Fisica 1 Elettronica e Telecomunicazioni. Compito del 9/7/2019

LEGGERE LE NOTE SUL RETRO

Problema 1 (7 punti) Un pendolo matematico compie piccole oscillazioni tali che le coordinate della massa sono

$$x = R\sin(\theta(t))$$
$$y = -R\cos(\theta(t))$$

con

$$\theta(t) = A(1 + \sin(\omega t)),$$

dove $R = 2$ m, $A = 10$ rad e $\omega = 0.2$ rad/s. Determinare:

(a) Il modulo v della velocità,

(b) Il modulo a_t dell'accelerazione tangenziale

(c) Il modulo a_r dell'accelerazione radiale

al tempo $t = 3$.

Soluzione: L'angolo θ al tempo $t = 3$ s è

$$\theta(3) \simeq 15.65 \text{ rad}.$$

La velocità angolare $\dot{\theta}$ (che non è ω) è

$$\dot{\theta}(t) = A\omega\cos(\omega t); \qquad \dot{\theta}(3) \simeq 1.65 \text{ rad/s}.$$

L'accelerazione angolare è

$$\ddot{\theta}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t); \qquad \ddot{\theta}(3) \simeq -0.23 \text{ rad/s}^2.$$

La velocità è

$$v = R\dot{\theta}(3) \simeq 3.30 \text{ m/s},$$

L'accelerazione tangenziale è

$$a_t(t) = \frac{dv}{dt} = R\ddot{\theta}(t); \qquad a_t(3) \simeq -0.45 \text{ m/s}^2,$$

e quella radiale è

$$a_r(t) = (\dot{\theta}(t))^2 R; \qquad a_r(3) \simeq 5.45 \text{ m/s}^2,$$

risultati che si possono ricavare anche derivando le equazioni del moto.

Problema 2 (7 punti) Una pallina di acciaio (approssimato da un punto materiale) viene lanciato in direzione orizzontale con velocità $v_0 = 4.3$ m/s dentro un acquario vuoto (una scatola con pareti di vetro) profondo $h = 2.2$ m e largo $a = 20$ cm. La velocità è diretta perpendicolarmente alle pareti dell'acquario e il punto parte vicino ad una parete, in prossimità dell'apertura superiore. L'urto con le pareti è perfettamente elastico e il punto non "prende il giro". Quanti rimbalzi (n) fa con le pareti prima di arrivare sul fondo?

Soluzione: Il moto è dato dalla composizione di una caduta verticale $y = (1/2)gt^2$ più un moto oscillatorio (a velocità in modulo costante) orizzontale.

Il tempo T necessario ad arrivare sul fondo è

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \simeq 0.67 \text{ s}.$$

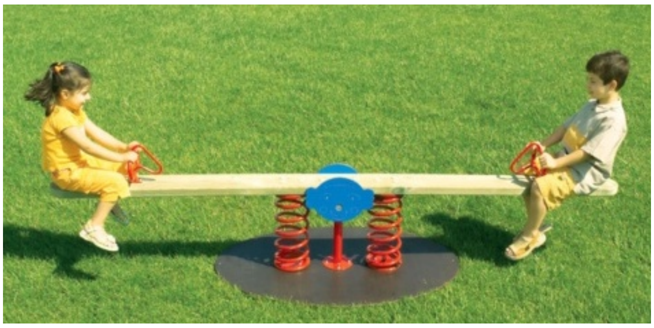
Durante tale periodo avrebbe percorso un tratto

$$x = v_0 T \simeq 2.88 \text{ m}.$$

Prendendo la parte intera della divisione di x per a otteniamo n:

$$n = \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = 14.$$

Problema 3 (8 punti) Un "bilico" (tipo bilancia a due bracci) per parco giochi è schematizzabile come una tavola di massa $M = 20$ kg, lunga $L = 4$ m e larga $a = 20$ cm, spessore trascurabile. La tavola è imperniata nel suo centro, e agli estremi siedono due bambini di massa $m = 30$ kg l'uno. Alla tavola, ad una distanza $d = 40$ cm dal perno sono attaccate due molle di costante elastica K e di lunghezza a riposo tale che quando la tavola è orizzontale le molle non esercitano forza (l'altro estremo delle molle è fisso al suolo). Sapendo che il periodo T della piccole oscillazioni del sistema (nel limite di piccoli angoli) è $T = 2$ s determinare K.



Soluzione: Quando la tavola è inclinata di un angolo θ rispetto all'orizzontale, le molle sono compresse di un tratto $h = d\sin(\theta) \simeq d\theta$. Il momento della forza esercitata da ogni molla è

$$\mu \simeq Kd^2\sin(\theta)\cos\theta \simeq Kd^2\theta.$$

La seconda cardinale per il sistema dà

$$I\ddot{\theta} = -2\mu = -2Kd^2\theta$$

dove $I = ML^2/12 + 2mL^2/4 \simeq 266.67 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ è il momento d'inerzia del sistema bilico più bambini.

L'equazione è quella di un oscillatore armonico

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$$

con

$$\omega = \sqrt{\frac{2Kd^2}{I}},$$

e quindi un periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{2Kd^2}}.$$

da cui

$$K = \frac{2I\pi^2}{d^2T^2} \simeq 8224.67 \text{ N/m}.$$

Problema 4 (7 punti) Si vuole analizzare il trucco di far saltare una moneta in un barattolo soffiando:

Assumendo che la massima velocità del soffio umano (senza guide tipo cannucce) sia $v = 10$ m/s, calcolare

- Il massimo spessore h_{Fe} di una moneta in ferro (tipo i centesimi di Euro) che si riesce a sollevare.

- Il massimo spessore h_{Al} di moneta di alluminio (tipo lo yen giapponese) che si riesce a sollevare.

La pressione atmosferica è $P_a = 10^5$ Pa, la densità dell'aria è $\rho = 1.225$ kg/m^3, la densità ρ_{Fe} del ferro è circa 7 volte quella dell'acqua mentre quella ρ_{Al} dell'alluminio è circa 2.7 volte quella dell'acqua.

Soluzione: La legge di Bernoulli senza differenza di altezza dice che

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const.},$$

dove P è la pressione, ρ la densità dell'aria e v la sua velocità.

Sul lato inferiore della moneta $P_0 = 10^5 Pa$, quindi la pressione sulal faccia superiore è

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho_a v^2 = P_0$$

ovvero abbiamo una differenza di pressione $\Delta P = P_0 - P_1 = \frac{1}{2}\rho v^2$.

La forza è $F = \Delta P \cdot S$, dove S è la superficie della moneta. Uguagliando tale forza al peso della moneta abbiamo

$$\Delta P \cdot S = mg = \rho_m S h g$$

dove ρ_m è la densità del materiale di cui è fatta la moneta. Da qui

$$h = \frac{\Delta P}{\rho_m g} = \frac{\rho v^2}{2\rho_m g}$$

e sostituendo i valori abbiamo

$$h_{Fe} = \frac{\rho v^2}{2\rho_{Fe} g} \simeq 0.89 \text{ mm},$$

e

$$h_{Al} = \frac{\rho v^2}{2\rho_{Al} g} \simeq 2.31 \text{ mm},$$

abbastanza in linea con i dati sperimentali.

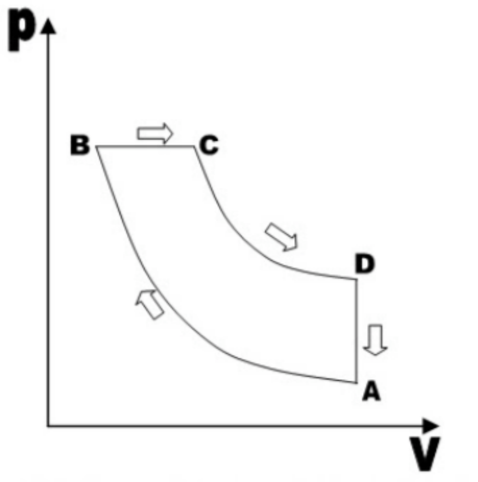
Problema 5 (7 punti) Una macchina termodinamica è formata da 2 moli di gas perfetto monoatomico che eseguono il ciclo di trasformazioni reversibili seguenti:

- Compressione adiabatica (A-B);

- Riscaldamento a pressione costante (B-C);

- Espansione adiabatica (C-D);

- Raffreddamento a volume costante (D-A).



Sapendo che il rapporto fra le temperature $T_D/T_C = 1/3$ e che $T_B/T_C = 1/2$, determinare:

- Il rapporto T_A/T_D

- Il rendimento η.

Suggerimento: usare le variabili T e V.

Soluzione: Dalla isobara $P_B = P_C$ abbiamo che $T_B/T_C = V_B/V_C = 1/2$.

Conviene procedere usando temperature e volumi per le adiabatiche, $TV^{\gamma-1} = \text{const.}$. Abbiamo

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

e dato che $V_A = V_D$ si può anche scrivere

$$T_A V_D^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}.$$

Dall'altra adiabatica abbiamo

$$T_D V_D^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}.$$

da cui

$$\frac{T_A}{T_D} = \frac{T_B}{T_C}\left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma} \simeq 0.315.$$

Nella compressione adiabatica A-B il lavoro L_{AB} è uguale alla variazione di energia interna

$$L_{AB} = -nc_V(T_B - T_A).$$

Nell'espansione isobara B-C il lavoro è $L_{BC} = P(V_C - V_A) = nR(T_C - T_A)$.

Nella compressione adiabatica C-D il lavoro è

$$L_{CD} = nc_V(T_C - T_D).$$

e nella trasformazione isocora no c'è lavoro. Quindi

$$\begin{aligned} L &= L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} \\ &= n\left(c_V(T_A - T_B) + R(T_C - T_B) + c_V(T_C - T_D)\right) \end{aligned}$$

Sfruttando il fatto che $c_P = c_V + R$ si può scrivere

$$L = n\left(c_P(T_C - T_B) + c_V(T_A - T_D)\right).$$

Il calore viene assorbito nella trasformazione $B - C$

$$Q_{BC} = nc_p(T_C - T_B)$$

quindi

$$
\begin{aligned}
\eta &= \frac{L}{Q_{BC}} \\
&= \frac{c_P(T_C - T_B) + c_V(T_A - T_D)}{c_p(T_C - T_B)} \\
&= 1 - \frac{c_V}{c_P}\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} \\
&= 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{T_D}{T_C}\left(\frac{1 - T_A/T_D}{1 - T_C/T_B}\right)
\end{aligned}
$$

e sostituendo i valori conosciuti si ottiene

$$
\eta = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma}\right) \simeq 0.726
$$

NOTE

Istruzioni. Scrivere nome, cognome e matricola nell'ultima pagina (e lasciarla possibilmente bianca). Indicare chiaramente quale domanda viene trattata.

Per ogni domanda scrivere succintamente la strategia che si intende seguire (indicando le leggi fisiche usate) e dare la soluzione analitica (con i simboli) e quella numerica (con le unità di misura). In assenza delle indicazioni della strategia usata l'esercizio sarà nullo.

Consegnare solo la bella copia, marcando chiaramente le parti che non devono essere considerate. Trattenere la brutta copia o comunque appuntarsi i risultati per confrontarli con la soluzione (Moodle).

Valutazione. Viene valutato l'aver indicato correttamente le leggi usate, la derivazione analitica, il risultato analitico e numerico corretto. **Se è presente il solo risultato analitico o numerico l'esercizio non viene considerato valido.** ATTENZIONE: gli errori numerici non sono considerati errori gravi a meno che non siano facilmente riconoscibili dall'analisi dimensionale o da valori particolari dei parametri (per esempio se per una scelta dei parametri un risultato viene assurdo o zero senza che sia fisicamente giustificato). Anche per questo, aspettate a sostituire i valori numerici alla fine.

Alcune grandezze utili. Accelerazione di gravità: $g = 9.8$ m/s^2. Momento di inerzia baricentrale di un cilindro di raggio R e massa M: $I_G = (1/2)MR^2$. Momento di inerzia baricentrale di un'asta omogenea di lunghezza L e massa M: $I_G = (1/12)ML^2$. Costante dei gas $R = 8.3$ J/mol K. Conversione calorie-joule: 1 kcal = 4184 J. Pressione atmosferica $P_a = 10^5$ Pa. Calore specifico molare di un gas monoatomico $c_V = (3/2)R$, di un gas biatomico $c_V = (5/2)R$. Densità dell'acqua $\rho_a \simeq 1000$ kg/m^3.

Suggerimenti. LEGGERE ACCURATAMENTE E RILEGGERE IL TESTO DEL PROBLEMA. Attenzione alla conversione tra unità (equivalenze). I problemi possono contenere dati che non servono per trovare la soluzione. Di solito esistono più modi per arrivare alla soluzione. FARE IL DISEGNO del problema, in maniera più accurata possibile e magari da più punti di vista, e disegnare i diagrammi temporali delle componenti della traiettoria ($x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$...).