I intermedia di Algebra Lineare

(Dott.ssa D. Bubboloni) 11 Novembre 2016

Avete due ore di tempo. Potete scegliere 6 esercizi su 7 per avere punteggio pieno.

1. Scrivere come un opportuno *Span* l'insieme S delle soluzioni del seguente sistema nelle variabili reali x, y, z, t, u, dopo averlo portato in forma normale.

$$\begin{cases} x+3y &= z-2t+u \\ u-3t &= 4y-t+x \end{cases}$$

Notare che S è uno spazio vettoriale, calcolarne la dimensione ed esibirne una base.

2. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema nelle variabili reali x, y, z.

$$\begin{cases} ax+y-z=a \\ x+y-z=0 \\ 3x+ay-2z=2 \end{cases}$$

Successivamente rispondere alle seguenti domande:

- esistono valori di a per cui il sistema è omogeneo?
- esistono valori di a per cui il sistema ha infinite soluzioni? In tal caso descrivere l'insieme S delle soluzioni e dire se è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

3. Dire se sono linearmente dipendenti i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e in caso affermativo esprimerne uno come combinazione lineare dei restanti. Dire se è possibile esprimere v_2 come combinazione lineare dei restanti.

4. Dati i vettori di $\mathbb{Q}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

provare che non costituiscono una base per $\mathbb{Q}^3$ ma sono però un insieme di generatori per $\mathbb{Q}^3$. Da tale sistema si estragga una base per $\mathbb{Q}^3$.

5. Risolvere il sistema a coefficienti nel campo $F_2 = \{0, 1\}$ e nelle variabili $x, y, z, t, u \in F_2$:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 + u \\ z - y + u = 1 + t \\ t = z + x + u \end{cases}$$

Si ricordi che in tale campo $1 + 1 = 0$ e dunque $-1 = 1$. Rappresentare, se possibile, l'insieme S delle soluzioni per elencazione.

6. Determinare le coordinate del vettore

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ seguente

$$\mathcal{B} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

7. Discutere al variare di $b \in \mathbb{R}$ il seguente sistema nelle variabili reali x, y, z

$$\begin{cases} x + 3y + z = b \\ x - y = 0 \\ bx + 3y + z = 1 \\ y + z = b \end{cases}$$

SOLUZIONI

1.

Il sistema in forma normale è

$$\begin{cases} x + 3y - z - 2t + u = 0 \\ -x - 4y - 2t + u = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema omogeneo con matrice completa:

$$B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Utilizziamo il passo base dell'algoritmo di Gauss (EG) su B con moltiplicatore 1 ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

B è a scala e quindi possiamo procedere alla descrizione delle sue soluzioni. Ci sono tre variabili libere: z, t e u. Quindi il sistema ha ∞^3 soluzioni. Dall'ultima equazione si ricava $y = -z$ che sostituita nella prima fornisce

$$x - 3z - z + 2t - u = 0$$

e quindi

$$x = 4z - 2t + u.$$

Le soluzioni sono quindi date da

$$x = 4z - 2t + u$$

$$y = -z$$

$$z, t, u \in \mathbb{R}$$

L'insieme delle soluzioni è

$$S = \{[4z - 2t + u, -z, z, t, u]^T \in \mathbb{R}^5 : z, t, u \in \mathbb{R}\}.$$

Mettendo in evidenza i parametri z, t e u nella scrittura sopra possiamo evidenziare la natura di *Span* per S. Infatti

$$S = \{z[4, -1, 1, 0, 0]^T + t[-2, 0, 0, 1, 0]^T + u[1, 0, 0, 0, 1] \in \mathbb{R}^5 : z, t, u \in \mathbb{R}\} =$$

$$Span\{[4, -1, 1, 0, 0]^T,\ [-2, 0, 0, 1, 0]^T,\ [1, 0, 0, 0, 1]^T\}.$$

Abbiamo visto a lezione che che uno *Span* è sempre un sottospazio, ossia uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni dello spazio vettoriale ambiente che quì è $\mathbb{R}^5$. S è sicuramente generato da i tre vettori

$$[4, -1, 1, 0, 0]^T,\ [-2, 0, 0, 1, 0]^T,\ [1, 0, 0, 0, 1]^T.$$

Proviamo che tali vettori sono anche indipendenti. Supponi che

$$a[4,-1,1,0,0]^T + b[-2,0,0,1,0]^T + c[1,0,0,0,1]^T = [0,0,0,0,0]^T.$$

Allora guardando le sole ultime tre componenti si deve avere

$$a[1,0,0]^T + b[0,1,0]^T + c[0,0,1]^T = [0,0,0]^T$$

e quindi $a = b = c = 0$

Pertanto $dimS = 3$.

2. Cominciamo scrivendo il sistema

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ ax+y-z=a \\ 3x+ay-2z=2 \end{cases}$$

La matrice completa del sistema è allora

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & -1 & a \\ 3 & a & -2 & 2 \end{array}\right)$$

e usiamo EG con moltiplicatori: $-a$ e -3 ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & -1+a & a \\ 0 & a-3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Se $a=1$ la seconda riga esprime una equazione impossibile e quindi il sistema è impossibile. Assumiamo $a \neq 1$ e proseguiamo con EG con moltiplicatore $\frac{a-3}{a-1}$ ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & -1+a & a \\ 0 & 0 & a-2 & \frac{a^2-a-2}{a-1} \end{array}\right)$$

Dato che siamo sotto l'ipotesi $a \neq 1$ i pivot sono sicuramente almeno 1 e $a-1$. Ad essi si aggiunge $a-2$ nel caso in cui $a \neq 2$. Pertanto se $a \neq 2$ i pivot sono 3 e si ha soluzione unica. Se $a=2$ l'ultima equazione è una identità perchè $2^2-2-2=0$. Cancellandola dal sistema ci riduciamo al sistema di matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

che ammette ∞^1 soluzioni. Calcoliamole: z è libera, $y=z-2$, $x=2$. Quindi

$$S = \{[2, z-2, z] : z \in \mathbb{R}\}.$$

Tale insieme non è un sottospazio perchè non contiene il vettore nullo 0.

Non esistono valori di a per cui il sistema sia omogeneo perchè la terza equazione ha termine noto 2.

3. Vediamo chi sono le soluzioni in $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ della equazione vettoriale

$$a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Consideriamo, in altre parole il sistema omogeneo di matrice incompleta

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -9 & 3 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Facciamo uno scambio riga per poter iniziare EG ottenendo

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Partiamo con moltiplicatori $0, 2, 1$ ottenendo

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

proseguiamo con moltiplicatori $-\frac{3}{2}, 0$ ottenendo

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Moltiplichiamo la terza riga per $\frac{2}{7}$ e la quarta per $\frac{1}{2}$ ottenendo la forma più semplice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Un'ultima applicazione di EG conduce a

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché i pivot sono 3 abbiamo che i vettori sono **dipendenti**. Sicuramente v_4 è esprimibile come combinazione lineare dei restanti perché la variabile ad esso associata è libera. Ma è possibile che anche altri vettori siano ricavabili come combinazione lineare dei restanti. Per capire quali dobbiamo trovare gli a, b, c, d che consentono di scrivere esplicitamente la combinazione lineare non banale che produce 0. Essendo d libera la fisso come voglio (ma escludendo la scelta $d = 0$ che mi porta alla soluzione banale che non mi interessa). Prendo $d = 3$ e risalgo dall'ultima equazione alle precedenti. Ho $c = 1$ e poi $2b - 9 + 9 = 0$, ossia $b = 0$. Infine $-a + 0 - 4 = 0$ fornisce $a = -4$. Pertanto abbiamo che $-4v_1 + 0v_2 + v_3 + 3v_4 = 0$. Quindi **possiamo ricavare uno qualsiasi dei v_i tranne v_2**. Ad esempio $v_3 = 4v_1 - 3v_4$.

4. I vettori dati sicuramente non sono una base perché sono $4 > 3 = dim\mathbb{Q}^3$. Vediamo se generano $\mathbb{Q}^3$ e in concomitanza estraiamo una base. Consideriamo la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right)$$

al variare di $x, y, z \in \mathbb{R}$ e cerchiamo di capire se il sistema che ha tale matrice completa ha sempre soluzione. Si noti che si è messo per primo il vettore con prima componente diversa da 0. La matrice è a scala quindi non serve fare nulla perché siamo subito in grado di identificare i pivot che sono sulla prima colonna, la seconda e la quarta. Inoltre la terza variabile è libera. Qualunque siano $x, y, z \in \mathbb{R}$ le soluzioni ci sono sempre. Questo dice che **i vettori dati sono un sistema di generatori**. Per estrarre una base si prendono i vettori dove sono caduti i pivot e quindi v_2, v_1, v_4 in un loro qualsiasi ordine. Ad esempio $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_4)$ è una base.

5. Per risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 + u \\ z - y + u = 1 + t \\ t = z + x + u \end{cases}$$

usiamo EG come sempre dopo averlo portato in forma normale.
La matrice completa del sistema è

$$B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

e usiamo EG con moltiplicatori 0 e 1 ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e di nuovo EG con moltiplicatori 1 ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La matrice è a scala. t e u sono libere ma possono assumere solo i due valori 0 e 1. Pertanto le soluzioni sono 4 e possono sicuramente essere elencate. Si ha $z = t + u$ dalla terza equazione, $y = 1$ dalla seconda e $x = 0$ dalla terza. Quindi

$$S = \{[0, 1, 0, 0, 0]^T, [0, 1, 1, 1, 0]^T, [0, 1, 1, 0, 1]^T, [0, 1, 0, 1, 1]^T\}.$$

6. Si devono esplicitare le soluzioni del sistema di completa

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Usiamo EG con moltiplicatore -1, 0 trovando

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

e poi con moltiplicatore -1 ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Facciamo EG a ritroso con moltiplicatori $1/2$ e $-1/2$ ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Dividendo per 2 l'ultima riga vediamo la soluzioni apparire sulla colonna a sinistra

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Quindi le coordinate richieste sono $[-1, 2, 0]^T$.

7. Affidiamoci alla matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ b & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)$$

Usiamo EG con moltiplicatori $-1, -b, 0$ ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & b \\ 0 & -4 & -1 & -b \\ 0 & 3-3b & 1-b & 1-b^2 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)$$

Scambio alcune righe e moltiplico la seconda per -1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 4 & 1 & b \\ 0 & 3-3b & 1-b & 1-b^2 \end{array}\right)$$

Usiamo EG con moltiplicatori $-4, -3+3b$ ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -3 & -3b \\ 0 & 0 & 2b-2 & 2b^2-3b+1 \end{array}\right)$$

Dividiamo per -3 la terza riga

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2b-2 & 2b^2-3b+1 \end{array}\right)$$

Facciamo ancora EG con moltiplicatore $2-2b$ ottenendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -b+1 \end{array}\right)$$

Se $b \neq 1$ il sistema è impossibile a causa dell'ultima equazione. Se $b = 1$ la quarta equazione si elimina e il sistema ha soluzione unica il cui calcolo non è richiesto.