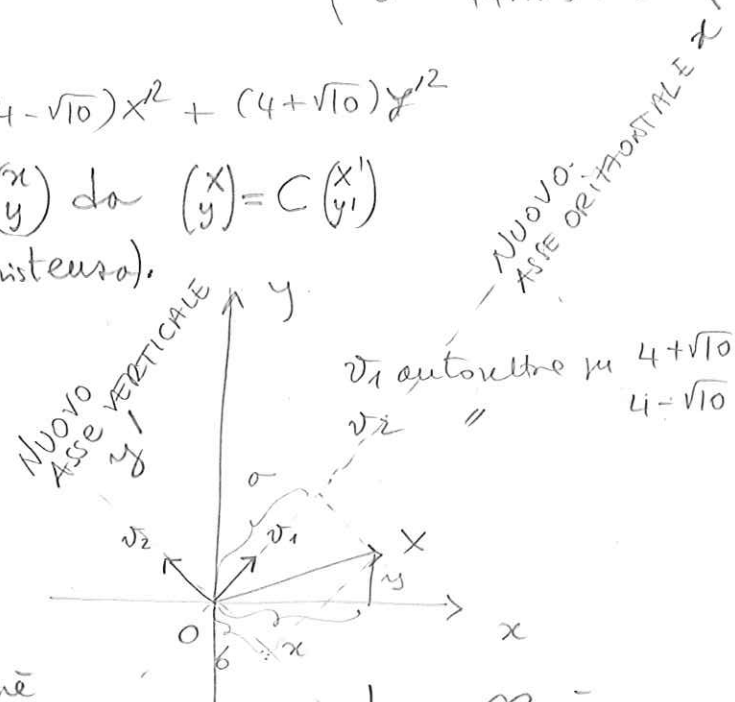
entrambi $>0 \Rightarrow$ <u>Q è definita positiva</u> e

la forma canonica è $(x'\ y')\begin{pmatrix}4-\sqrt{10} & 0\\ 0 & 4+\sqrt{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} =$

$$= (4-\sqrt{10})x'^2 + (4+\sqrt{10})y'^2$$

dove $Y=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ è legato a $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ da $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ per una certa C (di cui ci basta l'esistenza).

<u>Interpretazione geometrica</u>



La forma canonica di $Q(X)$ è ottenuta $\underbrace{\text{dal cambio di variabile}}$ $X \doteq CY$.

Ora $X = [X]_{\mathcal{E}}$, $C \doteq C_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(id)$ (perchè questa è la C del teorema spettrale!)

per cui $Y = [X]_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B}$ è base ortonormale di autovettori, per cui stiamo dicendo che guardando un punto X del piano rispetto al riferimento cartesiano dato dalla base ortonormale $\mathcal{B}$, l'espressione di Q è semplice, cioè è di tipo diagonale. Di conseguenza è semplice anche interpretare nel piano l'oggetto $Q(X) = $ costante.

Ad esempio cosa rappresenta in $\mathbb{R}^2$ l'equazione

$$5x^2+3y^2-6xy=4 \ ?$$

Un'ellisse $\mathcal{E}$!! Infatti nel nuovo riferimento

diventa $(4-\sqrt{10})x'^2 + (4+\sqrt{10})y'^2 = 4$

$$\frac{x'^2}{4/_{4-\sqrt{10}}} + \frac{y'^2}{4/_{4+\sqrt{10}}} = 1$$

di semiassi $\sqrt{\dfrac{4}{4-\sqrt{10}}}$, $\sqrt{\dfrac{4}{4+\sqrt{10}}}$

Ma se è un ellisse nel nuovo riferimento lo è anche nel vecchio perchè non abbiamo variato le distanze / gli angoli (perchè C è matrice ortogonale!) per cui forma e misure si conservano.

Vogliamo essere più accurati e vedere come è messo $\mathcal{E}$ nel riferimento originario?

$$V_{4-\sqrt{10}} : \begin{pmatrix} 5-(4-\sqrt{10}) & -3 \\ -3 & 3-(4-\sqrt{10}) \end{pmatrix}$$

Mi fido che una riga sia superflua

(oppure fate Gauß:

Ma è chiaro che

$$\frac{5-4+\sqrt{10}}{-3} = \frac{-3}{3-4+\sqrt{10}}$$

perchè

$(1+\sqrt{10})(\sqrt{10}-1) = 9$ ✓

Così

v_1: $y = 1$

$x = \dfrac{3}{1+\sqrt{10}}$ $\cong$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3/1+\sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{\begin{pmatrix} 3/1+\sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{3}{1+\sqrt{10}}\right)^2+1}}$$

$$V_{4+\sqrt{10}} : \begin{pmatrix} 5-(4+\sqrt{10}) & -3 \\ \cancel{-3} & \cancel{3-(4+\sqrt{10})} \end{pmatrix}$$

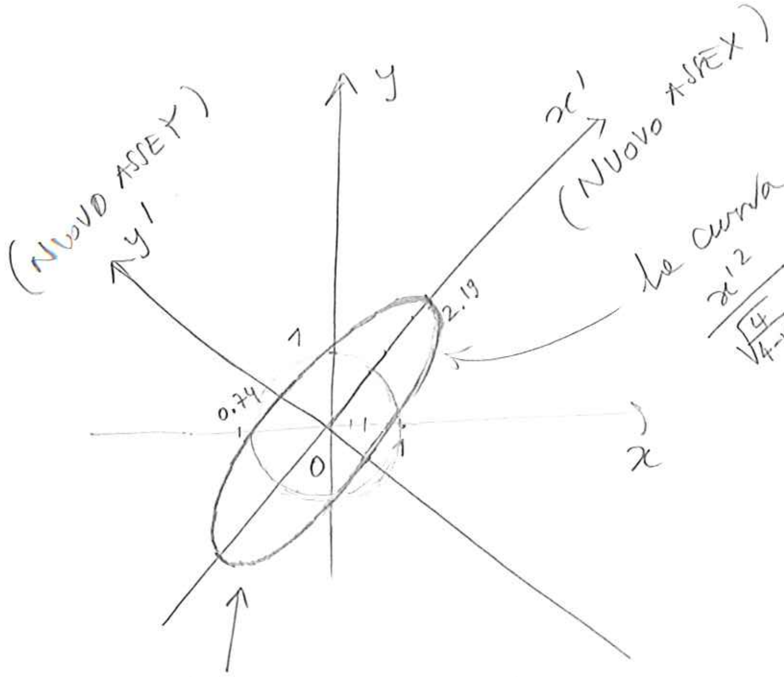
$y = 1$

$x = \dfrac{3}{1-\sqrt{10}}$

e normalizzando come prima

$$v_2 = \begin{pmatrix} 3/1-\sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3}{1-\sqrt{10}}\right)^2+1}}$$

Comunque a noi interessa solo la direzione! Le direzioni di v_1 e v_2 sono gli assi di $\mathcal{E}$.



La curva $\dfrac{x'^2}{\sqrt{\frac{4}{4-\sqrt{10}}}} + \dfrac{y'^2}{\sqrt{\frac{4}{4+\sqrt{10}}}} = 1$ (se letta rispetto agli assi x', y')

$\sqrt{\dfrac{4}{4-\sqrt{10}}} \simeq 2,19$ 1° semiasse

$\sqrt{\dfrac{4}{4+\sqrt{10}}} \simeq 0.74$ 2° semiasse

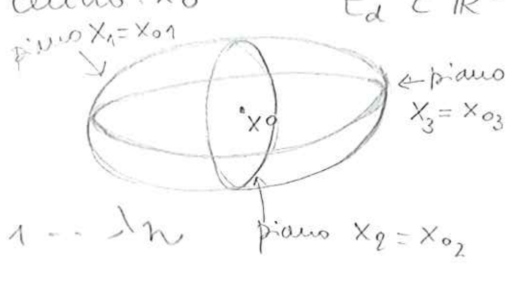
La curva $5x^2+3y^2-6xy=4$ (se letta rispetto agli assi x, y)

<u>Generalizzazione</u> Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è <u>matrice def >0</u>

$d \in \mathbb{R}$ è fissato e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è fissato $\Rightarrow$ l'insieme

$$E_d = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x-x_0)^T A (x-x_0) = d^2\}$$

<u>è un ellissoide di centro x_0</u>, ossia una superficie $(n-1)$-dimensionale (una curva se $n=2$, una superficie se $n=3$, un volume se $n=4$ etc) t.c. tagliandola con gli iperpiani $x_i = x_{0i}$ $\forall i=1,..,n$ ad esclusione di due valori per i, si ottiene sempre un'ellisse di centro x_0. $E_d \subset \mathbb{R}^3$

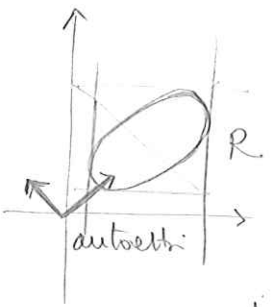


Inoltre se $v_1, \dots, v_n$ sono autovettori per gli autovalori $\lambda_1 \dots \lambda_n$

allora 1) gli assi di simmetria per E_d sono uscenti da x_0 e diretti secondo i v_i

2) i semiassi misurano $\sqrt{\dfrac{d^2}{\lambda_i}}$ (Guarda l'es visto)

3) il rettangoloide R che ha inscritto E_d e di lati // assi cartesiani x_i è definito dagli intervalli



$$x_{0i} - \sqrt{d^2 a_{ii}} \le x_i \le x_{0i} + \sqrt{d^2 a_{ii}} \qquad i = 1 \dots n$$

dove a_{ii} è l'elemento diagonale i-mo di A^{-1}.

Es. se $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $d = 1 \Rightarrow$

l'ellissoide di centro x_0 associato è

$$(x-1, y-1, z+1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{cioè}$$

$$2(x-1)^2 + (y-1)^2 + 3(z+1)^2 = 1 \quad (*)$$

di semiassi orientati come gli assi cartesiani e di misura $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{1}{1}} = 1$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$ per cui R è descritto da

$$-\sqrt{\frac{1}{2}} \le x_1 \le \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad -1 \le x_2 \le 1, \quad -\sqrt{\frac{1}{3}} \le x_3 \le \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Ora se eseguiamo i calcoli in (*) troviamo

$$2(x^2+1-2x) + y^2+1-2y + 3(z^2+1+2z) = 1 \quad \text{ossia}$$

$$\underbrace{2x^2+y^2+3z^2-4x-2y+6z+5}_{p(x,y,z)}=0$$

Da una eq. di questo tipo si può ritrovare A e X_0?

A è facile: si guarda solo la parte omogenea di grado 2 ossia $2x^2+y^2+3z^2$ e questa ci fornisce subito $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

E X_0? X_0 si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0\\[2mm]\dfrac{\partial p}{\partial y}=0\\[2mm]\dfrac{\partial p}{\partial z}=0\end{cases}$$

Infatti si trova

$$\begin{cases}4x-4=0\\2y-2=0\\6z+6=0\end{cases}$$

da cui $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=-1\end{cases}$ che sono le coo di X_0.

Esercizio Riconoscere se sono o no ellissoidi E_d i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ e in caso affermativo trovarne assi di simmetria, centro, misure dei semiassi e intervalli di definizione del rettangoloide che inscrive E_d

1) $$\left[X - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^T \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \left[X - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = 4 \qquad \text{in } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

2) $x^2 - 3y^2 + xy = 4$

3) $x^2 + 3y^2 - xy = 6$

4) $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$

Svolgimento

1) è del tipo voluto con $x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$d = 2$ quindi è un ellisse purché la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ sia definita positiva

Gauß simm ci dà $\xrightarrow{R} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \to C_2 - 3C_1}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ per cui la matrice è indefinita e quindi non siamo di fronte ad una ellisse.

2) $x^2 - 3y^2 - xy = 4$

è $(x\ y)\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4$ e non è ellisse perché

la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & -3 \end{pmatrix}$ non è def >0 avendo elementi diag di segno $\neq$.

3) $x^2 + 3y^2 - xy = 6$

$(x\ y)\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\sqrt{6})^2$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix}$ ha pol caratt.

$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A\, \lambda + \det A = \lambda^2 \underbrace{-\ 4\lambda}_{\text{var}} \underbrace{+\ (3 - 1/4)}_{\text{var}}$

per cui ci sono due radici positive $\Rightarrow$

A è definita positiva e siamo di fronte ad una ellisse di centro $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e semiassi $\sqrt{\frac{6}{\lambda_1}}$, $\sqrt{\frac{6}{\lambda_2}}$ dove λ_1, λ_2

sono i due autovalori.

$p_A(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - 4\lambda + \frac{11}{4} = 0$

$4\lambda^2 - 16\lambda + 11 = 0 \qquad \lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 44}}{4} =$

$= \frac{8 \pm \sqrt{20}}{4} = \frac{8 \pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{5}}{2}$

Esercizio Esprimere

Il polinomio caratteristico di una matrice 2x2.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} =$$

$$= \lambda^2 + a_{11}a_{22} - (a_{11}+a_{22})\lambda - a_{12}a_{21} =$$

$$= \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A$$

Quindi il primo semiasse misura

$$\sqrt{\frac{6\cdot 2}{4+\sqrt{5}}} \quad \text{e il secondo} \quad \sqrt{\frac{6\cdot 2}{4-\sqrt{5}}}$$

Gli intervalli di definizione del rettangoloide R sono

$$-\sqrt{6a_{11}} \leq x \leq \sqrt{6a_{11}}$$

$$-\sqrt{6a_{22}} \leq y \leq \sqrt{6a_{22}}$$

dove a_{ii} sono gli elementi diag. di

A^{-1} che non conosciamo.

Ma il suo termine di posto 1,1 è

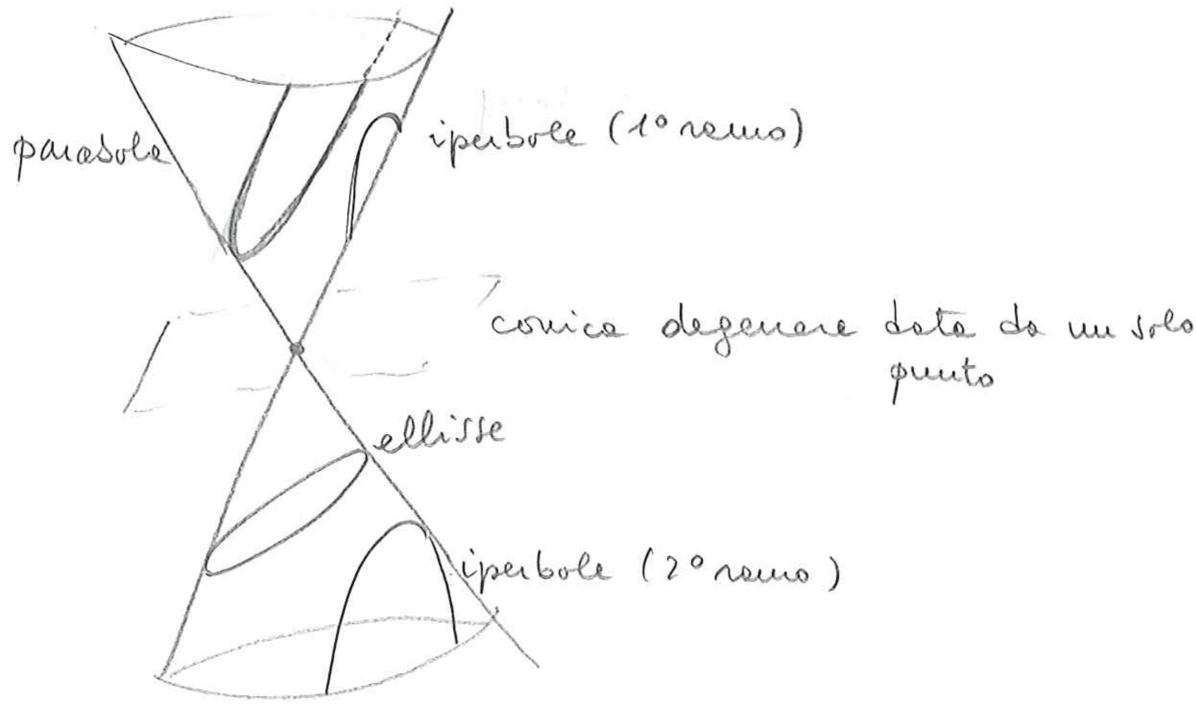
$$a_{11} = \frac{(-1)^2 A_{11}}{\det A} = \frac{3}{\frac{11}{4}} = \frac{12}{11}$$

quello di posto 2,2 è $\dfrac{(-1)^2 A_{22}}{\det A} = \dfrac{1}{\frac{11}{4}} = \dfrac{4}{11} = a_{22}$.

Appendice

Riconoscimento delle coniche

TEOREMA
Ogni polinomio p di grado 2 in due variabili rappresenta una conica ossia la sezione di un cono circolare retto a doppia falda con un piano



Tale curva si dice degenere se si riduce ad un punto o ad una coppia di rette: in questa categoria rientrano anche le coniche completamente immaginarie (cioè prive di punti in $\mathbb{R}^2$) quali ad es

$$x^2+y^2+1=0$$

In sostanza ci sono pol $p(x,y)$ di grado 2 a cui non corrispondono le usuali coniche: ellisse (E), parabola (P), iperbole (I).

Il riconoscimento del caso degenere è facile e una volta visto che la non è degenere è anche facile controllare se si tratta di E, P, I.

Si tratta di affidarsi a opportune matrici.

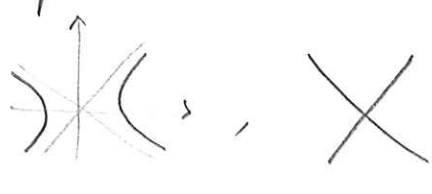
Vediamo come: scriviamo la come $p(x,y)=0$ dove

$$p(x,y) = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33}$$

guardiamo la matrice $\boxed{B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}}$ che è simmetrica e pensiamo alla forma quadratica che definisce. Allora accade questo:

1) B def >0 o def <0 (2 autovalori di ugual segno) $\Rightarrow$ caso ellittico (circonferenza se $\lambda_1 = \lambda_2$)

2) B indefinita (un autovalore positivo e uno negativo) $\Rightarrow$ caso iperbolico



3) B semidefinita (un autovalore è 0) $\Rightarrow$ caso parabolico

Diciamo "caso" perché non stiamo escludendo la situazione degenere. Es. $x^2=1$ rientra

nel caso parabolico perché $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
ma rappresenta le due rette $x = 1$, $x = -1$
e non una parabola.

Comunque il dubbio sulla degenericità è presto tolto. Si guarda

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}}$$

anch'essa simmetrica e si ha che

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ è degenere} \iff \det A = 0}$$

Si noti che più velocemente possiamo dire che

$\det B > 0$	caso ellittico
$\det B < 0$	caso iperbolico
$\det B = 0$	caso parabolico

<u>ESEMPI</u> 1) Riconoscere la conica $\mathcal{C}$

· $3x^2 - 2y^2 + xy - 2x + 1 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = -2 + (-6 - 1/4) \neq 0$
dice $\mathcal{C}$ <u>non degenere</u>

Ora $B = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 1/2 & -2 \end{pmatrix}$ per cui $\det B = -6 - 1/4 < 0$
<u>caso iperbolico</u>. Quindi $\mathcal{C}$ è un'iperbole.

b) $x^2 + 4y^2 - 3xy = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 0 \\ -3/2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det A = 0 \qquad \text{caso degenere}$$

Ovviamente ora posso chiedermi: esattamente cos'è? $//$, X, $\cdot$, ϕ ...

Per questo mi aiuta B: dato che $\det B =$

$= 4 - \frac{9}{4} > 0$ siamo nel caso ellittico $\Rightarrow$

non siamo di fronte a due rette $//$ o X

e al massimo $\mathscr{C}$ è fatta da un punto

e un punto si vede $(0,0)$.

Ora se $x \neq 0$ l'eq è

$$1 + 4\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

e $\quad \Delta = 9 - 16 < 0 \quad$ non ha radici reali

Quindi non ci sono sol con $x \neq 0$.

Ma se $x = 0$ ho $4y^2 = 0$ per cui anche $y = 0$

Morale $\mathscr{C} = \{(0,0)\}$.