Appunti di geometria analitica dello spazio

di Fabio Maria Antoniali

– versione del 23 maggio 2017 –

1 Un po' di teoria

1.1 Vettori e punti

1.1.1 Componenti cartesiane e vettoriali

Fissato nello spazio un riferimento cartesiano $Oxyz$, un vettore $\vec{v}$ può essere espresso sia in termini di componenti cartesiane (o coordinate)

$$\vec{v} = (v_x,\, v_y,\, v_z),$$

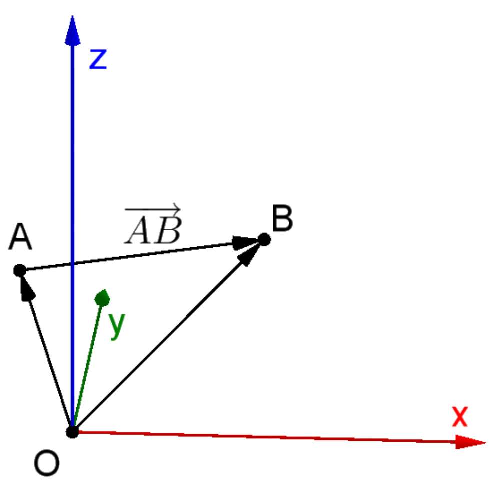
o di componenti vettoriali

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z},$$

ove $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ indicano i versori degli assi cartesiani (ovvero vettori di modulo unitario aventi verso e direzione concordi agli assi cartesiani).

Se viene assegnata una coppia di punti A e B, si indica con $\overrightarrow{AB}$ il vettore che ha: direzione la retta AB, verso da A a B e modulo la lunghezza del segmento AB. Le componenti cartesiane di tale vettore dipendono dalle coordinate dei punti A e B secondo la relazione

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\, y_B - y_A,\, z_B - z_A)$$



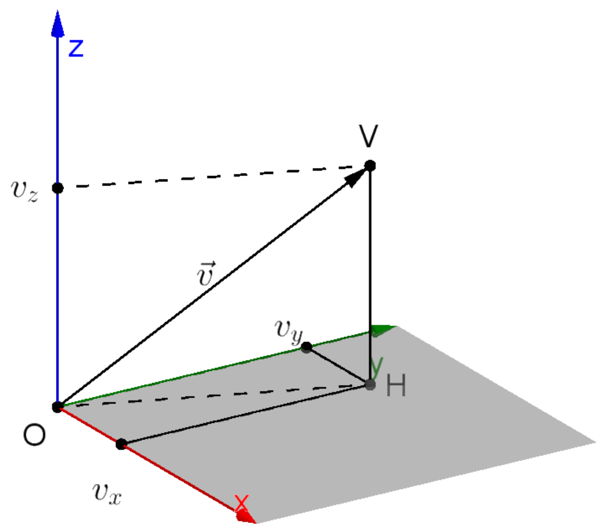
Si osservi che, con la notazione appena introdotta, sussiste la seguente relazione vettoriale

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Il vettore $\overrightarrow{OP}$, che ha come componenti cartesiane le coordinate del punto P, in fisica viene solitamente chiamato *vettore posizione* o, talvolta, *raggio vettore*.

Il modulo di un vettore $\vec{v}$ viene indicato con il simbolo v ed è facilmente calcolabile note le componenti cartesiane con la seguente formula (facilmente dimostrabile utilizzando il *Teorema di Pitagora*):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

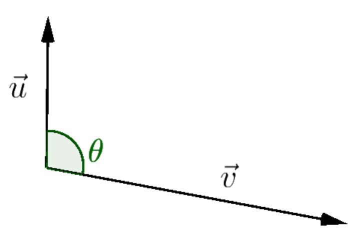


1.1.2 Prodotto scalare

Si definisce *prodotto scalare* di due vettori **non nulli** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ il numero reale

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = uv \cos\theta$$

ove θ è l'angolo convesso formato dai vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Si osservi che il prodotto scalare tra due vettori non nulli è:

- **nullo** se i due vettori sono ortogonali;
- **massimo** (uv) se i vettori sono paralleli ed equiversi;

- **minimo** $(-uv)$ se i vettori sono paralleli e non equiversi.

Il prodotto scalare non dipende quindi dal particolare riferimento cartesiano utilizzato per assegnare le coordinate. Tuttavia, note le coordinate dei vettori è possibile calcolare il prodotto scalare con al seguente formula (che non viene qui dimostrata):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

Note le coordinate dei vettori è quindi possibile calcolare l'angolo da essi formato utilizzando la relazione:

$$\cos\theta = \frac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{uv}$$

In particolare, la **condizione di perpendicolarità** può essere espressa come segue:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \longleftrightarrow \quad u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0, \tag{1}$$

La **condizione di parallelismo** richiede invece la proporzionalità dei vettori :

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \quad \longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R} \; : \vec{u} = k\vec{v} \tag{2}$$

ovvero delle rispettive componenti:

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \quad \longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R} \; : u_x = kv_x, \ldots, u_z = kv_z.$$

In particolare, se **tutte** le componenti dei vettori sono non nulle, allora

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y} = \frac{u_z}{v_z}.$$

1.2 Retta e piano

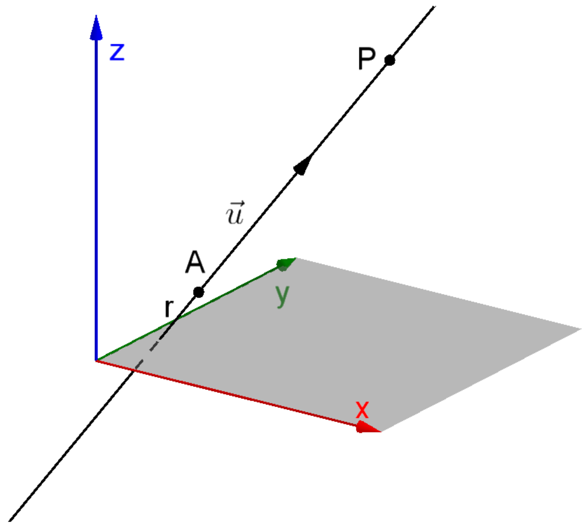
1.2.1 Le equazioni parametriche della retta

Una retta è definita in modo univoco quando viene assegnato un suo punto $A(x_0, y_0, z_0)$ e una direzione data, ovvero un vettore non nullo $\vec{u}$. Un punto $P(x, y, z)$ appartiene ad una retta r passante per A con direzione $\vec{u}$ se e solo se il vettore $\overrightarrow{AP}$ è parallelo a $\vec{u}$. In considerazione della (2), ciò equivale ad ammettere l'esistenza di $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$\overrightarrow{AP} = k\vec{u},$$

da questa relazione, in termini di coordinate, si ottiene che

$$x - x_0 = ku_x, \ldots, z - z_0 = ku_z.$$



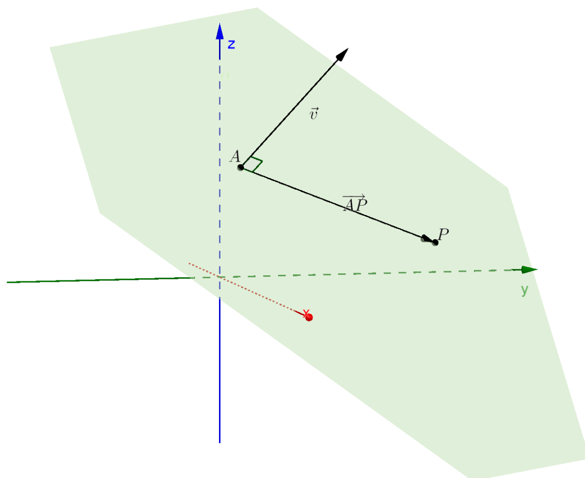
È quindi possibile descrivere le coordinate del generico punto P della retta attraverso le seguenti **equazioni parametriche**:

$$\begin{cases} x = x_0 + ku_x \\ y = y_0 + ku_y \\ z = z_0 + ku_z, \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pertanto le equazioni parametriche di una retta individuano sempre un punto della retta e una direzione parallela alla retta stessa.

1.2.2 Equazione cartesiana del piano

Consideriamo ora un piano α passante per un punto $A(x_0, y_0, z_0)$. Sia ora $\vec{v}_\alpha = (a, b, c)$ un qualunque vettore non nullo ortogonale al piano α. Se $P(x, y, z)$ è un arbitrario punto di α, allora il vettore $\overrightarrow{AP}$, che individua una direzione all'interno del piano, dovrà essere ortogonale al vettore $\vec{v}_\alpha$.



Ricordando la condizione di perpendicolarità (1), si avrà dunque che

$$P \in \alpha \quad \longleftrightarrow \quad \vec{v}_\alpha \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

L'equazione cartesiana del piano α passante per $A(x_0,\, y_0,\, z_0)$ e ortogonale a $\vec{v}_\alpha = (a,\, b,\, c)$ è quindi:

$$\alpha : \; a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

L'equazione cartesiana di un piano è perciò esprimibile nella seguente *forma generale*:

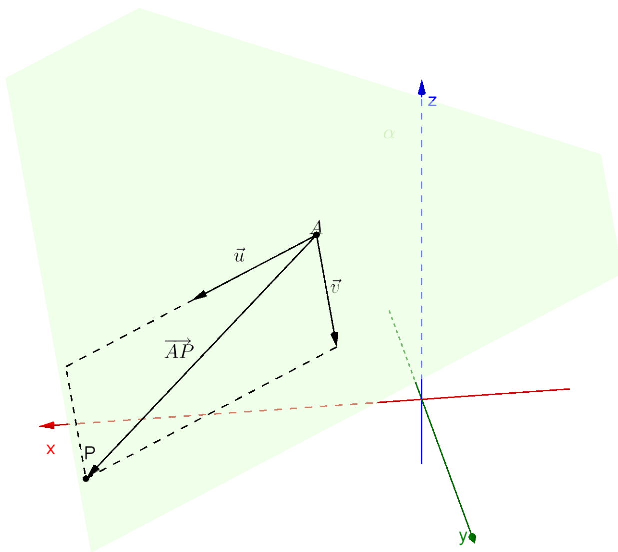
$$\alpha : \; ax + by + cz + d = 0,$$

ove la terna di coefficienti $(a,\, b,\, c)$, non tutti simultaneamente nulli, individua un vettore $\vec{u}_\alpha$ ortogonale al piano, mentre il quarto coefficiente d può essere ricondotto ad una eventuale traslazione del piano rispetto all'origine del riferimento cartesiano.

1.2.3 Equazioni parametriche del piano

Assegnato un punto $P(x_0,\, y_0,\, z_0)$ e due vettori non paralleli $\vec{u}$ e $\vec{v}$, esiste un unico piano α passante che contiene le rette passanti per A con direzioni $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Un punto $P(x,\, y,\, z)$ appartiene al piano α se e solo se esistono due scalari t e k tali per cui

$$\overrightarrow{PA} = t\vec{u} + k\vec{v},$$



Dalla precedente relazione, in termini di coordinate, si ottiene che

$$x - x_0 = tu_x + kv_x, \ldots, z - z_0 = tu_z + kv_z.$$

È quindi possibile descrivere le coordinate del generico punto Q del piano attraverso le seguenti **equazioni parametriche**:

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_x + kv_x \\ y = y_0 + tu_y + kv_y \\ z = z_0 + tu_z + kv_z, \qquad \text{con } t,\, k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pertanto le equazioni parametriche di un piano individuano sempre un punto del piano e due direzioni (tra loro non parallele) all'interno dello stesso piano.

1.2.4 Formula distanza punto-piano

Dato un piano $\alpha:\ ax + by + cz + d = 0$ e un punto $P(x_0,\, y_0,\, z_0)$, la distanza tra punto e piano è data dalla formula

$$d(P,\, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

La dimostrazione è abbastanza agevole. Si consideri innanzitutto la retta h passante per P ed ortogonale al piano α, le cui equazioni parametriche sono:

$$(x,\, y,\, z) = (x_0,\, y_0,\, z_0) + k(a, b, c).$$

Imponendo che il generico punto H della retta h appartenga al piano α si ottiene la relazione

$$a(ka + x_0) + b(kb + y_0) + c(kc + z_0) + d = 0,$$

da cui si ottiene che il parametro k deve soddisfare

$$k = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

La distanza cercata è il modulo del vettore $\overrightarrow{PH}$, quindi

$$\overline{PH} = |k(a, b, c)| = |k| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \\ = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1.2.5 Posizione di retta e piano

Siano dati un piano α e una retta r, e siano rispettivamente $\vec{u}_\alpha$ e $\vec{u}_r$ i vettori perpendicolare al piano α e parallelo alla retta r. Allora è facile comprendere che

$$r \parallel \alpha \quad \longleftrightarrow \quad \vec{u}_r \perp \vec{u}_\alpha$$

e

$$r \perp \alpha \quad \longleftrightarrow \quad \vec{u}_r \parallel \vec{u}_\alpha$$

Inoltre, nel caso in cui la retta r sia obliqua al piano α (ovvero la retta è incidente ma non perpendicolare al piano) l'angolo θ formato tra retta e piano (cioè l'angolo acuto formato dalla retta r e la sua proiezione sul piano) è il complementare dell'angolo acuto formato dalla retta r e dalla perpendicolare al piano condotta per il punto di incidenza, pertanto

$$\sin\theta = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\alpha|}{u_r u_\alpha}.$$

1.2.6 Posizione di due rette

Date due rette distinte r e s, con direzioni rispettivamente $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_s$, tali rette possono essere complanari, cioè entrambe contenute in un qualche piano, oppure non complanari.

Le rette complanari possono essere di due tipi: **incidenti**, cioè rette che hanno un punto in comune, oppure **parallele**, rette i cui vettori direzione sono paralleli:

$$r, s \subseteq \alpha \quad \longleftrightarrow \quad \vec{u}_r \parallel \vec{u}_s \quad \text{o} \quad r \cap s = P.$$

Rette non complanari si dicono **sghembe**. Tali rette sono quindi caratterizzate dal fatto che

- le rette non hanno punti in comune,
- i vettori direzione non sono paralleli.

L'angolo (acuto o retto) θ formato da due rette incidenti è chiaramente quello (acuto o retto) formato dalle due direzioni, quindi

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{u_r u_s}.$$

In particolare due rette incidenti sono ortogonali quando

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = 0.$$

1.2.7 Posizione di due piani

Due piani distinti α e β, con direzioni ortogonali rispettivamente $\vec{u}_\alpha$ e $\vec{u}_\beta$, possono essere paralleli o incidenti.

In particolare

$$\alpha \parallel \beta \quad \longleftrightarrow \quad \vec{u}_\alpha \parallel \vec{u}_\beta.$$

L'angolo θ (acuto o retto) formato da due piani incidenti, coincide con quello (acuto o retto) formato dalle due direzioni ortogonali ai piani, quindi

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u}_\alpha \cdot \vec{u}_\beta|}{u_\alpha u_\beta}.$$

In particolare, due piani incidenti sono ortogonali quando

$$\vec{u}_\alpha \cdot \vec{u}_\beta = 0.$$

2 Esercizi vari

2.1 Equazioni parametriche e cartesiane di retta e piano

2.2 Da equazioni parametriche a cartesiane

Es. 1 *Determina le equazioni cartesiane della retta di equazioni parametriche* $r:\ (x,\, y,\, z) = (1,\, 2,\, 0) + k(3,\, 1,\, -1)$, *con* $k \in \mathbb{R}$.

Eliminando il parametro dalle equazioni parametriche di r si ottiene

$$\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2 + k \\ z = -k \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} [k = -z] \\ x = 1 + 3(-z) \\ y = 2 + (-z) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3z \\ y = 2 - z \end{cases}$$

Pertanto le equazioni cartesiane della retta sono

$$r:\ \begin{cases} x = 1 - 3z \\ y = 2 - z \end{cases} .$$

Ricavando il parametro da una delle altre due equazioni si ottengono altre possibili equazioni cartesiane, che corrispondono a differenti coppie di piani che si intersecano in r. Va detto che essendo infiniti i piani passanti per r, sono anche infinite le forme in cui si possono presentare le equazioni cartesiane di una data retta.

Es. 2 *Determina le equazioni cartesiane del piano di equazioni parametriche*

$$\alpha:\ \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + k + t \\ z = -k + t, \quad k,\, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Per trovare l'equazioni cartesiane si devono eliminare i due parametri e si trova

$$\begin{cases} [t = z + k] \\ x = 1 - 2(z + k) \\ y = 2 + k + z + k \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} [t = z + k] \\ [2k = 1 - x - 2z] \\ y = 2 + z + 1 - x - 2z \end{cases} \longleftrightarrow x + y + z - 3 = 0.$$

Pertanto l'equazione cartesiana del piano in forma generale è $\alpha:\ x+y+z-3 = 0$.

2.3 Da equazioni cartesiane a parametriche

Es. 3 *Determina le equazioni parametriche della retta*

$$r: \begin{cases} x = 1 - 3z \\ y = 2 - z \end{cases} .$$

Per descrivere il luogo geometrico in esame è necessario un solo parametro k. Imponendo, ad esempio, $y = k$ si trova che

$$\begin{cases} x + 3z = 1 \\ z = 2 - k \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3z = 1 - 6 + 3k \\ z = 2 - k \end{cases} .$$

Pertanto le equazioni parametriche sono:

$$r: \begin{cases} x = -5 + 3k \\ y = k \\ z = 2 - k, \quad k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Scelte differenti di assegnazione del parametro portano ovviamente a diverse equazioni parametriche.

Es. 4 *Determina le equazioni parametriche del piano* $\alpha: \ x + y + z - 3 = 0.$

Per descrivere il luogo geometrico in esame è necessario una coppia di parametri parametri k e t. Imponendo, ad esempio, $y = k$ e $z = t$ si trova che

$$\begin{cases} x = 3 - y - z = 3 - k - t \\ y = k \\ z = t \end{cases}$$

Pertanto le equazioni parametriche di α sono:

$$\alpha: \begin{cases} x = 3 - k - t \\ y = k \\ z = t, \quad k, t \in \mathbb{R}. \end{cases} .$$

Scelte differenti di assegnazione dei due parametri portano ovviamente a diverse equazioni parametriche.

2.4 Esercizi riguardanti retta e piani

2.4.1 Rette e piani definiti da condizioni di appartenenza e direzione

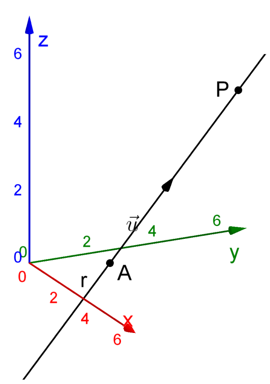
Es. 5 *Trovare le equazioni parametriche della retta r passante per il punto $A(1,\, 2,\, 0)$ con direzione $\vec{u}(2,\, 1,\, 3)$.*

Un punto $P(x,\, y,\, x)$ appartiene alla retta r se e solo se i vettori $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{u}$ sono proporzionali, ovvero esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{AP} = k\vec{u}$, relazione che in coordinate può scriversi nella forma

$$(x-1,\, y-2,\, z-0) = k(2,\, 1,\, 3).$$

Le equazioni parametriche di r sono quindi

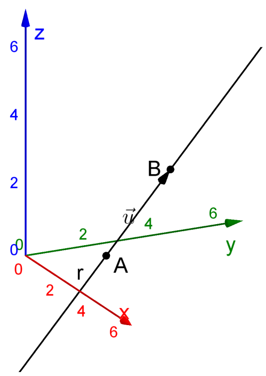
$$r:\ \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 + k \\ z = 3k, \quad k \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Es. 6 *Trovare le equazioni parametriche della retta r passante per i punti $A(1,\, 2,\, 0)$ e $B(3,\, 3,\, 3)$.*

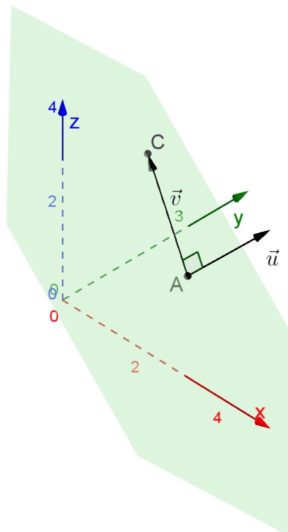
Il vettore direzione della retta è $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3-1,\, 3-2,\, 3-0) = (2,\, 1,\, 3)$. L'esercizio si conclude quindi come il precedente, giungendo alle seguenti equazioni parametriche di r sono quindi

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 + k \\ z = 3k, \quad k \in \mathbb{R} \end{cases}$$



2.4.2 Rette e piani definiti tramite condizioni di parallelismo e perpendicolarità

Es. 7 *Trovare le equazioni cartesiane del piano* α *passante per il punto* $A(1,\,2,\,0)$ *ortogonale alla direzione* $\vec{u}(1,\,1,\,1)$.



Un punto $P(x,\, y,\, x)$ appartiene al piano α se e solo se il vettori $\overrightarrow{AP}$ è ortogonale a $\vec{u}$, ovvero se

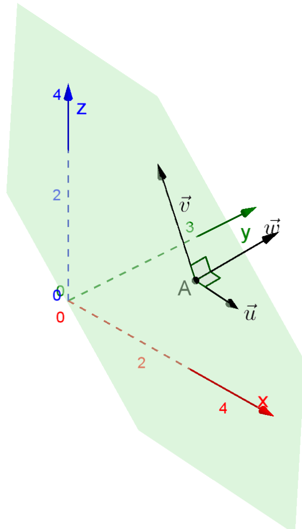
$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0,$$

da cui si ottiene

$$(x-1, y-2, z-0) \cdot (1, 1, 1) = 0 \longleftrightarrow x-1+y-2+z = 0 \longleftrightarrow x+y+z-3 = 0.$$

Dunque il piano ha equazione cartesiana $\alpha :\ x + y + z - 3 = 0$.

Es. 8 *Trovare le equazioni del piano* α *passante per il punto* $A(1,\, 2,\, 0)$ *con direzioni* $\vec{u}(0,\, 1,\, -1)$ *e* $\vec{v}(-2,\, 1,\, 1)$.



Le equazioni parametriche sono di immediata determinazione, infatti un punto $P(x,\, y,\, x)$ appartiene al piano α se e solo se esistono due scalari $t,\, k \in \mathbb{R}$ tali per cui $\overrightarrow{AP} = k\vec{u} + t\vec{v}$, ovvero

$$(x-1,\, y-2,\, z-0) = k(0,\, 1,\, -1) + t(-2,\, 1,\, 1).$$

Le equazioni parametriche del piano sono quindi:

$$r:\ \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + k + t \\ z = -k + t, \quad k,\, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Per trovare l'equazioni cartesiane si devono eliminare i due parametri e si trova

$$\begin{cases} [t = z + k] \\ x = 1 - 2(z+k) \\ y = 2 + k + z + k \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} [t = z + k] \\ [2k = 1 - x - 2z] \\ y = 2 + z + 1 - x - 2z \end{cases} \longleftrightarrow x + y + z - 3 = 0.$$

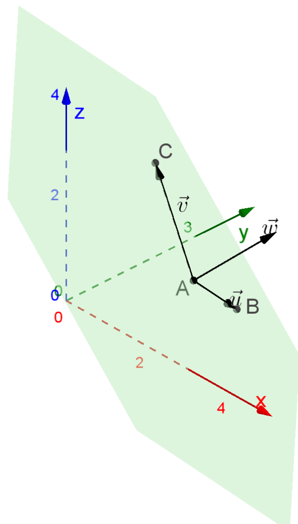
In alternativa si può cercare un vettore $\vec{w}(a,\, b,\, c)$ che risulta ortogonale ad entrambi $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ovvero tale che $(a,\, b,\, c)\cdot(0,\, 1\, -1) = 0$ e $(a,\, b,\, c)\cdot(-2,\, 1,\, 1) = 0$, ottenendo il sistema

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ -2a + b + c = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a = b \end{cases},$$

che ammette come soluzione particolare $\vec{w}(1,\ 1,\ 1)$, per cui il piano ha equazione

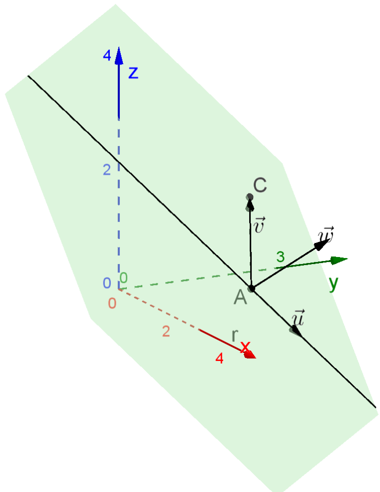
$$(x-1, y-2, z-0)\cdot(1,1,1) = 0 \longleftrightarrow x-1+y-2+z = 0 \longleftrightarrow x+y+z-3 = 0.$$

Es. 9 *Trovare le equazioni del piano α passante per i punti $A(1,\ 2,\ 0)$ con direzioni $B(1,\ 3,\ -1)$ e $\vec{v}(-1,\ 3,\ 1)$.*



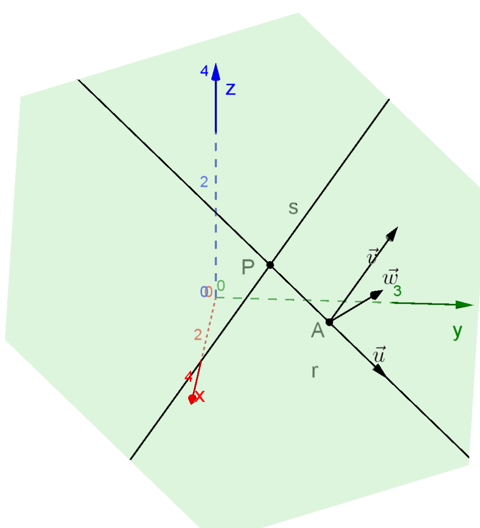
Indicati i vettori direzione $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(0,\ 1,\ -1)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}(-2,\ 1,\ 1)$, il problema è ricondotto all'esercizio precedente. È possibile anche considerare l'equazione generale $ax + by + cz + d = 0$ e imporre le tre condizioni di passaggio. si ottiene un sistema a tre equazioni e quattro incognite, indeterminato. Scelta la soluzione per $a = 1$, si ottengono $b = c = 1$ e $d = -3$.

Es. 10 *Trovare le equazioni del piano α passante per la retta $r : (x,\ y,\ z) = (1,\ 2,\ 0) + k(0,\ 1,\ -1)$ e il punto $C(-1,\ 3,\ 1)$.*



Si considera il punto di r per $k = 0$, cioè $A(1,\,2,\,0)$. Indicato con $\vec{u} = (0,\,1,\,-1)$ il vettore direzione di r e con $\vec{v} = \overrightarrow{AC}(-2,\,1,\,1)$, il problema si riconduce a determinare il piano per un punto A con direzioni $\vec{u}$ e $\vec{v}$, già studiato in un esercizio precedente.

Es. 11 *Trovare le equazioni del piano α individuato dalle rette incidenti r : $(x,\,y,\,z) = (1,\,2,\,0) + k(0,\,1,\,-1)$ e s : $(x,\,y,\,z) = (1,\,1,\,1) + t(-2,\,1,\,1)$.*



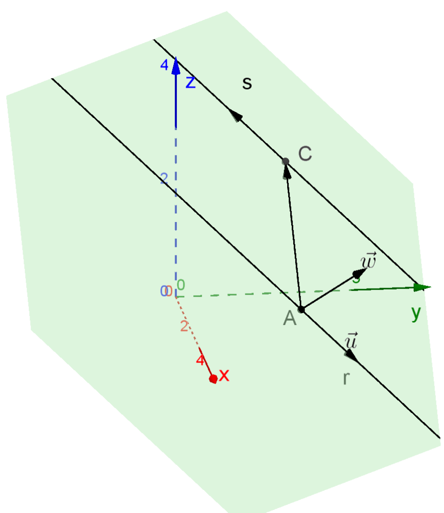
Si verifica innanzitutto che le rette sono secanti mettendo a sistema le equazioni parametriche. Il sistema che si ottiene ha tre equazioni con due incognite:

$$\begin{cases} 1 = 1 - 2t \\ 2 + k = 1 + t \\ -k = 1 + t \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ k = -1 \\ k = -1 \end{cases}$$

pertanto le rette si tagliano nel punto $P(1,\,1,\,1)$.

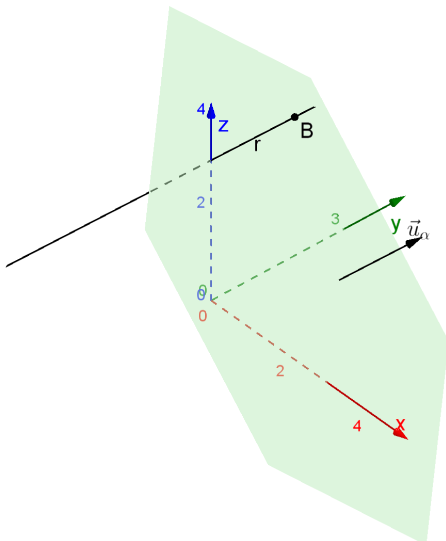
Per generare il piano si possono quindi usare un punto qualunque su una delle due rette, ad esempio $A(1,\,2,\,0)$, e le due direzioni $\vec{u}_r(0,\,1,\,-1)$ e $\vec{u}_s(-2,\,1,\,1)$, come nell'esercizio 4.

Es. 12 *Trovare le equazioni del piano α individuato dalle rette parallele $r:\ (x,\,y,\,z) = (1,\,2,\,0) + k(0,\,1,\,-1)$ e $s:\ (x,\,y,\,z) = (-1,\,2,\,2) + t(0,\,-1,\,1)$.*



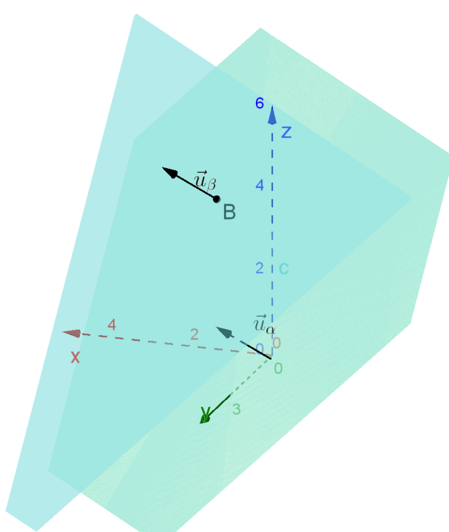
Le rette sono parallele essendo $\vec{u}_r(0,\,1,\,-1) = -\vec{u}_s(0,\,-1,\,1)$. Scegliendo i parametri $t = k = 0$ si trovano i punti $A(1,\,2,\,0)$ e $B(-1,\,2,\,2)$. Indicato con $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-2, 0, 2)$, il piano cercato avrà direzioni $\vec{u}_r$ e $\vec{v}$. Le equazioni parametriche di α si trovano come nell'esercizio 4.

Es. 13 *Trovare le equazioni della retta ortogonale al piano $\alpha:\ x+y+z-3=0$ passante per il punto $B(1,\,1,\,4)$.*



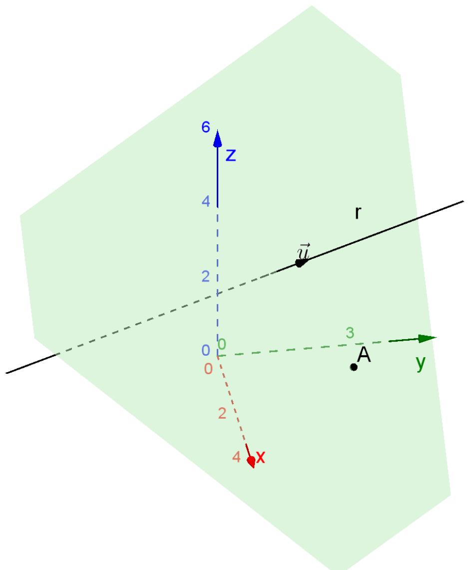
Il vettore $\vec{u}_\alpha(1,\, 1,\, 1)$, essendo ortogonale al piano α, deve essere parallelo alla retta r, le cui equazioni parametriche possono quindi scriversi come $r:$ $(x,\, y,\, z) = (1,\, 1,\, 4) + k(1,\, 1,\, 1)$ con $k \in \mathbb{R}$.

Es. 14 *Trovare le equazioni del piano passante per il punto $B(1,\, 1,\, 4)$ e parallelo al piano $\alpha:\ x + y + z - 3 = 0$.*



Il vettore $\vec{u}_\alpha(1,\, 1,\, 1)$, essendo ortogonale al piano α, deve essere ortogonale anche a β. Dunque l'equazione cartesiana di β è $(x-1, y-1, z-4) \cdot (1, 1, 1) = 0 \longleftrightarrow x + y + z - 6 = 0$.

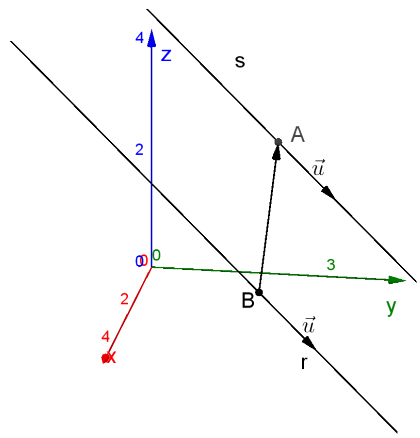
Es. 15 *Trovare le equazioni del piano ortogonale alla retta* $r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + k(1, 1, 1)$ *e passante per il punto* $A(1, 3, 0)$.



Il vettore $\vec{u}_r = (1, 1, 1)$ è chiaramente ortogonale al piano α, che avrà equazione cartesiana:

$$(x-1, y-3, z-0) \cdot (1, 1, 1) = 0 \longleftrightarrow x - 1 + y - 3 + z = 0 \longleftrightarrow x + y + z - 2 = 0.$$

Es. 16 *Trovare le equazioni della retta passante per* $A(-1, 2, 2)$ *e parallela alla retta* $r : (x, y, z) = (1, 2, 0) + k(0, 1, -1)$.



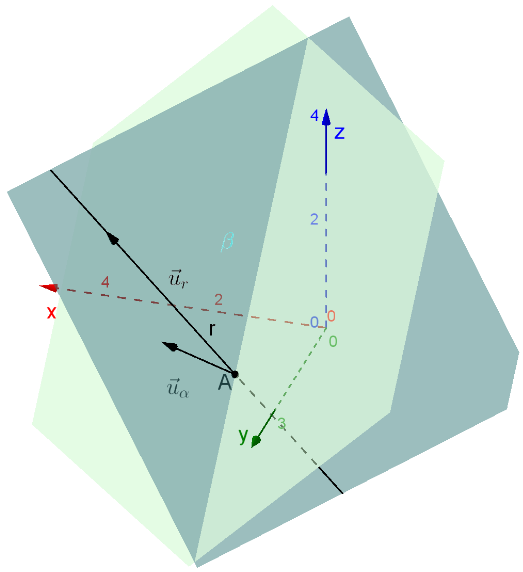
Il vettore $\vec{u}_r = (1,\, 1,\, 1)$ è chiaramente parallelo alla retta s cercata, la cui equazione parametrica sarà:

$$s:\, (x,\, y,\, z) = (-1,\, 2,\, 2) + k(1,\, 1,\, 1).$$

2.4.3 Piani definiti da condizioni di appartenenza e direzioni

2.4.4 Proiezioni ortogonali e altre costruzioni

Es. 17 *Trovare le equazioni del piano contenente la retta* $r\, :\, (x,\, y,\, z) = (1,\, 2,\, 0) + k(2,\, 1,\, 3)$ *e ortogonale al piano* $\alpha :\, x + y + z - 3 = 0$.



Si trova prima il punto di intersezione tra retta e piano mettendo a sistema le equazioni:

$$(1 + 2k) + (2 + k) + (3k) - 3 = 0 \longleftrightarrow 6k = 0 \longleftrightarrow k = 0,$$

pertanto l'intersezione è il punto $A(1,\, 2,\, 0)$.

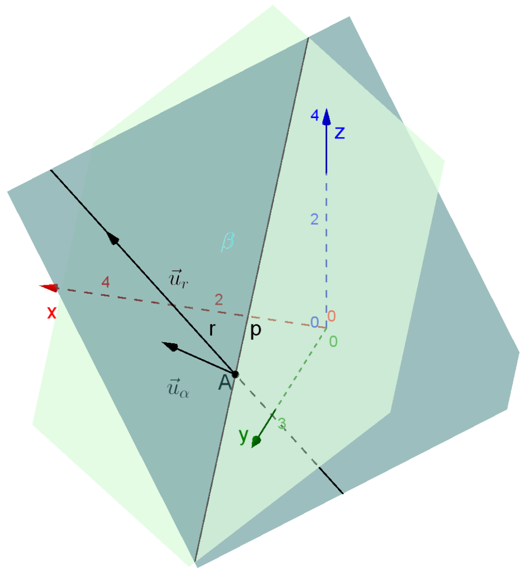
Il piano cercato passa per il punto A e ha direzioni $\vec{u}_\alpha(1,\, 1,\, 1)$ e $\vec{u}_r(2,\, 1,\, 3)$, quindi le sue equazioni parametriche sono:

$$\beta : \begin{cases} x = 1 + t + 2k \\ y = 2 + t + k \\ z = 0 + t + 3, \qquad \text{con } t,\, k \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

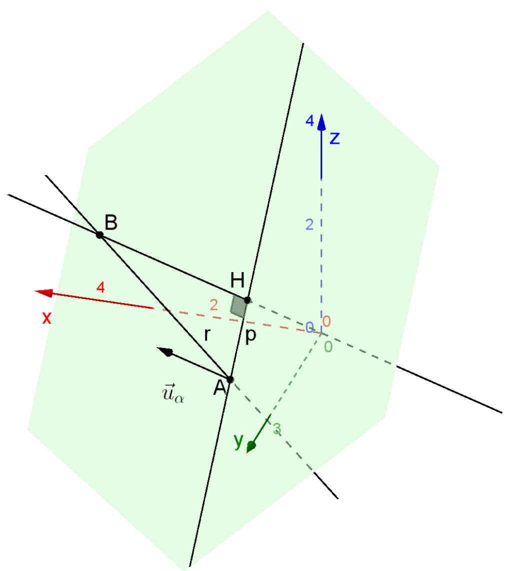
Risolvendo rispetto ai parametri si trova l'equazione cartesiana

$$\beta :\, 2x - y - z = 0.$$

Es. 18 *Trovare le equazioni della retta proiezione ortogonale di* $r :\, (x,\, y,\, z) = (1,\, 2,\, 0) + k(2,\, 1,\, 3)$ *sul piano* $\alpha :\, x + y + z - 3 = 0.$



Si procede come nell'esercizio precedente poiché la retta p cercata è l'intersezione dei due piani: $p = \beta \cap \alpha$. Alternativamente si può procedere come segue.



Si prenda un punto arbitrario sulla retta r, ad esempio, fissato $k = 1$, si trova $B(3,\, 3,\, 3)$- Si considera ora la retta h passante per B ed ortogonale ad α, le cui equazioni sono:

$$h:\ (x,\, y,\, z) = (3,\, 3,\, 3) + k(1,\, 1,\, 1),$$

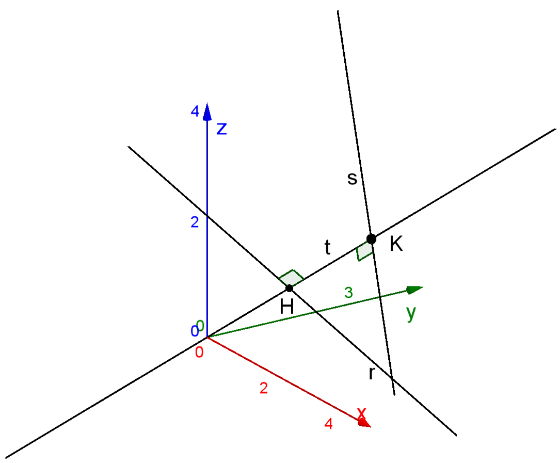
e la si interseca con β, trovando

$$3 + k + 3 + k + 3 + k - 3 = 0 \longleftrightarrow 3k = -6 \longleftrightarrow k = -2.$$

Il punto di intersezione, proiezione di B su α è quindi $H(1, 1, 1)$. La retta p passa pertanto per A e H, dunque ha direzione $\overrightarrow{AH} = (0, -1\,1)$ ed equazione parametrica

$$h : (x, y, z) = (1, 2, 0) + k(0, -1, 1).$$

Es. 19 *Trovare le equazioni della retta ortogonale alle due rette sghembe di* $r : (x, y, z) = (1, 2, 0) + k(0, -1, 1)$ *e* $s : (x, y, z) = (2, 2, 2) + k(-2, 1, 1)$.



Il problema si riconduce a trovare due punti $H \in r$ e $k \in s$ estremi di un segmento perpendicolare ad entrambe le rette, ovvero tali che $\overrightarrow{HK} \cdot \vec{u}_s = 0$ e $\overrightarrow{HK} \cdot \vec{u}_r = 0$. Imponendo le condizioni di cui sopra si ottiene i lsistema

$$\begin{cases} (1 - 2k,\, k + t, 2 + k - t) \cdot (0, -1, 1) = 0 \\ (1 - 2k,\, k + t, 2 + k - t) \cdot (-2, 1, 1) = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} -k - t + k - t + 2 = 0 \\ -2 + 4k + k + t + k - t + 2 = 0 \end{cases} \longleftarrow$$

da cui $H(1, 1, 1)$ e $H(2, 2, 2)$; la retta t cercata ha quindi equazioni

$$t : (x, y, z) = (1, 1, 1) + k(1, 1, 1).$$

2.4.5 Misure di angoli e distanze

Es. 20 *Trova la distanza tra i punti* $A(1,\,2,\,0)$ *e* $B(-2,\,-2,\,5)$.

Si tratta semplicemente di usare la formula della distanza punto-punto:

$$\overline{AB} = \sqrt{(1+2)^2 + (2+2)^2 + (5-0)^2} = 5.$$

Es. 21 *Trova la distanza tra il punto* $A(1,\,2,\,4)$ *e la retta* $r:\ (x,\,y,\,z) = (1,\,2,\,0) + k(0,\,-1,\,1)$.

Il problema equivale a trovare a proiezione H di A su r, cioè il punto tale per cui $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_r = 0$.

Imponendo la condizione di perpendicolarità si ottiene

$$(1-1,\,2-k-2,\,k-4) \cdot (0,\,-1,\,1) = 0 \longleftrightarrow k = 2,$$

quindi $H(1,\,0,\,2)$ e $\overline{AH} = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

Es. 22 *Trova la distanza tra i punto* $A(1,\,2,\,4)$ *e il piano* $\alpha:\ x+y+z-3 = 0$.

Si tratta semplicemente di usare la formula della distanza punto-piano:

$$d = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1+2+4-3|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}.$$

Es. 23 *Trova la misura dell'angolo (acuto) formato dalle due rette incidenti* $r:\ (x,\,y,\,z) = (1,\,2,\,0) + k(0,\,-1,\,-1)$ *e* $s:\ (x,\,y,\,z) = (1,\,2,\,0) + k(-2,\,1,\,2)$.

L'angolo cercato è l'angolo acuto α cercato è l'angolo θ formato dalle direzioni $\vec{u}_r(0,\,-1,\,-1)$ e $\vec{u}_s(-2,\,1,\,2)$ o il suo supplementare, a seconda che θ sia acuto od ottuso. In entrambi i casi vale la relazione

$$\cos\alpha = |\cos\theta| = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{u_r u_s} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

dunque $\alpha = \pi/4$.

Es. 24 *Trova la misura dell'angolo (acuto) formato dai due piani incidenti* $\alpha:\ -y-z-3 = 0$ *e* $\beta:\ -2x+y+2z+3 = 0$.

L'angolo cercato è l'angolo acuto α cercato è l'angolo θ formato dalle direzioni $\vec{u}_\alpha(0,\,-1,\,-1)$ e $\vec{u}_\beta(-2,\,1,\,2)$ o il suo supplementare, a seconda che θ sia acuto od ottuso. In entrambi i casi vale la relazione

$$\cos\alpha = |\cos\theta| = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{u_r u_s} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

dunque $\alpha = \pi/4$.

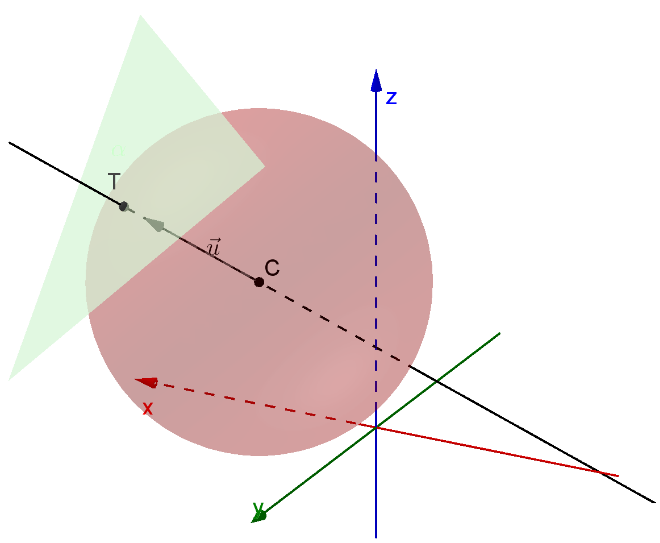
Es. 25 *Trova la misura dell'angolo formato dalla retta* $r : (x, y, z) = (1, 2, 0) + k(2, 1, 3)$ *con il piano* $\alpha : x + y + z - 3 = 0$.

L'angolo α cercato è il complementare dell'angolo acuto formato dalle direzioni $\vec{u}_\alpha(1, 1, 1)$ e $\vec{u}_r(2, 1, 3)$. Pertanto

$$\sin\alpha = |\cos\theta| = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\alpha|}{u_r u_\alpha} = \frac{|2+1+3|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{52}}.$$

2.5 Esercizi riguardanti piano e sfera

Es. 26 *Data la superficie sferica* $\mathcal{S}$ *di centro* $C(1, 1, 2)$ *e raggio* $\sqrt{3}$, *determina nella giacitura* $x + y + z = k$, $k \in \mathbb{R}$ *l'equazione dei due piani tangenti ad* $\mathcal{S}$.



La superficie sferica $\mathcal{S}$ ha equazione cartesiana

$$\mathcal{S} : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 3.$$

La retta h passante per il centro C della sfera e per i punti di tangenza è perpendicolare ai piani della giacitura e quindi parallela al vettore $\vec{u}(1, 1, 1)$, dunque ha equazioni parametriche $t : (x, y, z) = (1, 1, 2) + k(1, 1, 1)$, con $k \in \mathbb{R}$.

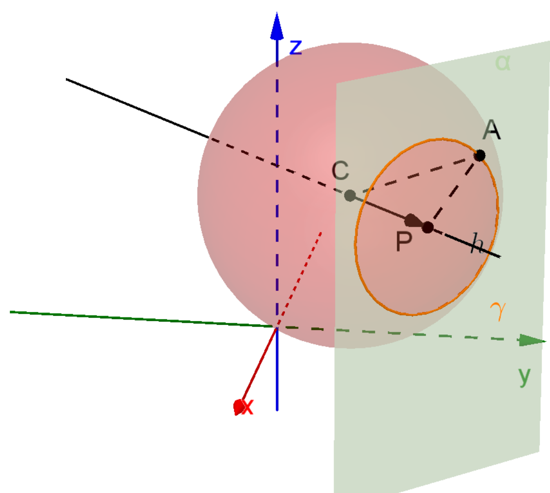
I punti di tangenza si trovano intersecando la retta t con la superficie $\mathcal{S}$, per cui si trova

$$(1+k-1)^2+(1+k-1)^2+(2+k-2)^2=3 \longleftrightarrow 3k^2=3 \longleftrightarrow k=\pm 1.$$

I punti di tangenza sono pertanto $T_1(0,\,0,\,1)$ e $T_2(2,\,2,\,3)$, e i rispettivi piani tangenti

$$\alpha_1 : (x-0)\cdot 1+(y-0)\cdot 1+(z-1)\cdot 1=0, \quad \alpha_2 : (x-2)\cdot 1+(y-2)\cdot 1+(z-3)\cdot 1=0$$

Es. 27 *Data la superficie sferica $\mathcal{S}$ di centro $C(1,\,1,\,2)$ e raggio $\sqrt{3}$, determina le caratteristiche della conica ottenuta sezionando $\mathcal{S}$ con il piano $\alpha : x+y=4$.*



La distanza del piano dal centro della sfera è

$$\mathrm{d}=\frac{|1+1-4|}{\sqrt{1+1+0}}=\sqrt{2}<\sqrt{3},$$

pertanto il piano intersecherà $\mathcal{S}$ in una circonferenza γ. Il centro P di γ dovrà trovarsi sulla retta h perpendicolare ad α e passante per C. Tale retta ha equazioni parametriche $h : (x,\,y,\,z)=(1,\,1,\,2)+k(1,\,1,\,0)$, con $k \in \mathbb{R}$, pertanto intersecandola con α si ottiene

$$k+1+k+1=4 \longleftrightarrow k=1,$$

dunque il punto d'intersezione è $P(2,\,2,\,2)$. Indicato con A un qualunque punto su γ, il triangolo (CAP) risulta rettangolo in P, pertanto

$$\overline{PA}=\sqrt{\overline{CA}^2-\mathrm{d}^2}=\sqrt{3-2}=1.$$

La circonferenza γ nel piano α ha quindi raggio 1 e centro $P(2,\ 2,\ 2)$.