



Corso di Laurea in
Tecnologie Alimentari

Fisica

Federico Tommasi
federico.tommasi@unifi.it



Versione aggiornata al 21-05-2018

Anno 2017/2018

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Galileo Galilei ("Il Saggiatore" - 1623)

Indice

Introduzione	1
Modalità di Esame	2
I Concetti di Base	3
I.1 Il Metodo Scientifico	4
I.1.1 Notazione Scientifica	4
I.1.2 Il Modello Fisico e l'Esperimento	4
I.1.3 Dimensioni e Unità di Misura	5
I.1.4 La Misura	9
I.1.5 Propagazione dell'Errore	12
I.1.6 Cifre Significative	13
I.1.7 Come risolvere un problema di Fisica	13
I.2 Scalari e Vettori	14
I.2.1 Definizioni e operazioni tra vettori	14
I.2.2 Componenti dei vettori	16
I.2.3 Prodotto di un Vettore per uno Scalare	17
I.2.4 Prodotto Scalare	17
I.2.5 Prodotto Vettoriale	18
Esercizi	19
II Cinematica	27
II.1 Moto Rettilineo	28
II.1.1 Posizione, Velocità, Accelerazione	28
II.1.2 Moto Uniformemente Accelerato	31
II.2 Moto in due e tre dimensioni	35
II.2.1 Posizione, Velocità, Accelerazione	35
II.2.2 Moto Circolare Uniforme	37
II.2.3 Moto Piano su Traiettoria Generica	40
II.2.4 Moto Parabolico	41
II.3 Moti Relativi	45
Esercizi	47
III Statica e Dinamica	53
III.1 Le Leggi di Newton	54
III.1.1 Definizione Statica di Forza	54
III.1.2 La Massa Inerziale	55

III.1.3	Prima Legge di Newton	56
III.1.4	Seconda Legge di Newton	57
III.1.5	Terza Legge di Newton	57
III.2	La Forze	58
III.2.1	La Forza Peso	58
III.2.2	Forza Elastica	59
III.2.3	Reazioni Vincolari	60
III.2.4	Forza di Attrito	60
III.3	Il Piano inclinato	61
III.3.1	Il diagramma di corpo libero	63
III.3.2	Sistemi di Riferimento Non Inerziali	66
III.3.3	Forze nel Moto Circolare Uniforme	68
	Esercizi	70
IV	Energia	77
IV.1	Energia Cinetica e Lavoro	78
IV.1.1	Energia Cinetica	78
IV.1.2	Lavoro	78
IV.1.3	Potenza	82
IV.1.4	Esempio del montacarichi	83
IV.2	Energia Potenziale	84
IV.2.1	Campo di Forza ed Energia Potenziale	84
IV.2.2	Forza Conservativa	85
IV.2.3	Energia Meccanica	88
IV.2.4	Punti di Equilibrio	91
IV.2.5	Forze Non Conservative	94
	Esercizi	96
V	Quantità di Moto e Urti	103
V.1	Centro di Massa	104
V.2	Seconda Legge di Newton per sistemi	105
V.3	Quantità di Moto	108
V.3.1	Quantità di Moto per un punto materiale	108
V.3.2	Primo e Secondo Teorema del Centro di Massa	110
V.4	Urti	111
V.4.1	Conservazione della Quantità di Moto durante un urto	111
V.4.2	Urto anelastico	112
V.4.3	Urto elastico	114
	Esercizi	117
VI	Gravitazione	123
VI.1	Storia dell'Astronomia	124
VI.2	Le Leggi di Keplero	126
VI.2.1	Prima Legge di Keplero	127
VI.2.2	Seconda Legge di Keplero	127

VI.2.3	Terza Legge di Keplero	128
VI.3	Legge di Gravitazione Universale	128
VI.3.1	Forza Gravitazionale	128
VI.3.2	Energia Potenziale Gravitazionale	130
VI.3.3	Campo Gravitazionale	132
VI.3.4	Moto dei Satelliti	133
Esercizi	135
VII	Statica e Dinamica dei Corpi Rigidi	139
VII.1	Statica del Corpo Rigido	140
VII.1.1	Corpi Rigidi	140
VII.1.2	Moto di un Corpo Rigido	142
VII.1.3	Momento Torcente	143
VII.1.4	Equilibrio Statico	146
VII.2	Dinamica del Corpo Rigido	149
VII.2.1	Variabili Angolari	149
VII.2.2	Energia Cinetica Rotazionale e Momento di Inerzia	150
VII.2.3	Rotolamento	153
VII.2.4	Momento Angolare	156
VII.2.5	Conservazione del Momento Angolare	159
Esercizi	162
VIII	Fluidi	169
VIII.1	Statica dei Fluidi	170
VIII.1.1	Definizione di Fluido	170
VIII.1.2	Pressione in un Fluido	171
VIII.1.3	Il torchio idraulico	174
VIII.1.4	Misura della Pressione	175
VIII.1.5	Legge di Archimede	176
VIII.2	Dinamica dei Fluidi	177
VIII.2.1	Fluidi ideali in movimento	177
VIII.2.2	Equazione di continuità	177
VIII.2.3	Equazione di Bernoulli	178
VIII.2.4	Effetto Venturi	180
VIII.2.5	Fenomeni superficiali e di capillarità	181
VIII.2.6	Fluidi reali	182
Esercizi	185
IX	Termodinamica	187
IX.1	Calore e Temperatura	189
IX.1.1	Sistema termodinamico	189
IX.1.2	Temperatura ed equilibrio termico	190
IX.1.3	Trasmissione del calore	193
IX.1.4	Calore specifico e calore latente	193
IX.2	Leggi dei Gas	195

IX.2.1	Equazione di stato dei gas perfetti	195
IX.2.2	Energia interna	197
IX.3	Primo principio della Termodinamica	198
IX.3.1	Trasformazioni termodinamiche	198
IX.3.2	Lavoro nelle trasformazioni termodinamiche	199
IX.3.3	Definizione di Primo principio della termodinamica	202
IX.3.4	Trasformazione isoterma	204
IX.3.5	Trasformazione isocora	204
IX.3.6	Trasformazione isobara	205
IX.3.7	Relazione di Mayer	205
IX.3.8	Trasformazione adiabatica	206
IX.3.9	Espansione libera	208
IX.4	Secondo principio della Termodinamica	208
IX.4.1	Macchina termica	208
IX.4.2	Definizione di secondo principio della termodinamica	209
IX.4.3	La macchina di Carnot	212
IX.4.4	Entropia	213
IX.4.5	Entropia e sistemi isolati	216
	Esercizi	220
X	Elettromagnetismo	229
X.1	Elettrostatica	231
X.1.1	La carica elettrica	231
X.1.2	La forza di Coulomb	233
X.1.3	Il campo elettrico	234
X.1.4	Energia potenziale elettrica	235
X.1.5	Il potenziale elettrostatico	236
X.1.6	Il teorema di Gauss	237
X.1.7	Capacità elettrica	241
X.1.8	Dipolo elettrico	242
X.1.9	Dielettrici	242
X.2	Circuiti elettrici	243
X.2.1	Corrente elettrica	243
X.2.2	Forza elettromotrice	246
X.2.3	Energia e Potenza	247
X.2.4	Reti elettriche	247
X.2.5	Resistori in serie e in parallelo	249
X.2.6	Partitore di tensione	250
X.2.7	Condensatori in serie e in parallelo	251
X.3	Magnetismo	252
X.3.1	Fenomeni magnetici	252
X.3.2	Forza di Lorentz	253
X.3.3	Forza su un conduttore percorso da corrente	255
X.3.4	Campo magnetico generato da filo percorso da corrente	258
X.3.5	Legge di Faraday	261

Esercizi	267
XI Ottica	275
XI.1 Onde elettromagnetiche	276
XI.1.1 Equazioni di Maxwell	276
XI.1.2 Caratteristiche delle onde elettromagnetiche	276
XI.1.3 Polarizzazione	279
XI.1.4 Interferenza e diffrazione	280
XI.2 Ottica geometrica	281
XI.2.1 Riflessione e rifrazione	281
XI.2.2 Lenti sottili	284
Esercizi	289
Appendici	I
A Complementi sugli Urti	I
B Dati Astronomici	V
C Momenti di Inerzia	IX
Indice Analitico	XIII

Introduzione al Corso di Fisica per Tecnologie Alimentari

All'interno di queste dispense si trovano tutti gli argomenti trattati a lezione e molti approfondimenti. Gli appunti di lezione risultano molto importanti per sottolineare i concetti fondamentali per superare l'esame scritto e l'esame orale. È stato comunque introdotta, all'inizio di ogni capitolo, una "mini-guida" per chiarire quali sono gli argomenti imprescindibili e a cosa rivolgere particolare attenzione.

Alla fine di ogni capitolo sono presenti diversi esercizi con un relativo coefficiente di difficoltà stimato (espresso in *). Le soluzioni svolte di questi esercizi sono presenti nel relativo documento separato e reperibile su moodle. La risoluzione dei compiti passati (reperibili su moodle) costituisce inoltre un utilissimo esercizio in vista dei compiti futuri.

Di grande utilità può essere l'indice analitico presente in fondo al documento, allo scopo di trovare velocemente nel testo i riferimenti ai più vari concetti. Se visualizzato attraverso un dispositivo elettronico, il presente documento inoltre si comporta da ipertesto, consentendo con un click di collegare e trovare velocemente figure, formule e contenuti dell'indice e dell'indice analitico.

Molti argomenti appresi in questo corso costituiscono dei prerequisiti per altri corsi che affronterete; lacune nei concetti fondamentali di questo corso potrebbero quindi ripercuotersi negli esami successivi. Risulta doveroso inoltre ricordare come, per affrontare questo corso nel modo corretto e meno faticoso, sia importante possedere alcuni prerequisiti di matematica:

- algebra di base
- soluzione di equazioni e disequazioni
- elementi di trigonometria
- proprietà delle principali figure geometriche piane e solide
- calcolo di percentuali
- moltiplicazioni e divisioni semplici senza l'utilizzo della calcolatrice

Tali argomenti non risultano fondamentali solo per il corso di Fisica, ma anche per gli esami successivi e, soprattutto, per un futuro lavoro da tecnologi.

Buon lavoro

Modalità di Esame

L'esame consiste in un compito scritto e in un esame orale. Nel compito scritto sono previste penalità nel caso di errori sulle unità di misura e di vettore posto uguale ad uno scalare, oltre che per testo chiaramente copiato (o lasciato copiare) da un compagno.

Per poter sostenere l'esame orale si deve ottenere la sufficienza (almeno 18) allo scritto. Possono sostenere l'esame orale con riserva anche coloro che hanno ottenuto un punteggio di almeno 15. A meno di emersione di gravi lacune sui prerequisiti o sui concetti basilari, il voto dello scritto costituisce il punteggio di partenza per il voto finale dell'orale. Gli ammessi con riserva sono invitati in maniera particolare ad approfondire e chiarire i concetti fondamentali del corso per poter avere una sufficienza finale (devono infatti ottenere all'orale i punti minimi per arrivare ad almeno 18). Un'esame orale sostenuto in maniera estremamente brillante può fruttare anche fino a 10 punti in più rispetto al voto dello scritto.

Per prenotarsi agli esami fare riferimento sia a Sol che a Moodle, ma prendete quest'ultima piattaforma come riferimento per conoscere le date, i luoghi e gli orari. La prenotazione dell'esame orale viene fatta per una delle date previste presenti su moodle. In caso di mancata iscrizione su Sol (scadenza del periodo di prenotazione), il docente può comunque iscrivervi in qualsiasi momento.

Per le sessioni di giugno e di settembre 2018, è possibile fare lo scritto a giugno e l'orale a settembre. In caso di più compiti provati durante giugno/settembre (e, in generale, durante la stessa sessione), vale il punteggio più alto ottenuto.

Nel foglio dei risultati (pubblicato su moodle) dopo la prova scritta ci saranno dei capitoli o sezioni tra le quali scegliere (solo 1) per portare un argomento a piacere. Se è indicato un capitolo, si può scegliere di parlare in generale oppure di approfondire una sezione all'interno di esso. E' preferibile impostare il discorso con le dimostrazioni, piuttosto che avere un approccio completamente discorsivo. *L'argomento a piacere non esaurisce completamente l'esame*, perché verranno successivamente fatte domande sugli altri argomenti (presi da tutto il corso, dal Capitolo II in poi). Dato che queste domande coinvolgono i concetti fondamentali e non i dettagli delle dimostrazioni, è importante non presentarsi ignorando completamente un argomento.

Infine, verrà chiesto un esercizio riguardante gli argomenti del Capitolo I (operazioni tra vettori e scalari, analisi dimensionale, propagazione dell'incertezza e cifre significative in una misura).

Capitolo I

Concetti di Base

In questo capitolo saranno richiamati alcuni concetti introduttivi che stanno alla base dei capitoli seguenti. Nella Sez. (I.1) verrà discusso il metodo scientifico, l'importanza della misura e come rappresentare una grandezza fisica.

Concetti Fondamentali

Gli argomenti trattati in questo capitolo rivestono un ruolo fondamentale per la comprensione di tutto il corso. In particolare, sia per l'esame scritto che quello orale, è necessario comprendere appieno i seguenti argomenti:

- saper lavorare con la notazione scientifica
- l'analisi dimensionale di grandezze fisiche, sapendo scriverle in termini di dimensioni fondamentali e individuando la corretta unità di misura nel sistema metrico internazionale
- conversioni tra unità di misura
- la propagazione dell'incertezza nella somma, differenza, moltiplicazione e divisione di misure dirette, scrivendo il risultato finale con il corretto numero di cifre significative
- scomposizione di vettori nelle componenti cartesiane
- somma e differenza di vettori
- prodotto di un vettore per uno scalare
- prodotto scalare
- prodotto vettoriale

I.1 Il Metodo Scientifico

I.1.1 Notazione Scientifica

Per esprimere in modo semplice numeri molto grandi o molto piccoli e per rendere più facili i calcoli numerici tra di essi, si usa la *notazione scientifica*, secondo la quale i numeri vengono espressi attraverso delle cifre numeriche moltiplicate per potenze del 10. Ad esempio, un anno luce^[1] corrisponde a circa 9500000000000 di km circa, cioè a 9500 miliardi di chilometri. Grazie alla notazione scientifica questo numero si può esprimere come $9.5 \cdot 10^{12}$ km. Generalmente, si dice che due grandezze differiscono di un ordine di grandezza se tra di loro c'è un rapporto di circa 10.

- *Formato:* $a \cdot 10^\alpha$
dove a è un numero con la virgola e α un numero intero positivo o negativo
- *Elevazione a potenza:* $(a \cdot 10^\alpha)^\beta = a^\beta \cdot 10^{\alpha\beta}$
- *Moltiplicazione e Divisione:*

$$\frac{a \cdot 10^\alpha \cdot b \cdot 10^\beta}{c \cdot 10^\gamma} = \frac{ab}{c} \cdot 10^{\alpha+\beta-\gamma} \quad (\text{I.1})$$

Nella calcolatrice e nei programmi di calcolo questa notazione viene più sinteticamente espressa come:

$$a \cdot 10^\alpha \rightarrow aE\alpha$$

Ad esempio: $3.0 \cdot 10^{-2}$ diventa 3.0E-2. Se queste cifre sono riportate con unità di misura, bisogna ricordarci di scriverle ad ogni passaggio. Spesso in fisica le misure vengono riportate con dei prefissi che indicano una determinata potenza del 10. Generalmente ogni prefisso è tre ordine di grandezza più grande del precedente. In tabella I.1 sono riportati i prefissi più usati.

I.1.2 Il Modello Fisico e l'Esperimento

La Fisica (e la Scienza in generale) si occupa di descrivere ed interpretare i fenomeni che possono essere studiati con il *metodo scientifico*, le cui basi furono poste da Galileo Galilei. Ogni fenomeno naturale viene studiato tramite la creazione di un *modello* che comprende una schematizzazione della realtà. Questa schematizzazione è volta ad analizzare il fenomeno per gradi, concentrandosi in prima istanza sulle cause dominanti e semplificando le caratteristiche delle entità in gioco. Lo studio del modello così costruito permette di individuare le interazioni fondamentali tra i vari enti fisici. Successivamente, altre complicazioni possono essere introdotte come perturbazioni oppure con estensioni vere e proprie al modello se queste sono necessarie ad una descrizione più precisa della realtà.

^[1]Un anno luce è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un anno.

Fattore	Prefisso	Simbolo
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	etto	h
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p

Tabella I.1: Principali prefissi

La *misura*, eseguita tramite una precisa metodologia una volta ideato e realizzato un *esperimento*, serve ad associare un numero con una unità di misura ad ogni ente fisico del modello. Una condizione essenziale è che il risultato della misura sia riproducibile, cioè che il processo di misura nelle stesse condizioni riproduca lo stesso risultato all'interno delle incertezze sperimentali. Quindi, l'osservazione sperimentale introduce delle correlazioni quantitative tra le *grandezze fisiche*. Queste ultime devono a loro volta essere definite in *modo operativo*, cioè attraverso regole precise e universali che consentono di misurarle.

L'organizzazione dei risultati delle osservazioni prendono la forma di *leggi* che governano il fenomeno. Le leggi vengono rappresentate e descritte attraverso relazioni matematiche tra i valori delle grandezze fisiche coinvolte nel modello. Una fondamentale proprietà delle leggi fisiche è quella di avere un carattere *predittivo*, cioè di essere in grado prevedere il risultato che ci attenderemo dall'osservazione di un dato fenomeno.

Infine, la validità della legge è soggetta alla *verifica sperimentale delle previsioni*, cioè nel controllo sperimentale della capacità della legge di prevedere i risultati. In caso di controllo che ha dato esito negativo e in assenza di errori nelle procedure sperimentali, il modello viene posto a revisione.

I.1.3 Dimensioni e Unità di Misura

Il processo di misura può avvenire in maniera diretta, cioè mediante il confronto diretto tra grandezze omogenee (che hanno le stesse dimensioni e che possono essere quindi misurate con le stesse unità di misura), o indiretto, cioè attraverso la misura di grandezze legate tra loro da leggi note. Per la misura diretta di una grandezza è fondamentale individuare delle unità di misura, attraverso campioni assunti come standard e che individuano una certa quantità fissata di una grandezza fisica.

Bisogna a questo punto distinguere tra grandezze fondamentali e grandezze derivate. Le prime sono quelle per cui le unità di misura vengono scelte arbitrariamente. Le grandezze derivate, pur avendo spesso una unità di misura propria, possono essere espresse in funzione di grandezze fondamentali mediante l'uso delle leggi fisiche. L'*analisi dimensionale* descrive come una grandezza derivata può essere espressa in termini di grandezze fondamentali.

Le prime grandezze fondamentali che introduciamo sono la lunghezza L , la massa M e il tempo T . È importante sottolineare come queste non siano formalmente equivalenti alle unità di misura che possono essere usate per descriverle quantitativamente.

La dimensione di una grandezza A viene espressa tramite il simbolo $[]$:

$$[A] = \text{dimensione della grandezza } A \quad (\text{I.2})$$

La sua espressione in funzione di dimensioni di grandezze fondamentali è detta equazione dimensionale:

$$[A] = [L^\alpha M^\beta T^\gamma] \quad (\text{I.3})$$

dove α, β e γ sono dei coefficienti. Ad esempio, se la grandezza A è una superficie:

$$[A] = [L^2 M^0 T^0] \quad (\text{I.4})$$

Le operazioni tra le dimensioni, come anche quelle tra le unità di misura, obbediscono alle stesse regole algebriche dei numeri e variabili algebriche. Ci sono anche unità di misura adimensionali, ad esempio l'angolo θ che è dato dal rapporto tra la lunghezza dell'arco x di un cerchio di raggio r e r stesso:

$$\theta = \frac{x}{r} \quad (\text{I.5})$$

L'equazione dimensionale è:

$$[\theta] = \frac{[x]}{[r]} = \frac{[L^1 M^0 T^0]}{[L^1 M^0 T^0]} = [L^0 M^0 T^0] \quad (\text{I.6})$$

In fisica tutte le equazioni devono essere dimensionalmente omogenee, cioè entrambi i membri devono avere le stesse dimensioni. Le unità di misura da associare alle dimensioni di grandezze sia fondamentali che derivate vengono convenzionalmente organizzate in un Sistema di Misura. Il più importante è il Sistema Metrico Internazionale (S.I. o MKS), nel quale le grandezze fondamentali lunghezza, massa e tempo prima introdotte vengono rispettivamente misurate in metri (m), kilogrammi (Kg) e secondi (s). Un altro sistema molto usato è il cgs (cm,g,s). Se abbiamo bisogno di trasformare le unità di misura in cui sono espresse le grandezze fisiche dobbiamo utilizzare i fattori di conversione, cioè il rapporto uguale a 1 tra due identiche quantità espresse in diverse unità di misura dimensionalmente identiche. Ad esempio, 1 minuto e 60 secondi indicano identici intervalli di tempo:

$$\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 1 \quad (\text{I.7})$$

Dato che moltiplicare qualunque quantità per 1 significa lasciarla inalterata (e quindi anche dimensionalmente omogenea), possiamo utilizzare i fattori di conversione ogni volta che lo riteniamo necessario. A esempio:

$$2 \text{ min} = 2 \text{ min} \cdot 1 = 2 \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \cancel{\text{min}}} = 120 \text{ s} \quad (\text{I.8})$$

In sintesi, nello schema seguente sono riportate altre regole fondamentali riguardanti le unità di misura e la corretta scrittura delle quantità associate alle grandezze fisiche nei problemi di fisica.

- Ogni grandezza fisica che non sia adimensionale deve essere sempre riportata insieme alla sua unità di misura
- In una equazione entrambi i membri devono avere la stessa unità di misura
- Le funzioni trascendenti devono avere un argomento adimensionale

L'utilizzo della sola analisi dimensionale può essere utile per dedurre le dimensioni di una grandezza fisica che non conosciamo, ma che è coinvolta in una legge fisica. Le grandezze fisiche note, quando le loro dimensioni non sono immediatamente ovvie, possono essere ricavate dall'uso di altre leggi fisiche. Facciamo un esempio: supponiamo di avere a che fare con la seguente equazione (che esprime l'energia di un fotone^[2]):

$$E = h\nu \quad (\text{I.9})$$

dove E è una energia e ν una frequenza, mentre h è una costante che per ora ci è ignoto tutto, compreso le dimensioni:

$$[h] = [L^\alpha M^\beta T^\gamma] \quad (\text{I.10})$$

con α , β e γ coefficienti incogniti. Quando verrà studiato il moto circolare e le onde, sapremo che la frequenza (che ha come unità di misura l'Hz) è l'inverso del periodo, che è un tempo. Quindi:

$$[\nu] = [L^0 M^0 T^{-1}] \quad (\text{I.11})$$

Quando invece studieremo l'energia, troveremo che le sue dimensioni sono equivalenti a quelle di una forza per una lunghezza l . Dalla Dinamica, la forza F è una accelerazione a per una massa m . Quindi, mettendo queste informazioni insieme:

$$[E] = \underbrace{[L^0 M^1 T^0]}_m \underbrace{[L^1 M^0 T^{-2}]}_a \underbrace{[L^1 M^0 T^0]}_l \quad (\text{I.12})$$

$$[E] = [L^2 M^1 T^{-2}] \quad (\text{I.13})$$

Quindi:

$$h = \frac{E}{\nu} \quad (\text{I.14})$$

$$[h] = \frac{[E]}{[\nu]} = \frac{[L^2 M^1 T^{-2}]}{[L^0 M^0 T^{-1}]} = [L^2 M^1 T^{-1}] \quad (\text{I.15})$$

^[2]Il fotone è il quanto di energia della radiazione elettromagnetica. La sua definizione va oltre il programma del corso.

Abbiamo quindi trovato le dimensioni della costante^[3]. Volendo indicare quali sono unità di misura in SI, h si misura in $\text{Kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$.

Un'altra applicazione dell'analisi dimensionale è quella di poter dedurre in alcuni casi la dipendenza funzionale di una grandezza fisica da altre che individuiamo nella schematizzazione del modello. Questa dipendenza funzionale richiederà, a meno delle costanti adimensionali che possono intervenire, una legge fisica. Pensiamo di avere a che fare con lo studio di un pendolo costituito da un filo di massa trascurabile a cui è legata una massa. Partendo dalla non conoscenza della fisica del pendolo, siamo interessati a dedurre come il periodo T di oscillazione di un pendolo dipenda da altre grandezze fisiche in gioco. Tralasciando l'ampiezza delle oscillazioni^[4], come altre grandezze fisiche che possono giocare un ruolo troveremo la massa m , la lunghezza del filo l e l'accelerazione di gravità g . Supponiamo quindi che Θ sia data da una qualche funzione di questi parametri moltiplicati per una eventuale costante adimensionale ignota che chiamiamo k :

$$\Theta = km^\alpha l^\beta g^\gamma \quad (\text{I.16})$$

Dimensionalmente (k si può ignorare, essendo adimensionale):

$$[\Theta] = [m]^\alpha [l]^\beta [g]^\gamma \quad (\text{I.17})$$

Sfruttiamo a questo punto le conoscenze riguardo le dimensioni delle grandezze in gioco:

$$\underbrace{[L^0 M^0 T^1]}_{\Theta} = \underbrace{[L^0 M^1 T^0]^\alpha}_m \underbrace{[L^1 M^0 T^0]^\beta}_l \underbrace{[L^1 M^0 T^{-2}]^\gamma}_g \quad (\text{I.18})$$

$$[L^0 M^0 T^1] = [L^0 M^\alpha T^0][L^\beta M^0 T^0][L^\gamma M^0 T^{-2\gamma}] \quad (\text{I.19})$$

Dato che tutte le equazioni devono essere dimensionalmente omogenee, le stesse dimensioni devono trovarsi con la stessa potenza nei due membri. Otterremo quindi un sistema di 3 equazioni e 3 incognite, cioè una per grandezza fondamentale coinvolta (L , M e T):

$$\begin{cases} 0 = 0 + \beta + \gamma & \text{per } L \\ 0 = 0 + \alpha + 0 & \text{per } M \\ 1 = 0 + 0 - 2\gamma & \text{per } T \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

Si trova quindi facilmente:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

^[3] $\text{Kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ equivale a $J \cdot s$. La costante h si chiama *costante di Plank* e riportata con 4 cifre significative è uguale a $6.626 \cdot 10^{-34}$ Js.

^[4]Nel caso di un pendolo che descriva archi di circonferenza, nell'approssimazione di *piccole oscillazioni* il periodo è indipendente dall'ampiezza delle oscillazioni. Affinando il modello, troveremo però che è necessaria una correzione a Θ dipendente dall'ampiezza dell'oscillazione. La necessità di questa correzione diviene necessaria all'aumentare della precisione con cui uno sperimentatore misura Θ .

Tornando ora all'equazione I.22:

$$\Theta = km^0 l^{1/2} g^{-1/2} = k \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (\text{I.22})$$

Quindi abbiamo dedotto che Θ non dipende dalla massa e aumenta con la radice quadrata della lunghezza del filo e diminuisce proporzionalmente alla radice quadrata dell'accelerazione di gravità del pianeta sul quale è posto il pendolo. In una fase successiva, uno studio della dinamica può portare ad una conferma di questa relazione e a scoprire il valore della costante adimensionale k ^[5]. La legge così ricavata sarà sottoposta a verifica sperimentale e permetterà di predire il comportamento del pendolo (ad esempio che periodo di oscillazione ci aspetteremo nel caso di un allungamento del filo). Infine, il modello fisico può essere sottoposto a raffinamento, ad esempio tenendo conto anche alle correzioni dovute dalle differenti ampiezze di oscillazione.

I.1.4 La Misura

Il *principio di misura* si basa sull'individuazione di un fenomeno fisico e un modello per trattare il fenomeno. Ad esempio, il funzionamento di un termometro si basa sul fenomeno della dilatazione termica dei corpi.

Una caratteristica fondamentale della misura è che fornisce una conoscenza intrinsecamente incerta. Quando si afferma che qualcosa è “scientificamente provato” non significa infatti fare affermazioni indiscutibili, ma fare una affermazione nelle quali è indicato in modo chiaro il limite di attendibilità dell'affermazione stessa. Il “*valore vero*” di una grandezza fisica è del tutto inaccessibile allo sperimentatore ed è qualcosa che può essere soltanto ristretto all'interno di un intervallo più piccolo possibile. Le fonti di errore che intervengono in un processo di misura sono innumerevoli e possono essere raggruppate in due gruppi: *errore!sistemico* ed *errore!casuale*. I primi producono effetti sempre nello stesso verso (ad esempio un offset nella scala presente su un calibro per misurare le lunghezze) e possono, in linea di principio essere individuati e eliminati dall'apparato. Una misura con piccoli errori sistematici è detta *accurata*. Gli errori casuali sono dovuti a cause sulle quali si ha un controllo limitato e inducono effetti non prevedibili, ma comunque trattabili attraverso l'analisi dei risultati sperimentali. Una misura con piccoli errori casuali è detta *precisa*. Il risultato sarà quello alla fine di associare inevitabilmente alla quantità finale di una grandezza fisica una *incertezza*. Il meglio che si possa fare è di ridurre ragionevolmente l'incertezza attraverso il raffinamento dell'apparato sperimentale e i metodi di *analisi dati*. Infatti, la parola “errore”, usata spesso in luogo di “incertezza” nell'analisi dei dati sperimentali, non è in questo caso un sinonimo di “sbaglio”.

L'analisi dei dati sperimentali deve essere trattata attraverso gli strumenti forniti dalla *statistica*. La statistica è la disciplina che studia da un lato le modalità con cui descrivere le proprietà

^[5]Dalle leggi della Dinamica e in approssimazione di piccole oscillazioni, si trova:

$$\Theta = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (\text{I.23})$$



Figura I.1: Precisione e Accuratezza

di un insieme di dati (statistica descrittiva) e dall'altro in che modo, a partire dai dati sperimentali, trarre conclusioni sui valori delle grandezze fisiche (statistica inferenziale). L'analisi delle incertezze sperimentali permette di ricavare delle regole che permettono di attribuire una incertezza ad una misura effettuata molte volte oppure derivata a partire da altre misure di grandezze aventi un errore (*propagazione dell'errore*). Assumendo di essere stati in grado di eliminare gli errori sistematici (o comunque di conoscerne i contributi), dopo aver fatto un numero N di misure di una grandezza v e ottenendo N valori, possiamo assumere come miglior stima del "valore vero" la *media*:

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_N}{N} = \sum_{i=1}^N v_i \quad (\text{I.24})$$

Ricordiamo che riportare questo valore non è sufficiente, perché bisogna riportare anche una incertezza Δv per valutare quantitativamente l'attendibilità della misura. Il modo più grossolano è quello di riportare come incertezza lo *scarto massimo*, definito come il valore assoluto della differenza tra \bar{v} e tra il valore v_j , minore o maggiore di \bar{v} , che maggiormente si discosta da \bar{v} :

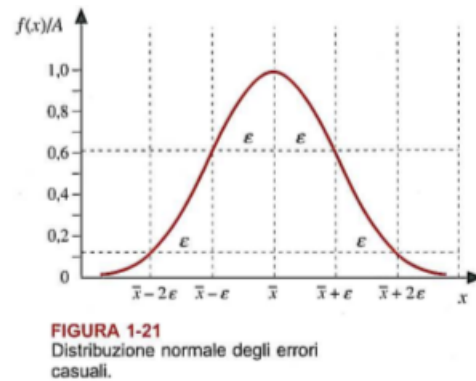
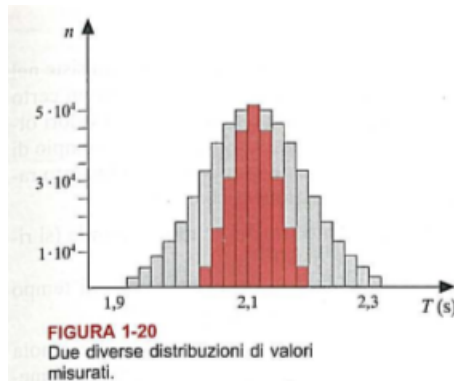
$$\text{Scarto Max: } \Delta v = \max(|\bar{v} - v_i|) \quad \text{per } i = 1, \dots, N \quad (\text{I.25})$$

Una incertezza così riportata si chiama *errore assoluto* ed è contraddistinto dall'aver le stesse dimensioni (e unità di misura) della grandezza. Per valutare quantitativamente la precisione di una misura, viene anche usata l'*errore relativo*, che è data dal rapporto tra Δv e \bar{v} . Essa viene espressa attraverso un numero adimensionale oppure in percentuale. Ad esempio, abbiamo

misurato la lunghezza l ottenendo $\bar{l}=400$ m e $\Delta l = 8$ m:

$$l = (400 \pm 8) \text{ m} \quad (\text{I.26})$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{8 \text{ m}}{400 \text{ m}} = 0.02 = 2 \cdot 10^{-2} = 2\% \quad (\text{I.27})$$



Allo scopo di verificare la riproducibilità di una misura o di confrontare grandezze ottenute con metodi diversi e quindi di validare un modello fisico, bisogna verificare la consistenza di misure diverse. Se due misure sono consistenti, gli intervalli individuati dalle misure con le incertezze hanno una intersezione non nulla (il “valore vero” viene ragionevolmente considerato come appartenente a questa intersezione).

Quando il numero di misure è sufficientemente alto, metodi statistici consentono di riportare una incertezza minore. Nel caso in cui il numero di misure effettuate cresca considerevolmente, l'istogramma realizzato a partire dai valori ottenuti tende ad approssimare la cosiddetta *distribuzione di Gauss* (o *normale*):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{I.28})$$

In questo caso, la valutazione dell'incertezza assume un significato probabilistico e consideriamo come significativo quel valore che individua una porzione della curva che sottende il 68% di probabilità che cada nell'intervallo individuato dal centro della curva (\bar{v}) e $\pm\sigma$. Questo valore σ (*deviazione standard*) si può calcolare a partire dalle misure fatte come lo *scarto quadratico medio*:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (v_i - \bar{v})^2} \quad (\text{I.29})$$

Dallo scarto quadratico medio, si trova l'*errore quadratico medio della media*:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (\text{I.30})$$

In pratica viene “premiato” il fatto di aver fatto di aver fatto molte misure e l’incertezza tende a ridursi lentamente all’aumentare del numero di misure. In sintesi potremo scrivere come risultato della misura:

$$(\bar{v} \pm \bar{\epsilon}) \text{ unità di misura} \quad (\text{I.31})$$

Nel caso in cui due sperimentatori a e b misurino indipendentemente la stessa quantità si può valutare se le due misure sono *consistenti* all’interno dell’incertezza sperimentale. Se abbiamo due misure $(x_a \pm \Delta x_a)$ e $(x_b \pm \Delta x_b)$, si introduce quindi la *discrepanza*:

$$|x_a - x_b| \quad (\text{I.32})$$

Per valutare se la discrepanza è significativa, bisogna tenere conto delle incertezze sperimentali. Assieme alle incertezze ogni misura individua un intervallo di lavoro. Due misure possono ragionevolmente essere considerate consistenti nel caso in cui questi intervalli si sovrappongano almeno parzialmente.

I.1.5 Propagazione dell’Errore

Nel caso in cui dobbiamo ricavare l’incertezza di una misura indiretta, dobbiamo utilizzare le incertezze delle misure dirette. Vediamo prima dei casi semplici. Supponiamo di avere una misura indiretta di una grandezza z data dalla somma o differenza di due grandezze misurate indirettamente x e y :

$$z = x \pm y \quad (\text{I.33})$$

Le grandezze x e y sono tra di loro indipendenti. Abbiamo trovato due incertezze assolute Δx e Δy . In questo caso, le incertezze assolute si sommano per fare quella di z :

$$\Delta z = \Delta x + \Delta y \quad (\text{I.34})$$

Altro caso semplice è quello in cui:

$$z = Bx \quad (\text{I.35})$$

dove B è una costante priva di incertezza. In questo caso:

$$\Delta z = |B|\Delta x \quad (\text{I.36})$$

Nel caso di un prodotto o rapporto tra due grandezze:

$$z = xy \quad (\text{I.37})$$

$$z = \frac{x}{y} \quad (\text{I.38})$$

si trova che l’incertezza relativa di z è uguale alla somma delle incertezze relative di x e y :

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \quad (\text{I.39})$$

Casi più complessi non verranno trattati in questo capitolo.

I.1.6 Cifre Significative

Le cifre significative sono il numero di cifre necessario a descrivere una grandezza fisica derivata da altre attraverso leggi e trovata tramite un processo di misura. Nel secondo caso il numero di cifre significative e la procedura di arrotondamento sono dipendenti dall'incertezza con la quale è stata misurata. Nel primo caso abbiamo invece a che fare con un problema di fisica nel quale sono presenti dei dati iniziali di alcune grandezze riportate senza incertezza sperimentale. In questo caso ci sono alcune regole da seguire per esprimere il risultato con il numero di cifre significative corretto.

- *Cifra significativa*: numero presente nella misura che non siano degli zero posti all'estrema sinistra.
- La cifra meno significativa è quella più a destra, la più significativa quella a sinistra.
- Gli 0 dopo la virgola sono significativi.
- Per essere sicuro di riportare il numero corretto di cifre significative, la scelta migliore è quella di riportare la misura in notazione scientifica. In caso contrario, potrebbero comparire degli 0 a destra che potrebbero non essere significativi. (Esempio: riportando 4500 m non siamo sicuri che gli 0 siano tutti significativi. Se le cifre significative sono 3, il modo senza ambiguità di riportare la misura è: $4.50 \cdot 10^3$ m.)
- *Somme e Sottrazioni*: il risultato ha come ultima cifra significativa quella dell'addendo che ha la cifra meno significativa più a sinistra del punto decimale
- *Prodotti e Divisioni*: il risultato ha il minimo di cifre significative delle misure iniziali
- *Funzioni Trascendenti*: Stesso numero di cifre dell'argomento
- Nel caso di *arrotondamento*, se la cifra da tagliare è un 5 seguito solo da zeri, se la cifra meno significativa rimanente è dispari si tronca per eccesso, se pari per difetto.
- In presenza di una *incertezza assoluta* Δx nella misura x , questa viene espressa con solo una cifra significativa eccetto il caso in cui la più significativa sia un 1 (2 cifre significative). La misura non può avere cifre di ordine di grandezza più piccolo della cifra meno significativa dell'incertezza.

Ad ulteriore chiarimento del terzo punto dello schema, spesso si considerano significativi tutti gli zeri in numeri come 4000. Questa tuttavia non è una convenzione universalmente accettata.

I.1.7 Come risolvere un problema di Fisica

Alla luce di ciò, si può individuare un metodo per risolvere un esercizio di fisica. Dobbiamo costruire in modello, cioè una schematizzazione semplificata più semplice possibile, crean-

do un modo alternativo di rappresentazione dell'informazione disponibile e consentendo una elaborazione matematica di leggi fisiche. Le fasi sono:

- 1 *Concettualizzazione*: Comprendere la situazione usando le informazioni, tracciando una rappresentazione pittorica del problema e scrivere sul foglio i dati.
- 2 *Schematizzazione*: semplificare il problema eliminando dettagli e classificare il problema all'interno di un modello
- 3 *Analisi*: trovare una rappresentazione matematica del problema e risolvere le equazioni partendo dal livello simbolico.
- 4 *Valori Numerici*: sostituire alla fine dei calcoli algebrici i valori numerici dei dati iniziali nell'espressione finale della grandezza fisica da ricavare
- 5 *Analisi critica*: verificare che le equazioni siano dimensionalmente omogenee e che il risultato è in accordo con le attese della concettualizzazione del modello fisico

I.2 Scalari e Vettori

I.2.1 Definizioni e operazioni tra vettori

Una *grandezza scalare* è una grandezza che può essere rappresentata attraverso un numero reale seguito dall'opportuna unità di misura. La temperatura o il tempo sono esempi di grandezze scalari. Una *grandezza vettoriale* è una grandezza che invece necessita di essere espressa sotto forma vettoriale. Un *vettore* è un'entità individuata da un *modulo* (che è una grandezza scalare ≥ 0), una *direzione* (che individua la retta lungo la quale agisce) e un *verso* (cioè uno dei sensi possibili di una retta). Due esempi sono la posizione e la velocità. Un vettore viene generalmente rappresentato tramite la notazione \vec{v} , ma si può trovare anche la notazione in grassetto \mathbf{v} . In diversi problemi di fisica può essere importante sapere il punto in cui agisce il vettore che rappresenta una certa grandezza fisica; in questo caso si parla di *vettori applicati* e il punto in cui agisce è chiamato *punto di applicazione*. Per ogni vettore applicato è possibile individuare un numero infinito di vettori ad esso equipollente. Per indicare questa famiglia di vettori si parla quindi di *vettori liberi*.

Il modulo di un vettore si indica con la notazione $|\vec{v}|$ o anche, dove non vi sia ambiguità, con semplicemente v . Un vettore che ha modulo unitario è chiamato *versore* e si indica con il simbolo \hat{v} . Il versore risulta molto utile quando si voglia indicare solo l'informazione relativa alla direzione e il verso di un vettore. Se abbiamo un vettore \vec{v} possiamo trovare il relativo versore dividendo per il suo modulo:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad (\text{I.40})$$

Se abbiamo un sistema di riferimento costituito da assi ortogonali x, y, z , i versori che individuano la direzione e il verso degli assi generalmente si chiamano $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

In una equazione che coinvolge scalari e vettori dobbiamo fare attenzione a non sommare o sottrarre tra loro grandezze di tipo differente:

$$\vec{v} + a = c \quad \text{Errore grave!!} \quad (\text{I.41})$$

Si definisce invece la *somma vettoriale*:

$$\vec{v} + \vec{u} = \vec{w} \quad (\text{I.42})$$

In Fig. (I.2) sono rappresentati i due metodi grafici per la somma di due vettori:

- “regola del parallelogramma”: si portano a coincidere le origini dei due vettori da sommare, si costruisce su essi un parallelogramma e se ne traccia la diagonale, partendo dall’origine comune dei vettori e terminando all’estremo opposto.
- “metodo punta-coda” (o “della poligonale”): si traccia il vettore risultante dalla coda del primo alla punta del secondo

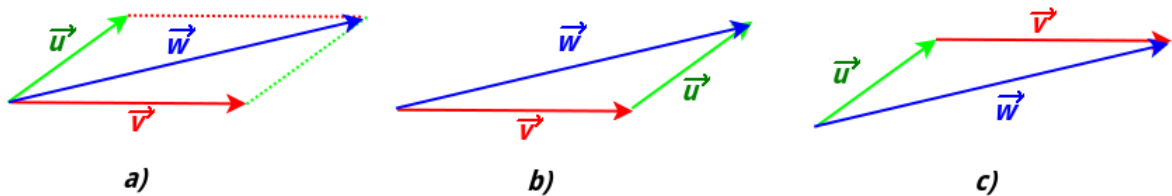


Figura I.2: Somma vettoriale $\vec{v} + \vec{u} = \vec{w}$ fatta graficamente con il “metodo del parallelogramma” a) e il metodo “punta-coda” b). In c) si evidenzia come invertendo l’ordine degli addendi il risultato non cambi.

La somma vettoriale gode della *proprietà commutativa*, come si vede anche in Fig. (I.2)-c):

$$\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v} \quad (\text{I.43})$$

Se ci sono più vettori da sommare non è rilevante il modo in cui li raggruppiamo. Se ad esempio vogliamo sommare \vec{v} , \vec{u} e \vec{h} , possiamo prima sommare $\vec{v} + \vec{u}$ e poi \vec{h} . La somma vettoriale infatti gode della *proprietà associativa*:

$$(\vec{v} + \vec{u}) + \vec{h} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{h}) \quad (\text{I.44})$$

Il vettore $-\vec{v}$ ha rispetto a \vec{u} stesso modulo e direzione ma verso opposto. Sommarli significa ottenere il vettore nullo^[6]:

$$\vec{u} - \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{I.45})$$

Quindi sommare $-\vec{u}$ ha l’effetto di sommare \vec{u} , quindi possiamo usare ciò per definire la sottrazione tra due vettori attraverso una somma:

$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u}) \quad (\text{I.46})$$

Il metodo grafico è riportato in Fig. (I.3).

Nei problemi di fisica è anche importante verificare che le equazioni che coinvolgono vettori siano dimensionalmente omogenee; non si può infatti sommare un vettore spostamento ad una velocità. Ciò sarebbe equivalente nel caso degli scalari a sommare, ad esempio, un tempo con una temperatura!

^[6]In questo testo scriveremo per coerenza anche il vettore nullo con notazione vettoriale, ma in molti testi il vettore nullo viene riportato come fosse uno scalare.

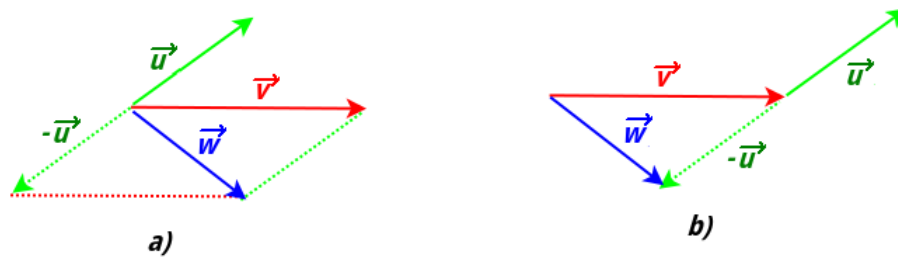


Figura I.3: Differenza vettoriale $\vec{v} - \vec{u} = \vec{w}$ fatta graficamente con il “metodo del parallelogramma” a) e il metodo “punta-coda” b).

I.2.2 Componenti dei vettori

Consideriamo un sistema bidimensionale, cioè con un vettore che giace in un piano. Dato un sistema di due assi ortogonali x e y , le componenti di un vettore sono le proiezioni su questi assi. Per trovare la proiezione occorre tracciare le perpendicolari dai due estremi del vettore agli assi (Fig. (I.4)). I moduli dei vettori \vec{a}_x e \vec{a}_y , che chiamiamo v_x e v_y sono le componenti e

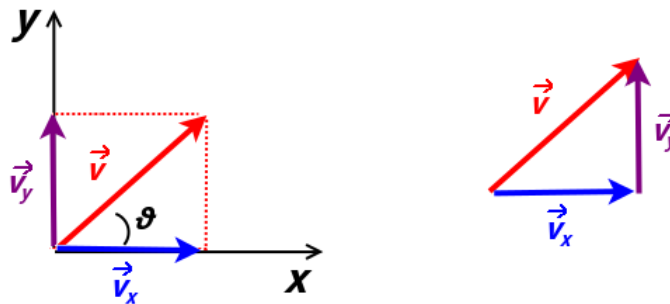


Figura I.4: Il vettore \vec{v} e le sue componenti.

hanno il segno che dipende dal verso degli assi e del vettore (nel caso in figura Fig. (I.4) sono entrambi positive). Come si nota dalla figura i tre vettori formano un triangolo rettangolo e quindi possiamo trovare le *componenti scalari* conoscendo il modulo v di \vec{v} :

$$v_x = v \cos \theta \quad v_y = v \sin \theta \quad (\text{I.47})$$

Indicando i versori degli assi, possiamo scrivere le *componenti vettoriali*:

$$\vec{v}_x = v \cos \theta \hat{i} \quad \vec{v}_y = v \sin \theta \hat{j} \quad (\text{I.48})$$

Dalla Fig. (I.4) si vede come $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$. Una volta che un vettore è scomposto nelle sue componenti lungo gli assi, possiamo trovare il modulo attraverso il Teorema di Pitagora:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (\text{I.49})$$

e anche l'angolo θ che il vettore forma con l'asse x :

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} \quad (\text{I.50})$$

Nel caso tridimensionale avremo bisogno di un ulteriore angolo e un'ulteriore componente. Il vettore può essere anche rappresentato così:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad (\text{I.51})$$

Nel caso di somma o differenza tra vettori dobbiamo sommare o sottrarre le componenti relative agli stessi assi:

$$\vec{v} + \vec{u} = (v_x + u_x) \hat{i} + (v_y + u_y) \hat{j} \quad (\text{I.52})$$

o equivalentemente:

$$\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + u_x \\ v_y + u_y \end{pmatrix} \quad (\text{I.53})$$

I.2.3 Prodotto di un Vettore per uno Scalare

La prima operazione che coinvolge vettori e scalari che introduciamo è il *prodotto di un vettore per uno scalare*. Questa è l'operazione più semplice e si tratta di moltiplicare il modulo del vettore \vec{v} per lo scalare a , che può essere qualsiasi numero con relativa unità di misura. Il vettore \vec{w} risultante avrà sempre la solita direzione di \vec{v} e avrà verso opposto nel caso in cui a sia negativo. Le unità di misura del modulo di \vec{v} e di a si moltiplicheranno di conseguenza.

$$\vec{w} = a\vec{v} \quad (\text{I.54})$$

Quindi il prodotto di un vettore per uno scalare necessita di un vettore e di uno scalare e ha come risultato un vettore.

I.2.4 Prodotto Scalare

Il *prodotto scalare* avviene tra due vettori \vec{v} e \vec{w} e ha come risultato uno scalare a e l'operazione si indica generalmente con un puntino tra i due vettori:

$$a = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (\text{I.55})$$

Colloquialmente, si legge "v scalar u". Conoscendo i moduli v e u dei due vettori, matematicamente si ha:

$$a = vu \cos \phi \quad (\text{I.56})$$

dove ϕ è l'angolo compreso tra i due vettori. In pratica il prodotto scalare è il modulo del primo vettore, moltiplicato per il valore della componente del secondo lungo il primo (o viceversa). Nel prodotto scalare vale la proprietà commutativa:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} \quad (\text{I.57})$$

Il prodotto scalare diviene massimo in modulo quando i due vettori sono paralleli ($\cos \phi = 1$) o antiparalleli ($\cos \phi = -1$), mentre diventa 0 del caso i due vettori siano perpendicolari ($\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$);

infatti in quest'ultimo caso la componente dei vettori lungo la direzione dell'altro è nulla. Se abbiamo le componenti dei vettori, il prodotto scalare coincide con la moltiplicazione delle componenti relative alla stessa direzione:

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z \quad (\text{I.58})$$

Si può semplicemente verificare che il modulo di un vettore può essere anche espresso in termini del prodotto scalare con sé stesso:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

I.2.5 Prodotto Vettoriale

Il *prodotto vettoriale* è definito soltanto nello spazio tridimensionale, necessita di due vettori \vec{v} e \vec{u} e si ottiene come risultato un terzo vettore \vec{w} ortogonale ad entrambi. Si usano per rappresentarlo il simbolo \wedge oppure anche \times e colloquialmente viene detto “v vettor u”:

$$\vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{u} \quad (\text{I.59})$$

Il modulo w del vettore \vec{w} risultante è:

$$w = vu \sin \phi \quad (\text{I.60})$$

dove ϕ è il minore dei due angoli formati dalle semirette equiverse ai vettori su cui giacciono \vec{v} e \vec{u} . Il valore massimo per il modulo di \vec{w} si ha quando i due vettori sono perpendicolari ($\sin \phi = 0\frac{\pi}{2}$) e uguale a 0 quando sono paralleli.

Una volta individuato il piano nello spazio 3D su cui giacciono i vettori \vec{v} e \vec{u} , \vec{w} avrà direzione perpendicolare a questo piano. Per stabilire il segno si utilizzano varie regole, che presuppongono generalmente l'uso della mano destra (*regola della mano destra*). Si possono trovare diverse varianti equivalenti. Qui ne indicheremo una con l'uso della mano destra (Fig. (I.5)):

- indice lungo il primo vettore \vec{v}
- medio lungo il secondo vettore \vec{u}
- il verso del pollice indica il verso di \vec{w}

In figura Fig. (I.5) a destra si vedono vari casi che possono avvenire considerando \vec{v} e \vec{u} giacenti sul foglio. Il vettore \vec{w} risultante dal prodotto vettoriale è rappresentato quindi perpendicolare al foglio con il simbolo \odot per indicare verso uscente dal foglio (“punta di freccia che esce dal foglio”) e con il simbolo \otimes per il verso entrante (“punta della freccia che entra nel foglio”). Si può quindi verificare come il prodotto vettoriale *non* goda della proprietà commutativa:

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}) \quad (\text{I.61})$$

Con le componenti (tramite il determinante simbolico):

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (b_x a_z - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \hat{k}$$

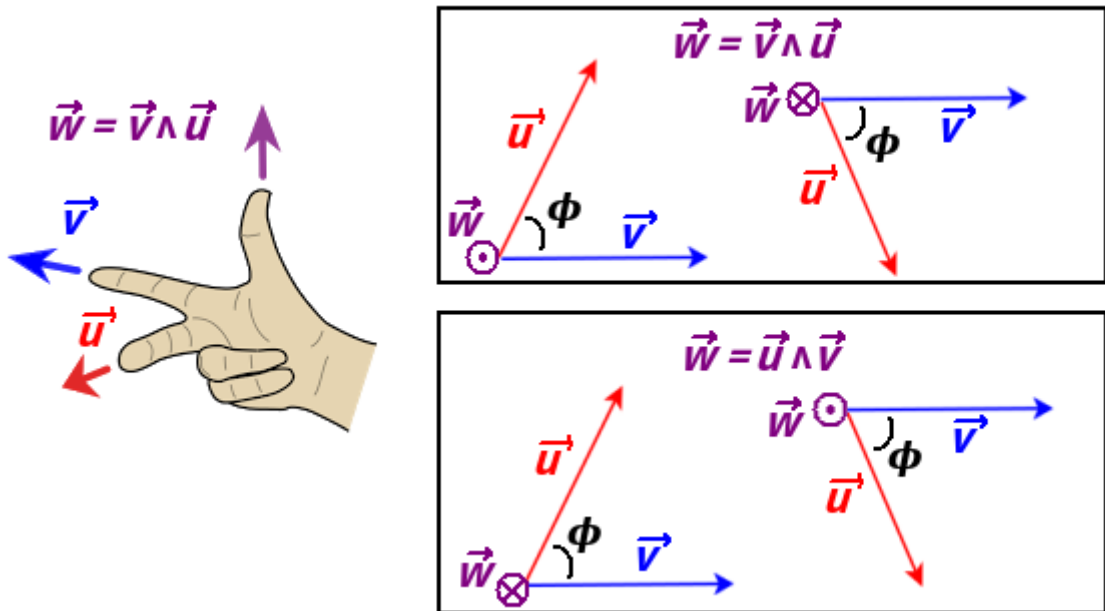


Figura I.5: A sinistra, una delle “regole della mano destra”. A destra i vari casi che possono succedere. Il simbolo \odot significa uscente dal foglio, mentre \otimes entrante.

Tabella Riassuntiva

Prodotto	Input	Forma	Output	Spazio
Prodotto per uno scalare	vettore \vec{v} , scalare a	$\vec{w} = a\vec{v}$	vettore	qualsiasi
Prodotto scalare	vettore \vec{v} , vettore \vec{u}	$a = \vec{v} \cdot \vec{u}$	scalare a	qualsiasi
Prodotto vettoriale	vettore \vec{v} , vettore \vec{u}	$\vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{u}$	vettore \vec{w}	3D

Esercizi

Notazione Scientifica

* Esercizio 1

Dati $a = 1.5 \cdot 10^3 \text{ m}$ e $b = 1.0 \cdot 10^{-1} \text{ s}^{-1}$, trovare la grandezza $v = a \cdot b$.

** Esercizio 2

La grandezza k è funzione di tre grandezze tramite la relazione:

$$k = \frac{ab^2}{c}$$

Trovare k sapendo che $a = 1.5 \cdot 10^3 \text{ m}$, $b = 2.0 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ e $c = 3.0 \cdot 10^6 \text{ m}^2$.

** Esercizio 3

Con le stesse grandezze dell'esercizio 2, trovare:

$$k = \frac{a/b}{c}$$

** Esercizio 4

Se $d = 2.0 \cdot 10^{-4} m$, trovare $k = ad^3$.

Unità di Misura e Analisi Dimensionale

* Esercizio 5

Esprimere le dimensioni della grandezza *quantità di moto p* sapendo che è data dal prodotto tra una massa e una velocità.

*** Esercizio 6

Date le grandezze a = velocità, b =massa, c =tempo, si trovino le dimensioni della grandezza k data da:

$$k = \frac{ab^2}{c}$$

*** Esercizio 7

Un fascio laser penetra attraverso un mezzo assorbente con una intensità iniziale I_0 che ha le dimensioni di una potenza diviso una superficie. Dopo un tempo t di propagazione, essa si è ridotta secondo la seguente relazione:

$$I = I_0 e^{-\alpha t}$$

Quali sono le dimensioni di α ?

*** Esercizio 8

La Legge di Newton stabilisce che il modulo della forza di attrazione gravitazionale F_g tra due masse m_1 e m_2 poste a distanza r sia:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Trovare le dimensioni della costante G .

**** Esercizio 9

Un corpo di massa m viene lasciato cadere da una altezza h . Si ricavi la dipendenza funzionale del tempo di caduta t dall'altezza, la massa e l'accelerazione di gravità g .

**** Esercizio 10

Basandosi sull'analisi dimensionale, trovare la forma funzionale del modulo della forza centrifuga F in termini della massa m , velocità v , e raggio di curvatura r .

Cifre Significative e Incertezze*** Esercizio 11**

Esprimere il numero π (3.14159265358979323846...) usando da 1 a 6 cifre significative:

**** Esercizio 12**

Indicare il numero di cifre significative:

- 0.346 m
- 2.103 g
- 0.080 s
- $3.450 \cdot 10^{-3}$ V
- $2.65 \cdot 10^2$ Kg

**** Esercizio 13**

Arrotondare ad una cifra significativa inferiore le grandezze riportate nell'esercizio 12.

**** Esercizio 14**

Calcolare le grandezze con il numero corretto di cifre significative:

- $(27.8 + 3.175 + 42.24)$ m
- $(142 - 3.264)$ s
- $5.326 \text{ ml} \cdot 1.16 \text{ g/ml}$
- $\log_{10} 3.35$

**** Esercizio 15**

Esprimere il prodotto 23×22 con 1,2 e 3 cifre significative.

*** Esercizio 16**

Sapendo che 1 pollice corrisponde a 0.0254 m, convertire 4.25 pollici in m e in dm.

**** Esercizio 17**

Uno sperimentatore misura una lunghezza ℓ ottenendo il valore 3.102 m. L'incertezza assoluta $\Delta\ell$ è di 441 mm. Come deve essere correttamente riportata la misura? Con che incertezza relativa è stata fatta la misura?

**** Esercizio 18**

Uno sperimentatore misura la stessa lunghezza ℓ dell'esercizio 17 con una precisione del 3%. Riportare la misura.

**** Esercizio 19**

Uno sperimentatore misura la stessa lunghezza ℓ dell'esercizio 17 con una precisione del 0.5%. Riportare la misura.

**** Esercizio 20**

Della stessa grandezza t sono state fatte 3 misure: 45.34 s, 45.21 s e 45.89 s. Determinare il valore medio e valutare l'incertezza come scarto massimo dal valore medio. Riportare infine la misura finale.

***** Esercizio 21**

Uno studente preleva una quantità d'acqua utilizzando due diversi recipienti graduati A e B . A ha la sensibilità di 5 ml e B di 1 ml. Con A ha prelevato 0.200 l di acqua e con B 23 cl. Deposita quest'acqua in un contenitore C non graduato. Assumendo come errore assoluto delle misure dirette la sensibilità della scala graduata, qual è la misura dell'acqua contenuta in C in ml e in l?

***** Esercizio 22**

Due misure dirette $x = 56$ cm e $y = 23$ s hanno errore assoluto rispettivamente $\Delta x = 2$ cm e $\Delta y = 1$ s. Trovare $z = x/y$ nel sistema SI.

Conversioni*** Esercizio 23**

Convertire 120 Km/h in m/s.

*** Esercizio 24**

Considerando una densità ρ di 1 kg/litro, trovare la massa m di un volume V di 1 m³ di acqua.

**** Esercizio 25**

Si esprima in km/h² ed in cm/s² l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre che nel SI vale 9.81 m/s²

Scalari e Vettori

Nota: dove non specificato, i moduli dei vettori sono dati in unità arbitrarie.

*** Esercizio 26**

Scrivere le componenti del vettore \vec{v} in figura I.6 sapendo che il modulo è v .

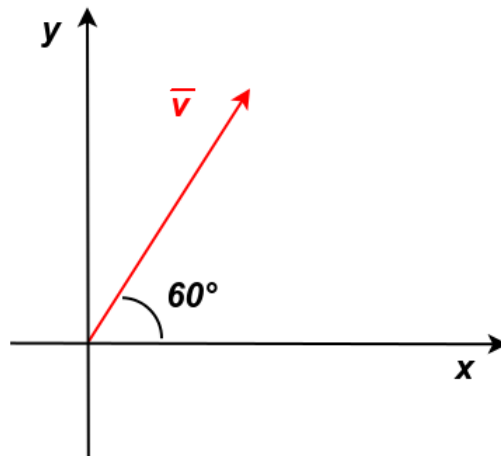


Figura I.6

**** Esercizio 27**

Sia dato il vettore $\vec{v} = 3.0\hat{i} + 2.0\hat{j}$. Si trovi il modulo, il prodotto scalare con il vettore $\vec{u} = 2.0\hat{i} + 0.5\hat{j}$ e l'angolo θ tra essi compreso.

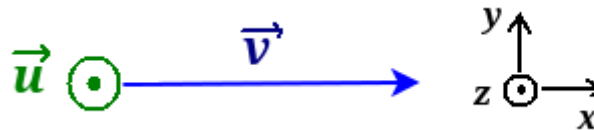


Figura I.7

**** Esercizio 28**

Dati i due vettori in Fig. (I.7), con $\vec{v} = 4\hat{i}$ e $\vec{u} = 2\hat{k}$:

- trovare $\vec{v} \cdot \vec{u}$
- trovare e disegnare $\vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{u}$
- trovare e disegnare $\vec{h} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

**** Esercizio 29**

Un vettore \vec{a} ha modulo a 6.00 e un vettore \vec{b} ha modulo b di 7.00. Il loro prodotto scalare è 14.0. Che angolo formano le loro direzioni?

**** Esercizio 30**

Dati i due vettori:

$$\vec{a} = 4.0\hat{i} + 3.0\hat{j}$$

$$\vec{b} = 2.0\hat{i} + 2.0\hat{k}$$

Trovare:

- $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ e il modulo $|\vec{c}|$
- $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b}$ e il modulo $|\vec{d}|$
- $\vec{a} \cdot \vec{b}$

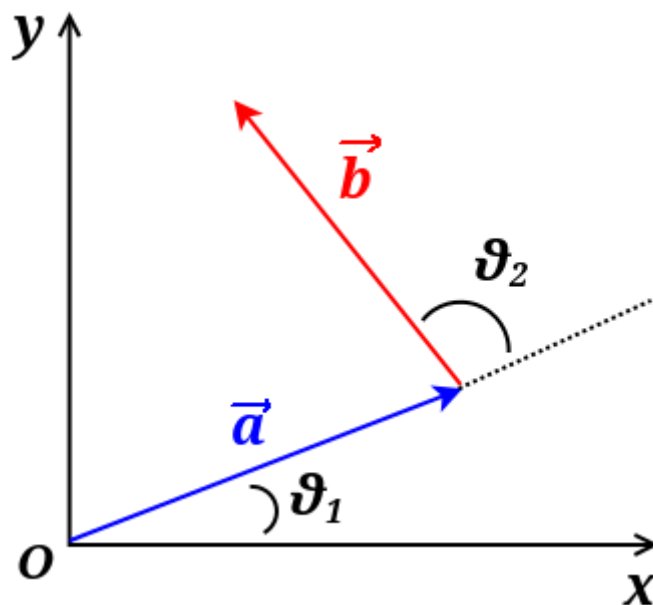


Figura I.8

***** Esercizio 31**

Dati due vettori \vec{a} e \vec{b} dallo stesso modulo uguale a 10.0 m in Fig. (I.8) e gli angoli $\theta_1 = 30.0^\circ$ e $\theta_2 = 105^\circ$. Sia \vec{r} la loro somma. Si trovino le componenti r_x e r_y sugli assi di \vec{r} , il suo modulo r e l'angolo che \vec{r} forma con l'asse x .

***** Esercizio 32**

Due vettori (figura I.9), \vec{r} e \vec{s} , giacciono nel piano xy . I loro moduli sono rispettivamente 4.50 e 7.30 e le loro direzioni rispettivamente di 320° e 85° , misurate in senso antiorario dal semiasse positivo delle x . Trovare $\vec{r} \cdot \vec{s}$ e $\vec{r} \wedge \vec{s}$.

****** Esercizio 33**

Si consideri il prodotto $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, dove $q = 2$, $\vec{v} = 2.0\hat{i} + 4.0\hat{j} + 6.0\hat{k}$ e $\vec{F} = 4.0\hat{i} + 20\hat{j} + 12\hat{k}$. Nel caso in cui $B_x = B_y$, si esprima \vec{B} nella notazione con i versori.

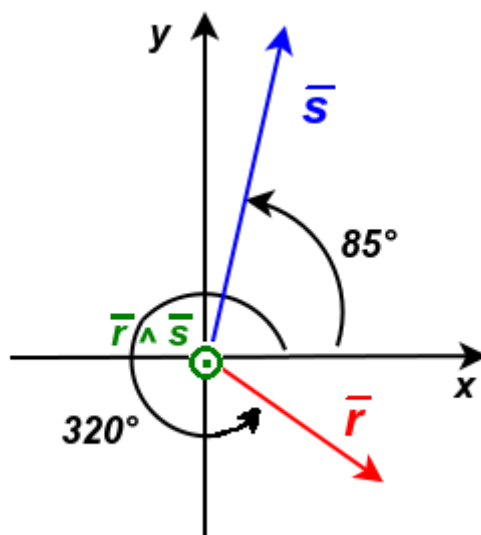


Figura I.9

Capitolo II

Cinematica

La Cinematica è la branca della Meccanica che si occupa di descrivere in modo quantitativo il moto dei corpi indipendentemente dalle cause che lo generano. In questo capitolo saranno introdotte le grandezze fisiche della posizione, spostamento, velocità e accelerazione in una Sez. (II.1) o più dimensioni Sez. (II.2). Verrà anche trattato il caso del moto parabolico e del moto circolare uniforme. Infine, verranno discussi i moti relativi. I casi trattati in questo capitolo saranno quelli relativi ai corpi puntiformi.

Concetti Fondamentali

- moto rettilineo uniforme 1D
- moto uniformemente accelerato 1D
- moto circolare uniforme
- moto parabolico
- moti relativi

Per quanto riguarda il moto parabolico in un compito scritto, risulta importante, invece di memorizzare le formule per i principali parametri, ragionare sulla schematizzazione di ogni singolo problema. Una soluzione basata solo sull'uso della memoria, senza ragionare sul problema, porta spesso ad una conclusione non corretta.

II.1 Moto Rettilineo

II.1.1 Posizione, Velocità, Accelerazione

In questa sezione studieremo il moto di oggetti che si muovono in linea retta, cioè in *moto rettilieo* o *unidimensionale*. Inoltre, tratteremo per ora solo il caso di *corpi puntiformi*, cioè con dimensioni e geometria trascurabili allo scopo di descrivere il moto. Vengono quindi trattati come punti geometrici. Per fare un esempio, nello studio del moto di una nave in mezzo all'oceano, la nave può essere schematizzata come un punto materiale. Se si vuole studiare il moto della nave nel porto, non è invece possibile trascurarne la forma e le dimensioni.

La prima grandezza fisica che introduciamo è la *posizione* x , che permette di localizzare un oggetto rispetto ad un sistema di riferimento. Nel caso 1D, la posizione è indicata con un segno positivo o negativo a seconda del verso convenzionalmente preso come positivo allontanandosi dall'origine. Per quanto riguarda le dimensioni:

$$[x] = [L^1 M^0 T^0] \quad (\text{II.1})$$

In SI l'unità di misura è il metro. Il cambiamento di posizione da un punto x_1 ad un punto x_2 è detto *spostamento* Δx :

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (\text{II.2})$$

Lo spostamento è indipendente dal percorso e dipende solo dalla posizione iniziale e quella finale. Dimensionalmente è equivalente alla lunghezza e il suo segno indica il verso del moto rispetto al segno convenzionalmente preso come positivo. Entrambe le grandezze sono vettoriali ($\vec{x}, \vec{\Delta x}$), anche se in questa sezione stiamo studiando vettori di dimensione 1. Altre grandezze, questa volta di tipo scalare, che introduciamo sono il *tempo* t e l'*intervallo di tempo* tra due istanti t_2 e t_1 :

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad (\text{II.3})$$

Dimensionalmente:

$$[t] = [L^0 M^0 T^1] \quad (\text{II.4})$$

In SI, si misura in secondi.

La *legge oraria* è, in generale, una relazione che lega una grandezza fisica al tempo. Un esempio di legge oraria è quindi la descrizione della posizione x in funzione del tempo t :

$$x = x(t) \quad (\text{II.5})$$

In figura Fig. (II.1) ne è rappresentato un esempio per un oggetto puntiforme in moto rettilineo. Una posizione fissa per un intervallo di tempo diviene un segmento parallelo all'asse del tempo (pendenza nulla). Negli altri tratti della spezzata invece l'oggetto si trova in moto. Si definisce *velocità media* $\langle v \rangle$ (o \bar{v}) il rapporto tra lo spostamento Δx e l'intervallo di tempo Δt impiegato per coprirlo:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (\text{II.6})$$

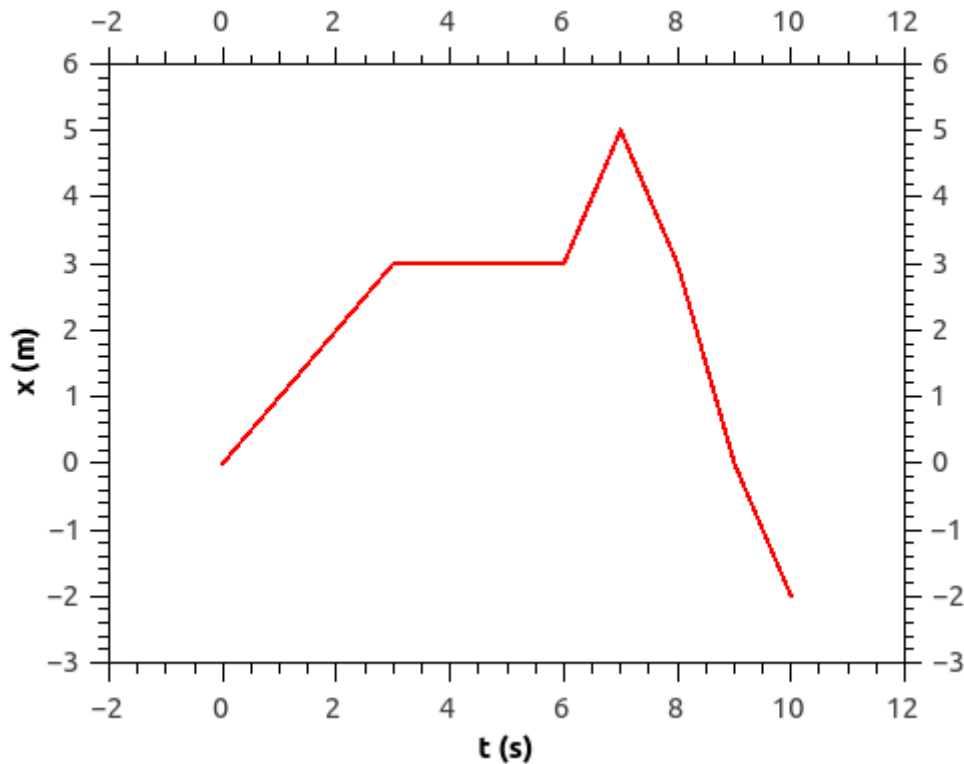


Figura II.1: Esempio di legge oraria della posizione per un corpo puntiforme che si muove in moto rettilineo rispetto un'origine posta in $x = 0$.

Dimensionalmente:

$$[v] = [L^1 M^0 T^{-1}] \quad (\text{II.7})$$

In SI si misura in m/s.

Nella spezzata in figura Fig. (II.2), la velocità media in ogni segmento è dato dalla pendenza della retta sulla quale giace il segmento. Il segno dipende dal segno dello spostamento, che a sua volta dipende dal verso convenzionalmente scelto come positivo. La velocità media è una *velocità vettoriale* (\vec{v}). In figura Fig. (II.2) la velocità media nell'intervallo di tempo $t_2 = 10$ s e $t_1 = 0$ s è data dalla pendenza della retta sulla quale giace il segmento rosso.

La *velocità scalare media* $\langle u \rangle$ è il rapporto tra la lunghezza totale percorsa, indipendentemente dal verso dello spostamento; quindi è sempre positiva. Dove non specificato esplicitamente, con “velocità” si indicherà sempre la velocità vettoriale.

La *velocità istantanea* è la velocità $v(t)$ nell'istante t :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (\text{II.8})$$

cioè, la derivata rispetto al tempo della posizione espresso in funzione del tempo.

Nel caso in cui la velocità sia una costante del moto si ha *moto rettilineo uniforme*. In questo caso, dall'espressione della velocità istantanea (II.8) si trova lo spazio percorso in un

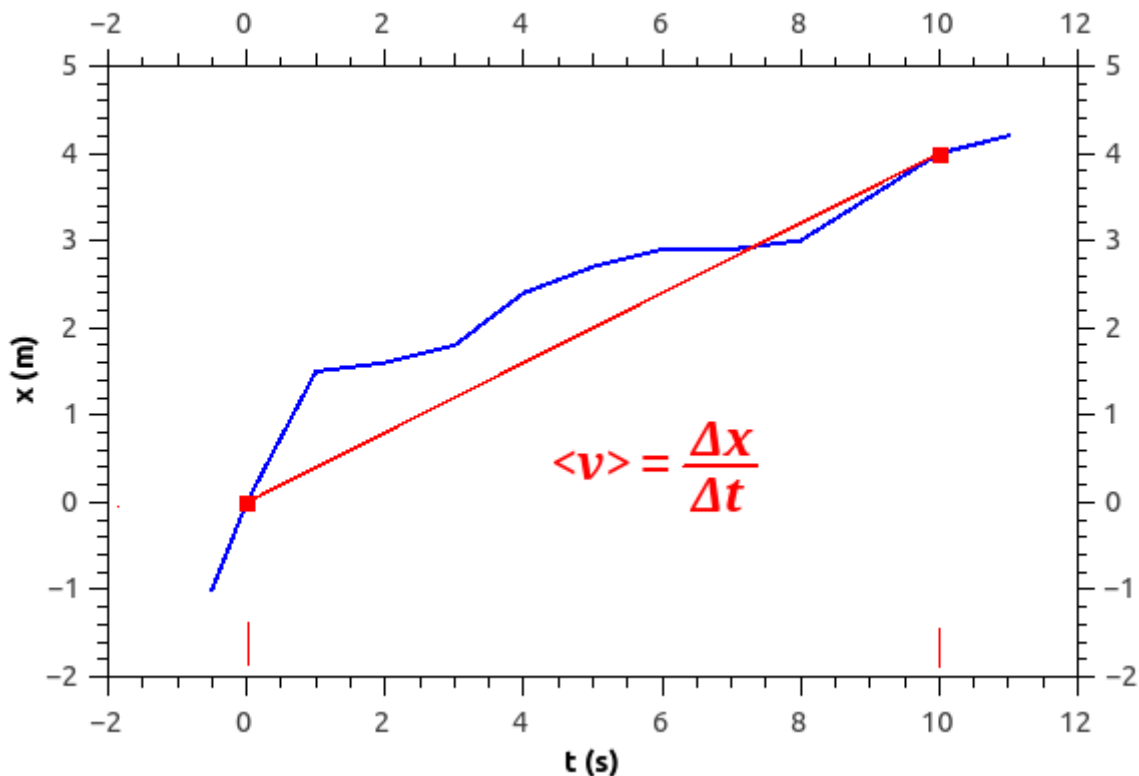


Figura II.2: La linea blu è la posizione in funzione del tempo di un oggetto e dalla pendenza del segmento rosso si trova la velocità media tra gli istanti $t = 0$ s e $t = 10$ s. In questo caso, $\langle v \rangle = \Delta x / \Delta t = (4 - 0) \text{ m} / (10 - 0) \text{ s} = 0.4 \text{ m/s}$.

tempo infinitesimo dt a velocità costante v :

$$dx = v dt \rightarrow \int dx = \int v dt \rightarrow x(t) = vt + c \quad (\text{II.9})$$

La costante c si trova imponendo la condizione iniziale, secondo la quale a $t = 0$ la particella sia nel punto x_0 :

$$x(0) = v \cdot 0 + c \rightarrow c = x_0 \quad (\text{II.10})$$

Quindi, nel moto rettilineo uniforme:

$$x(t) = vt + x_0 \quad (\text{II.11})$$

Quando la velocità di un corpo puntiforme varia, si può trovare una *accelerazione media* $\langle a \rangle$ (o \bar{a}):

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad (\text{II.12})$$

L'accelerazione istantanea è invece:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (\text{II.13})$$

cioè la derivata seconda della posizione rispetto al tempo. Dimensionalmente:

$$[a] = [L^1 M^0 T^{-2}] \quad (\text{II.14})$$

In SI si misura in m/s^2 .

Anche l'accelerazione è una grandezza vettoriale (\vec{a}) e nel caso del moto rettilineo ha direzione parallela alla velocità, poiché non ci sono accelerazioni associate a cambi di direzione. Il segno dell'accelerazione nel moto rettilineo dipende dal verso preso convenzionalmente come positivo. Se il segno è concorde a quello della velocità, il modulo di quest'ultima aumenterà nel tempo. In caso di segno discorde, il modulo della velocità diminuirà nel tempo. Infatti, in generale non è sempre corretto affermare che la velocità aumenta quando l'accelerazione è positiva e diminuisce in caso contrario.

II.1.2 Moto Uniformemente Accelerato

Il caso di *moto uniformemente accelerato* prevede che l'accelerazione sia costante nel tempo. In questo caso l'accelerazione media (II.12) e l'accelerazione istantanea (II.13) vanno a coincidere. Dalla (II.13), sia quindi dv la variazione infinitesima di velocità in un intervallo di tempo infinitesimo dt :

$$dv = a dt \quad (\text{II.15})$$

Integrando:

$$\int dv = \int a dt \quad (\text{II.16})$$

$$v(t) = at + k \quad (\text{II.17})$$

dove k è una costante da trovare attraverso le condizioni iniziali. Sia v_0 la velocità a $t = 0$ e sostituiamo nella (II.17):

$$v(t = 0) = a \cdot 0 + v_0 = v_0 \quad (\text{II.18})$$

Quindi la (II.17) diventa:

$$v(t) = at + v_0 \quad (\text{II.19})$$

Dall'espressione della velocità istantanea (II.8) si trova lo spazio percorso in un tempo infinitesimo dt :

$$dx = v dt \quad (\text{II.20})$$

si sostituisce la (II.19):

$$dx = (at + v_0)dt \quad (\text{II.21})$$

integrando entrambi i membri:

$$\int dx = \int v_0 dt + \int at dt \quad (\text{II.22})$$

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 + c \quad (\text{II.23})$$

La costante c si trova sostituendo la condizione iniziale a $t = 0$, dove $x = x_0$:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (\text{II.24})$$

Risulta molto utile, ad esempio nei casi in cui in un problema il tempo sia incognita, trovare un'ulteriore equazione che leghi la differenza di velocità dopo un certo spazio percorso. Sia v_0 la velocità nel punto x_0 e ricaviamo il tempo dall' (II.19):

$$t = \frac{v - v_0}{a} \quad (\text{II.25})$$

Sostituiamo questa equazione nella (II.24):

$$(x - x_0) = v_0 \frac{(v - v_0)}{a} + \frac{1}{2} \frac{(v - v_0)^2}{a} \quad (\text{II.26})$$

moltiplichiamo entrambi i membri per $2a$ e svolgendo i calcoli si ottiene:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (\text{II.27})$$

Un caso notevole di moto uniformemente accelerato, nel caso in cui si possa trascurare l'effetto dell'attrito dell'aria e che la variazione di altitudine sia tale da poter considerare l'accelerazione di gravità g costante, è il *moto di caduta libera*. Prendendo un sistema di riferimento con verso ascendente ^[1], la quota h dopo un tempo t :

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \quad (\text{II.28})$$

Moto Armonico

Nel *moto armonico*, che descrive il moto di una particella che oscilla intorno ad un centro posizionato nella coordinata x_0 (*centro di oscillazione*), la legge oraria è:

$$x(t) = l \sin(\omega t + \phi) + x_0 \quad (\text{II.29})$$

^[1]In questo caso, dato che \vec{g} (di modulo $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ espresso con due cifre significative in SI) è diretta verso il basso, il suo segno è negativo.

la costante l è detta *ampiezza*, ha le dimensioni di una lunghezza e rappresenta la massima distanza che la particella raggiunge rispetto a x_0 durante il moto. La costante ω è detta *pulsazione* e descrive la rapidità di questa oscillazione. Dimensionalmente:

$$[\omega] = [L^0 M^0 T^{-1}] \quad (\text{II.30})$$

In SI si misura in rad/s (infatti il suo prodotto con un tempo t dà un angolo in radianti). ϕ è una *fase* iniziale (un angolo espresso in rad) che dipende dalle condizioni iniziali. Il *periodo* T (o Θ , come è stato indicato nella Sez. (I.1.3) per evitare ambiguità con la dimensione T) è il tempo necessario per una oscillazione completa intorno a x_0 :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{II.31})$$

Il suo reciproco ν si chiama *frequenza*:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{II.32})$$

$$[\nu] = [L^0 M^0 T^{-1}] \quad (\text{II.33})$$

In SI si misura in s^{-1} , che è equivalente all'Herz (simbolo: Hz). Derivando la (II.29) si trova la velocità e l'accelerazione:

$$v(t) = l\omega \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{II.34})$$

$$a(t) = -l\omega^2 \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{II.35})$$

La traiettoria appare come un segmento lungo $2l$ centrato in x_0 .

Pendendo per semplicità il centro di oscillazione in $x_0 = 0$ e la fase iniziale ϕ nulla:

$$x(t) = l \sin(\omega t) \quad (\text{II.36})$$

avremo che la particella passa per il centro in $x = 0$ ogni volta che si annulla il seno:

$$l \sin(\omega t) = 0 \rightarrow t = \pm \frac{k\pi}{\omega} \quad (\text{II.37})$$

dove k è un numero intero non negativo. Quindi la particella passa dal centro di oscillazione ogni semiperiodo (vedere la (II.31)), come era da attesa. Sostituendo questa condizione nella (II.34), troviamo che la velocità in modulo diventa massima e pari a $l\omega$. L'accelerazione ((II.35)) risulta invece 0 nel centro. Allontanandosi dal centro l'accelerazione aumenta in modulo fino ad arrivare al suo valore massimo in corrispondenza delle coordinate l e $-l$, cioè gli estremi del moto. Il verso dell'accelerazione risulta sempre opposto a quello della velocità, causando quindi una riduzione del modulo di quest'ultima nel tempo. L'effetto dell'accelerazione è quello di richiamare sempre la particella verso il centro di oscillazioni. Infatti le coordinate $x = \pm l$ vengono raggiunte quando il seno diventa 1:

$$l \sin(\omega t) = l \rightarrow t = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\omega \quad (\text{II.38})$$

$$l \sin(\omega t) = -l \rightarrow t = \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)\omega \quad (\text{II.39})$$

Sostituendo questi tempi nella (II.34) si trova che la velocità si è ridotta a 0, visto l'annullarsi del coseno, mentre l'accelerazione ha raggiunto il suo modulo massimo.

Formule nel Moto Rettilineo 1D

$$\text{velocità (vettoriale) media} \quad \langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$\text{velocità scalare media} \quad \langle u \rangle = \frac{\text{Lunghezza totale percorsa}}{\text{Tempo impegnato}}$$

$$\text{accelerazione media} \quad \langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$\text{integrale della velocità} \quad x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

$$\text{moto rettilineo uniforme (} v = \text{cost)} \quad x(t) = vt + x_0$$

$$\text{accelerazione istantanea} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\text{integrale dell'accelerazione} \quad v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a(t) dt$$

Formule nel Moto Rettilineo Uniformemente Accelerato 1D

$$v(t) = at + v_0$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Formule nel Moto Armonico

$$x = l \sin(\omega t + \phi) + x_0$$

$$\text{Periodo} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{Frequenza} \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\text{Pulsazione} \quad \omega = 2\pi\nu$$

II.2 Moto in due e tre dimensioni

II.2.1 Posizione, Velocità, Accelerazione

In uno spazio tridimensionale, la posizione di un vettore posizione è individuata da un vettore \vec{r} e la legge oraria diventa:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (\text{II.40})$$

In un sistema di riferimento, si può esprimere la posizione di un oggetto rispetto all'origine individuando le componenti del vettore \vec{r} :

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (\text{II.41})$$

Equivalentemente, si può anche scrivere in questa forma:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

Il vettore spostamento diventa quindi la differenza tra due vettori \vec{r}_1 e \vec{r}_2 :

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k} - x_1\hat{i} - y_1\hat{j} - z_1\hat{k} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \quad (\text{II.43})$$

Dalla (II.2):

$$\vec{\Delta r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k} \quad (\text{II.44})$$

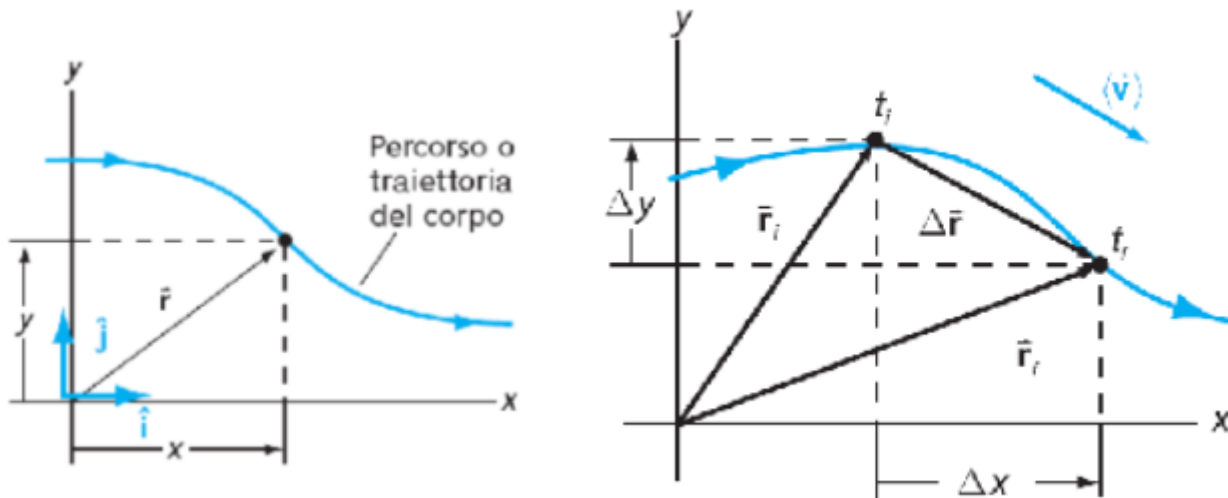


Figura II.3: Posizione e spostamento in una traiettoria generica.

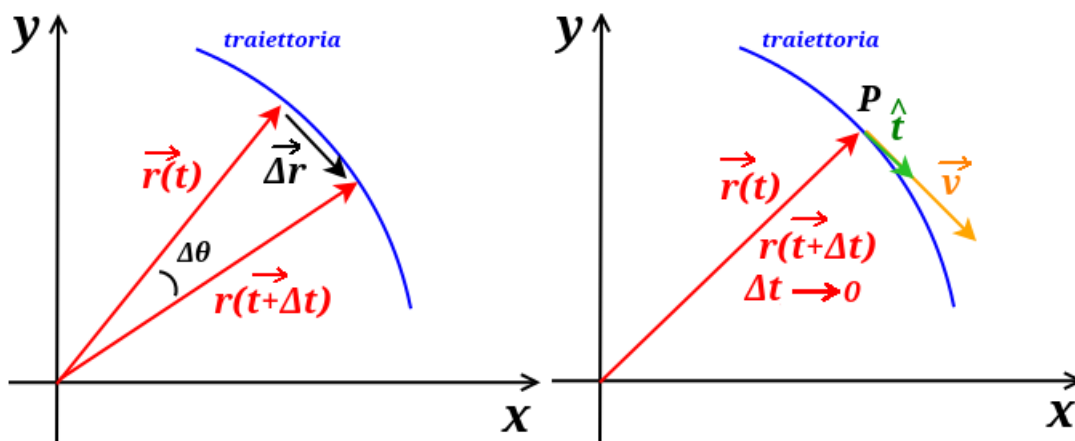


Figura II.4: Il vettore $\vec{\Delta r}$ su una traiettoria.

La velocità media diventa:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k} \quad (\text{II.45})$$

Ne discende quindi che la direzione di $\langle \vec{v} \rangle$ risulta la stessa di $\vec{\Delta r}$. Al limite di $\Delta t \rightarrow 0$, $\langle \vec{v} \rangle$ tende ad essere diretta come la tangente alla traiettoria. In Fig. (II.4) a sinistra l'incremento $\vec{\Delta r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ è rappresentato dalla corda sulla traiettoria. Al tendere di Δt a zero, l'angolo $\Delta\theta$ tende a zero e la direzione della corda corrispondente tende alla direzione tangente (versore \hat{i}) alla traiettoria del punto P della traiettoria sul quale vanno a convergere i vettori $\vec{r}(t + \Delta t)$ e $\vec{r}(t)$ (Fig. (II.4) a destra).

La velocità istantanea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (\text{II.46})$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \quad (\text{II.47})$$

Dalla (II.8):

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \quad (\text{II.48})$$

Passando all'accelerazione, si definisce l'accelerazione media:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (\text{II.49})$$

Anche in questo caso potremmo quindi definire l'accelerazione istantanea:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} \quad (\text{II.50})$$

II.2.2 Moto Circolare Uniforme

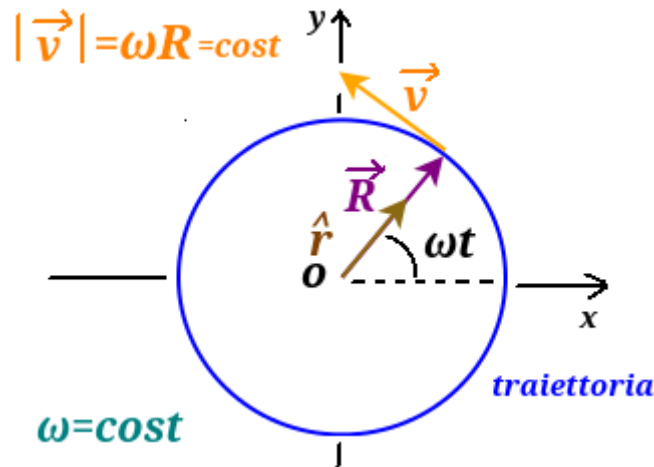


Figura II.5: Velocità nel moto circolare uniforme.

Introduciamo il *moto circolare uniforme*, secondo il quale una particella si muove, con pulsazione ω costante, lungo una traiettoria dalla forma circolare di raggio R (Fig. (II.5)) secondo la seguente legge oraria è:

$$\vec{R}(t) = \begin{cases} x(t) = R \cos \omega t \\ y(t) = R \sin \omega t \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.51})$$

Le definizioni e le relazioni tra ω , v e T sono le stesse riportate nel caso del moto armonico in Sez. (II.1.2). Il modulo di \vec{R} :

$$|\vec{R}| = \sqrt{(R \cos \omega t)^2 + (R \sin \omega t)^2} = \sqrt{R^2(\cos^2 \omega t + R^2 \sin^2 \omega t)} = R \quad (\text{II.52})$$

Il vettore \vec{R} punta la posizione della particella dal centro della circonferenza e il suo relativo versore è \hat{r} . Usando la (II.47) si trova la velocità istantanea in funzione del tempo:

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = -\omega R \sin \omega t \\ v_y(t) = \omega R \cos \omega t \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.53})$$

Quindi \vec{R} è un vettore costante in modulo, ma con derivata diversa da 0 e quindi non è un vettore costante. Infatti un vettore costante dovrebbe avere tutte le sue componenti costanti, non solo il modulo.

Troviamo il modulo di \vec{v} :

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(-\omega R \sin \omega t)^2 + (\omega R \cos \omega t)^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 \sin^2 \omega t + \omega^2 R^2 \cos^2 \omega t} = \omega R \quad (\text{II.54})$$

Quindi la velocità ha modulo costante indipendente dal tempo. Per quanto riguarda la sua direzione, secondo quanto è stato stabilito nella Sez. (II.2.1), al variare di t risulta sempre tangente alla traiettoria circolare (*velocità tangenziale*). Si può fare un'ulteriore verifica calcolando il prodotto scalare tra \vec{R} e \vec{v} :

$$\vec{R} \cdot \vec{v} = (R \cos \omega t)(-\omega R \sin \omega t) + (R \sin \omega t)(\omega R \cos \omega t) = -R^2 \cos \omega t \sin \omega t + R^2 \sin \omega t \cos \omega t = 0 \quad (\text{II.55})$$

Questo risultato, per vettori non nulli, si può avere solo quando le relative direzioni sono perpendicolari. Quindi \vec{v} è costante in modulo, ma non in direzione.

Passiamo allo studio dell'accelerazione. La (II.50) permette di ricavare il vettore tramite le sue componenti quando queste siano note in un riferimento cartesiano, ma la sua interpretazione fisica necessita di qualche approfondimento. In Fig. (II.6) abbiamo a che fare con un moto

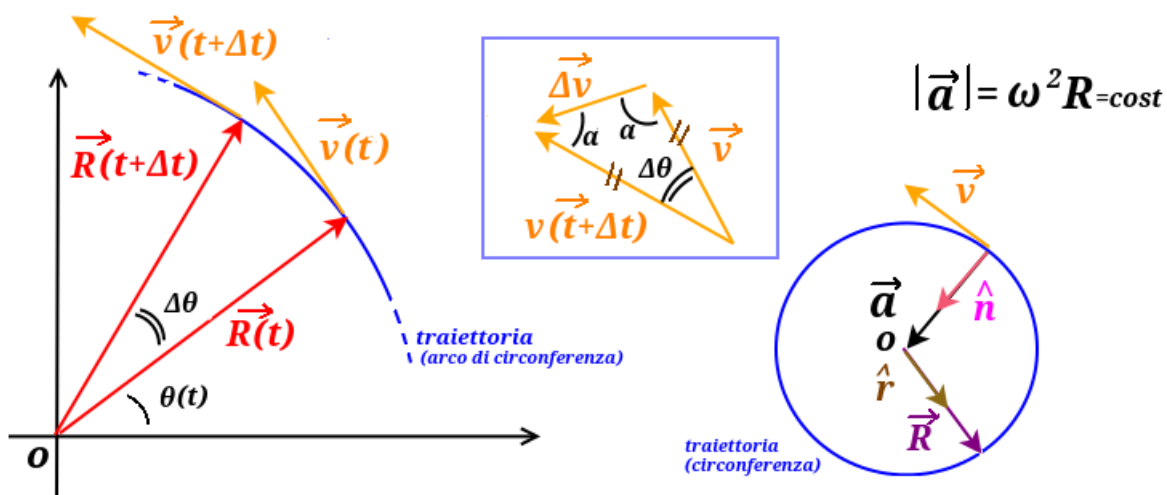


Figura II.6: Accelerazione nel moto circolare uniforme.

circolare uniforme e a destra della figura ne è rappresentato un arco della traiettoria. Concentriamo la nostra attenzione su \vec{v} , che avere costante il modulo, ma non direzione. L'angolo $\Delta\theta$ che $\vec{R}(t + \Delta t)$ forma con $\vec{R}(t)$, essendo \vec{v} tangente alla traiettoria e quindi perpendicolare a \vec{R} , è

uguale all'angolo che $\vec{v}(t + \Delta t)$ forma con $\vec{v}(t)$. Quindi, a parità di intervallo di tempo Δt , \vec{R} e \vec{v} ruotano dello stesso angolo $\Delta\theta$. Vogliamo quindi calcolare:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (\text{II.56})$$

Nella figura nel riquadro centrale in Fig. (II.6) $\vec{v}(t + \Delta t)$ forma con $\vec{v}(t)$ e $\Delta \vec{v}$ un triangolo isoscele e per $\Delta t \rightarrow 0$, i due angoli α alla base tendono a $\frac{\pi}{2}$. Dunque, per $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta \vec{v}$ e quindi \vec{a} tende ad essere perpendicolare a $\vec{v}(t + \Delta t)$ e $\vec{v}(t)$, che tendono a loro volta a coincidere. La direzione di \vec{a} risulta quindi la stessa di \vec{R} .

Applicando la (II.50) alle II.53 si trova:

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 R \cos \omega t \\ a_y(t) = -\omega^2 R \sin \omega t \\ a_z(t) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.57})$$

E calcolandone il modulo si trova una quantità costante:

$$|\vec{a}(t)| = \omega^2 R \quad (\text{II.58})$$

Attraverso la II.54 si trovano anche le espressioni equivalenti:

$$|\vec{a}(t)| = \frac{v^2}{R} = v\omega \quad (\text{II.59})$$

indicando con $|\vec{v}|$ con v .

Si può verificare anche come \vec{v} e \vec{a} siano perpendicolari, trovando che il loro prodotto scalare fa 0. Calcolando invece $\vec{a} \cdot \vec{R}$ si trova $-\omega^2 R^2$, cioè un valore negativo. Ciò significa che \vec{a} e \vec{R} , che abbiamo visto hanno la stessa direzione, hanno verso opposto. Direzione e verso di questa accelerazione è quindi descritta da un versore \hat{n} che, in ogni punto della traiettoria circolare, è uguale a $-\hat{r}$ (Fig. (II.6) a destra). Questo tipo di accelerazione è detta *accelerazione centripeta* ed è responsabile del cambiamento della direzione di \vec{v} nel tempo e non del suo modulo.

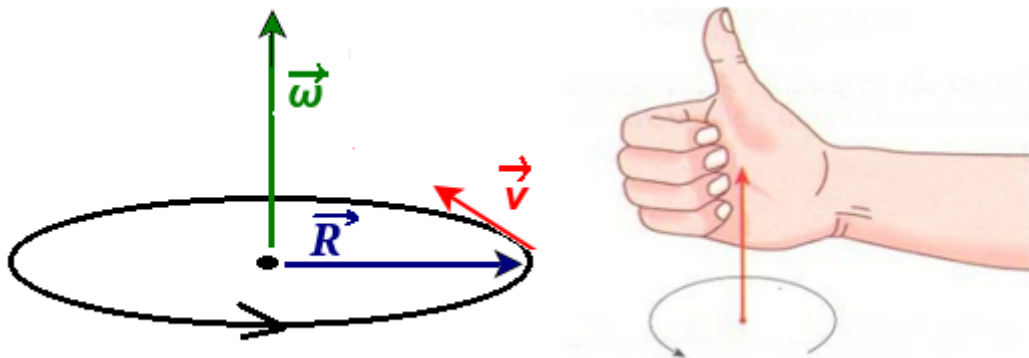


Figura II.7: Il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$.

Si può anche introdurre anche il vettore *velocità angolare* $\vec{\omega}$ (Fig. (II.7)), la cui relazione con la posizione \vec{R} e la velocità tangenziale \vec{v} è definita tramite il seguente prodotto vettoriale:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{R} \quad (\text{II.60})$$

Il suo modulo, nel caso del moto circolare uniforme, è quello della pulsazione ω ^[2], la sua direzione è perpendicolare al piano della traiettoria e il suo verso individua il senso della rotazione: guardando la traiettoria sul foglio, se $\vec{\omega}$ è uscente, allora il verso è antiorario, in caso contrario orario. Si può visualizzare anche usando la regola della mano destra come in Fig. (II.7), dove il pollice indica il verso di $\vec{\omega}$ e le altre dita danno il senso della rotazione.

II.2.3 Moto Piano su Traiettoria Generica

Nel caso generale di moto circolare (non uniforme), \vec{a} potrebbe essere anche responsabile di una variazione nel modulo di \vec{v} . Esprimiamo la velocità \vec{v} come $v\hat{t}$, dove \hat{t} è il versore tangente alla circonferenza e troviamo l'accelerazione in questo caso più generale ^[3]:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}(v\hat{t}) = \frac{dv}{dt}\hat{t} + v\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \underbrace{v\omega}_{a_c}\hat{n} \quad (\text{II.61})$$

Quindi in questo caso \vec{a} ha una componente centripeta a_c (lungo \hat{n}) e una tangenziale alla traiettoria. Utilizzando la velocità angolare ω , si può trovare una espressione vettoriale della componente centripeta:

$$\vec{a}_c = \vec{\omega} \wedge \vec{v} = a_c\hat{n} \quad (\text{II.62})$$

L'accelerazione è sempre normale alla traiettoria e diretta come il versore normale $\hat{n} = -\hat{r}$ che punta verso il centro della circonferenza.

Consideriamo il caso ancora più generico di un moto piano che si svolge lungo una traiettoria generica (Fig. (II.8)) definita da un versore tangente \hat{t} (concorde al verso di percorrenza) e uno normale \hat{n} . La velocità in ogni punto è un vettore puramente tangenziale $\vec{v} = v\hat{t}$. L'accelerazione ha invece componente normale e tangenziale alla traiettoria:

$$\vec{a} = a_t\hat{t} + a_c\hat{n} \quad (\text{II.63})$$

In ogni punto della traiettoria potremmo trovare un *cerchio osculatore* tangente ad essa on raggio di curvatura opportuno.

^[2]Questa regola vale per il moto circolare uniforme, non ha validità generale.

^[3]Per completezza si riportano i passaggi matematici per la determinazione di $\frac{d\hat{t}}{dt}$:

$$\hat{t} = \frac{d}{d\theta}\hat{r} = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}) = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = -\sin\omega t\hat{i} + \cos\omega t\hat{j}$$

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = -\omega(\cos\omega t\hat{i} + \sin\omega t\hat{j}) = -\omega\hat{r} = \omega\hat{n}$$

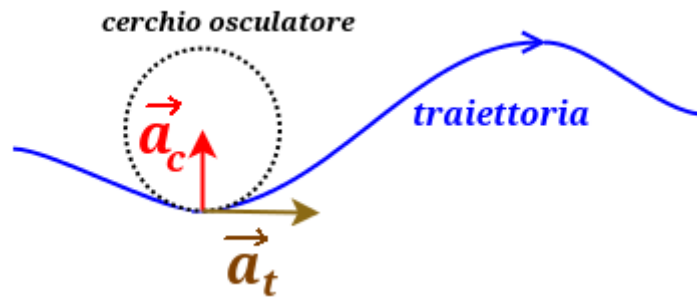


Figura II.8: Traiettoria generica sul piano.

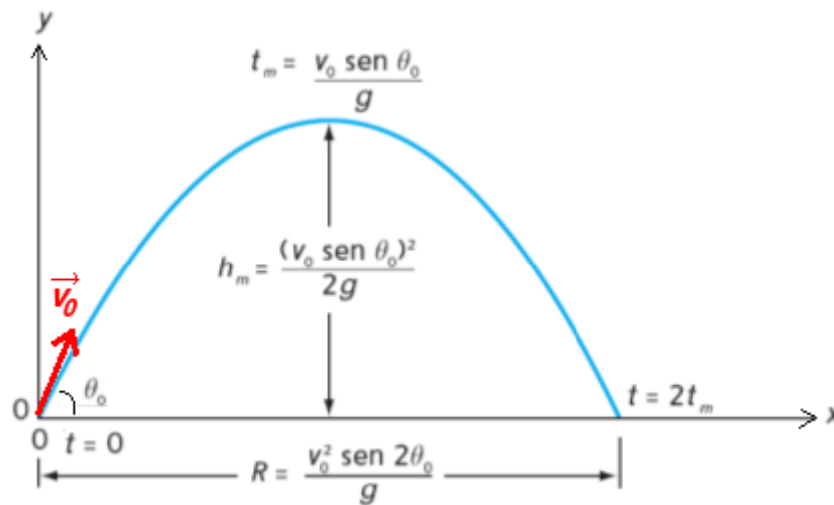


Figura II.9: Traiettoria e parametri nel moto parabolico.

II.2.4 Moto Parabolico

Consideriamo ora un caso di traiettoria su un piano che si presta ad essere studiata scomponendo il moto lungo la componente orizzontale e la componente verticale; si tratta del *moto parabolico* o *moto balistico* e descrive il moto di una particella lanciata con una velocità \vec{v}_0 e sottoposta all'accelerazione di gravità \vec{g} e ad un attrito trascurabile. Consideriamo un sistema di coordinate cartesiane con l'asse x lungo l'orizzontale e l'asse y in verso ascendente. Quindi $\vec{g} = -g\hat{j}$. La velocità iniziale di lancio \vec{v}_0 avrà componente verticale e orizzontale:

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} = v_0 \cos \theta_0 \hat{i} + v_0 \sin \theta_0 \hat{j} \quad (\text{II.64})$$

dove θ_0 è l'angolo di lancio rispetto all'orizzontale. La componente lungo x di \vec{v}_0 risulterà non affetta dall'accelerazione di gravità, poiché perpendicolare ad essa. La traiettoria del moto risulta quindi determinata facendo la composizione, per ogni istante t , di un moto rettilineo uniforme lungo x e uno uniformemente accelerato lungo la direzione y . Lungo l'asse x la componente orizzontale della velocità iniziale rimane inalterata. Sull'asse y la componente verticale della velocità si ridurrà nel tempo fino ad arrivare a 0 in corrispondenza del vertice della traiettoria. Dopo questo istante questa componente cambierà di segno e aumenterà in valore assoluto. L'angolo θ che $\vec{v}(t)$ formerà con l'orizzontale sarà quindi θ_0 nell'istante iniziale,

si ridurrà a 0 nel vertice della traiettoria e diverrà $-\theta_0$ quando la particella ritornerà alla stessa quota iniziale dopo la discesa.

Le leggi orarie del moto, scomposte sui due assi sono:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 \cos \theta_0 t \\ y(t) = y_0 + v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (\text{II.65})$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \theta_0 \\ v_y(t) = v_0 \sin \theta_0 - gt \end{cases} \quad (\text{II.66})$$

All'ultima delle II.66, tramite la (II.27) potremo trovare:

$$v^2(t) = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g(y(t) - y(0)) \quad (\text{II.67})$$

Ricavando t dalla prima delle II.65 e sostituendolo nella seconda, si ottiene l'equazione dell'arco di parabola che disegna la traiettoria:

$$y(t) = y_0 + \tan \theta_0(x(t) - x_0) - \frac{1}{2}g \frac{(x(t) - x_0)^2}{v_0^2 \cos^2 \theta_0} \quad (\text{II.68})$$

Da questa equazione potremmo ricavare la quota al variare della componente lungo x della posizione, una volta noti x_0 , y_0 , v_0 e θ_0 . Risulta però più istruttivo trovare i vari parametri del moto ragionando sulle equazioni II.65, II.66 e II.67, dipendentemente da quali sono i dati noti di un problema.

Il tempo t_m di ascesa può essere determinato imponendo che la velocità $v_y(t_m)$ sia nulla nella seconda delle II.66:

$$0 = v_0 \sin \theta_0 - gt_m \quad (\text{II.69})$$

$$t_m = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \quad (\text{II.70})$$

Si può dimostrare che t_m è anche il tempo di discesa dal vertice fino alla stessa quota iniziale. Quindi la particella tornerà alla quota iniziale per un tempo totale $2t_m = t_v$, detto anche *tempo di volo* ^[4]:

$$t_v = 2 \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \quad (\text{II.71})$$

Durante questo tempo t_v , la particella si è mossa lungo la direzione orizzontale di moto rettilineo uniforme. Ciò permette di trovare la *gittata* \mathcal{R} , che è lo spostamento $(x(t_v) - x_0)$ in orizzontale durante un intervallo di tempo t_v . Sostituendo quest'ultimo nella prima delle II.65 si ottiene:

$$\mathcal{R} = v_0 \cos \theta_0 t_v \quad (\text{II.72})$$

^[4] Bisogna però fare una distinzione: il tempo di volo coincide con il tempo che la particella ritorna sul piano orizzontale solo nel caso in cui x_0 è 0.

$$\mathcal{R} = v_0 \cos \theta_0 2 \frac{v_0 \sin \theta}{g} \quad (\text{II.73})$$

Da cui si trova ^[5]:

$$\mathcal{R} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 \quad (\text{II.74})$$

Manca ora di ricavare la variazione massima di quota $h_m = y(t_m) - y_0$. Potremo utilizzare la seconda delle II.65 sostituendo t_m , oppure usare la (II.67) e imporre la velocità finale nulla:

$$0 = (v_0 \sin \theta)^2 - 2gh_m \quad (\text{II.75})$$

da cui:

$$h_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} \quad (\text{II.76})$$

Formule nel Moto 3D

Posizione $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$

Spostamento $\vec{\Delta r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}$

Velocità media $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}$

Velocità istantanea $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$

Accelerazione media $\langle \vec{a} \rangle = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}$

Accelerazione istantanea $\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$

Accelerazione istantanea $\vec{a} = a_t\hat{t} + a_c\hat{n}$

^[5]Si ricorda che $\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha$

Formule nel Moto Circolare Uniforme

$$\vec{R}(t) = \begin{cases} x(t) = R \cos \omega t \\ y(t) = R \sin \omega t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = -\omega R \sin \omega t \\ v_y(t) = \omega R \cos \omega t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} a_x(t) = -\omega^2 R \cos \omega t \\ a_y(t) = -\omega^2 R \sin \omega t \\ a(t) = 0 \end{cases}$$

Accelerazione Centripeta $|\vec{a}_c| = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} = \omega v$

Velocità Angolare $\vec{\omega}$ tale che $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{R}$

Formule nel Moto Parabolico

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 \cos \theta_0 t \\ y(t) = y_0 + v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \theta_0 \\ v_y(t) = v_0 \sin \theta_0 - g t \end{cases}$$

$$v^2(t) = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g(y(t) - y(0))$$

Traiettoria $y(t) = y_0 + \tan \theta_0 (x(t) - x_0) - \frac{1}{2g} \frac{(x(t) - x_0)^2}{v_0^2 \cos^2 \theta_0}$

Tempo al vertice $t_m = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$

$$\text{Tempo di volo} \quad t_v = 2 \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

$$\text{Gittata} \quad \mathcal{R} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0$$

$$\text{Variazione massima di quota} \quad h_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$$

II.3 Moti Relativi

Supponiamo di avere due sistemi di riferimento A e B relativi a due osservatori che stanno osservando lo stesso fenomeno. I due sistemi di riferimento si muovono uno relativo all'altro di una velocità costante \vec{v}_{AB} . Nella Fig. (II.10) c'è una situazione semplificata nella quale gli

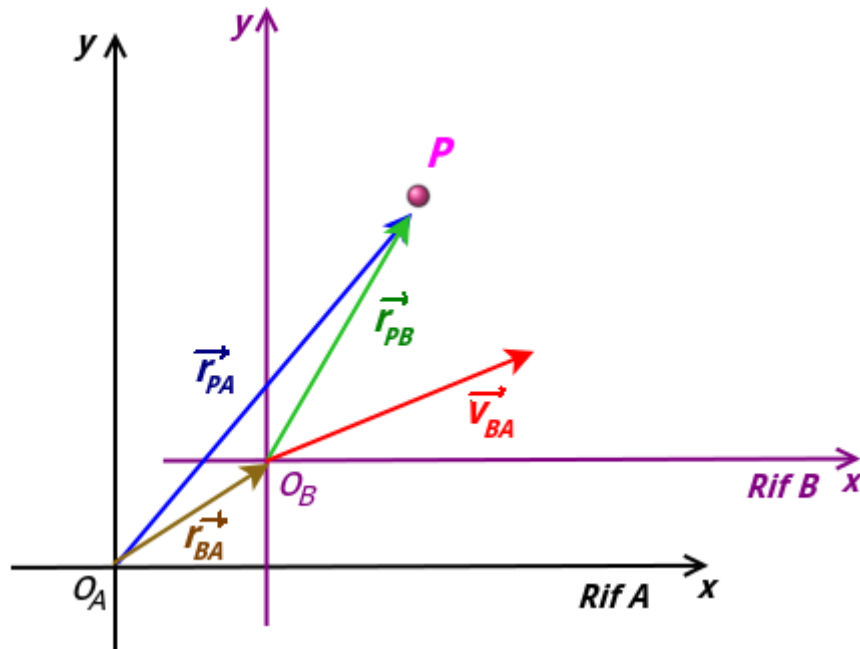


Figura II.10: Il sistema di riferimento B ha una velocità costante \vec{v}_{BA} rispetto al riferimento A .

assi x e y dei due sistemi di riferimento rimangono paralleli durante il moto relativo. Si osserva quindi una posizione di un oggetto P in un dato istante, nel quale l'origine O_B è posizionata rispetto ad O_A di un vettore \vec{r}_{BA} . I vettori \vec{r}_{PA} e \vec{r}_{PB} sono rispettivamente i vettori posizione di P rispetto ai sistemi di riferimento A e B ^[6]. Se conosciamo la posizione di P rispetto a B (\vec{r}_{PB}) e

^[6]Si noti che l'ordine degli indici KM indica K rispetto a M .

conosciamo la posizione di B rispetto a A (\vec{r}_{BA}), \vec{r}_{PA} è la somma vettoriale:

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA} \quad (\text{II.77})$$

Facendo la derivata di entrambi i vettori, otteniamo la relazione tra le velocità:

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA} \quad (\text{II.78})$$

Derivando ancora, dato che i due sistemi di riferimento si muovono a velocità relativa costante:

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} \quad (\text{II.79})$$

Ciò ha un'importante conseguenza nella Relatività Galileiana, riguardo alla forma che le leggi fisiche assumono “viste” da sistemi di riferimento in moto relativo rettilineo uniforme, come vedremo nel prossimo capitolo.

Il *principio di relatività* fu enunciato per la prima volta da Galileo (poi ripreso da Einstein nel contesto più ampio delle velocità relativistiche all'inizio del XX° secolo): *Se due laboratori si muovono l'uno rispetto all'altro di moto traslatorio rettilineo uniforme, non esiste esperimento che dia risultati diversi nell'uno e nell'altro laboratorio*. Cioè, i due laboratori sono indistinguibili dal punto di vista dei risultati degli esperimenti. Per esempio, un vagone di un treno che si muova di moto rettilineo uniforme può essere un sistema di riferimento A conveniente per descrivere i fenomeni che avvengono al suo interno. Gli stessi fenomeni possono essere descritti anche da un sistema di riferimento B solidale con i binari. Un punto fermo nel vagone viene visto da B come muoversi di moto rettilineo uniforme, una pallina lanciata verticalmente all'interno del vagone (moto unidimensionale uniformemente accelerato) viene vista da B compiere un moto parabolico.

È importante sottolineare come, affinché valga il principio di relatività, non è necessario che la misura delle varie grandezze fisiche fornisca lo stesso risultato nei due laboratori, come infatti non accade nell'esempio precedente. È invece importante che le *relazioni tra le grandezze fisiche* risultino invariate nei due sistemi di riferimento. Se un membro di una equazione fisica cambia passando da un sistema di riferimento ad un altro, anche l'altro membro deve farlo per continuare a soddisfare l'uguaglianza. Questa proprietà delle leggi fisiche si chiama *covarianza* e riguarda le trasformazioni che avvengono tra due diversi sistemi di riferimento in moto relativo rettilineo uniforme. Il caso in cui entrambi i membri restino immutati in questa trasformazione viene chiamata *invarianza* (come per l' (II.79)).

Nel “Dialogo sopra i massimi sistemi del mondo”, pubblicato nel 1632, Galileo scriveva:

Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animalletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso; e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animalletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, equali spazii passerete verso tutte le parti.

Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma.

Voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima, né, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con più forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se

egli sarà verso la prua e voi verso la poppa, che se voi foste situati per l'opposito; le goccioline cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella loro acqua non con più fatica noteranno verso la precedente che verso la susseguente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accaderà che si riduchino verso la parete che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave, dalla quale per lungo tempo, trattenendosi per aria, saranno state separate [...].

Formule nel Moto Relativo

Due sistemi di riferimento si spostano uno rispetto all'altro con velocità costante. Misurano posizione, velocità e accelerazione di una particella A

- *Posizione*

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

- *Velocità*

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

- *Accelerazione*

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$$

Esercizi

Cinematica 1D

* Esercizio 34

Un ciclista procede con velocità costante v_1 di 30.0 km/h. Un altro ciclista lo segue con velocità v_2 di 45.0 km/h. In un certo istante la distanza tra i due ciclisti è $l = 450$ m: calcolare il tempo in SI che intercorre fra questo istante e l'istante in cui avviene il sorpasso. Trovare anche le lunghezze Δl_1 e Δl_2 percorse dai ciclisti nello stesso intervallo di tempo, espresse in SI.

* Esercizio 35

Un'auto con velocità iniziale $v_0 = 50$ Km/h inizia a frenare ad una distanza $d = 20$ m da un semaforo rosso. Se l'auto arriva a fermarsi in corrispondenza del semaforo, si trovi l'accelerazione di frenata a (che supponiamo costante) e il tempo di frenata t .

* Esercizio 36

Sulla superficie di un pianeta viene sparato verticalmente un proiettile con velocità iniziale v_i di 30 m/s. Dopo un tempo $t_1 = 5.0$ s la sua velocità di è ridotta in modulo a $v_f = 21$ m/s.

Trovare il modulo dell'accelerazione di gravità g_p del pianeta e la quota massima che verrà raggiunta.

** Esercizio 37

Un aerostato sta salendo alla velocità costante v_a di 12 m/s e quando di trova ad una quota $h = 80$ m lascia andare un sasso. Trascurando l'attrito dell'aria, quanto impiega il sasso ad arrivare al suolo? Con che velocità?

Moto Armonico

**** Esercizio 38

Una particella si muove di moto armonico: nell'istante iniziale si trova nel centro di oscillazione, nell'istante t_1 ha velocità nota \vec{v} e nell'istante successivo t_2 la sua velocità si annulla per la prima volta (dall'istante iniziale). Calcolare l'ampiezza l e la fase iniziale ϕ e la pulsazione ω sapendo che $t_1 = 3.0$ s, $t_2 = 5.0$ s, $v = 7.0$ cm/s.

Cinematica 2D e 3D

** Esercizio 39

La legge oraria (in unità SI, cioè considerare le componenti come dimensionalmente omogenee) di una particella è:

$$\vec{r}(t) = 2t^2\hat{i} + (2t + 1)\hat{j}$$

Si determini l'espressione in funzione del tempo della velocità \vec{v} , il suo modulo v e l'angolo che forma con l'asse delle x .

** Esercizio 40

La legge oraria (in unità SI) di una particella in uno spazio 3D è descritta dal vettore posizione $\vec{r}(t)$, che ha la seguente espressione:

$$\vec{r}(t) = \hat{i} + 4t^2\hat{j} + t\hat{k}$$

Si determini l'espressione in funzione del tempo della velocità $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$.

*** Esercizio 41

Una particella, nel punto $(x, y) = (0, 0)$, ha velocità iniziale $\vec{v}_0 = 3.00\hat{i}$ ms⁻¹ e ha un'accelerazione costante $\vec{a} = -1.00\hat{i} - 0.500\hat{j}$ ms⁻². Quale è la sua velocità quando la sua coordinata x raggiunge il suo valore massimo x_m ? Si trovi anche il vettore posizione \vec{r} in quel punto.

*** Esercizio 42

Con riferimento alla figura II.11, una particella A si sposta sulla retta di equazione $y_A = 30$ m in moto rettilineo uniforme $\vec{v}_A = (3.0\text{m/s})\hat{i}$. Una seconda particella B parte dall'origine, con

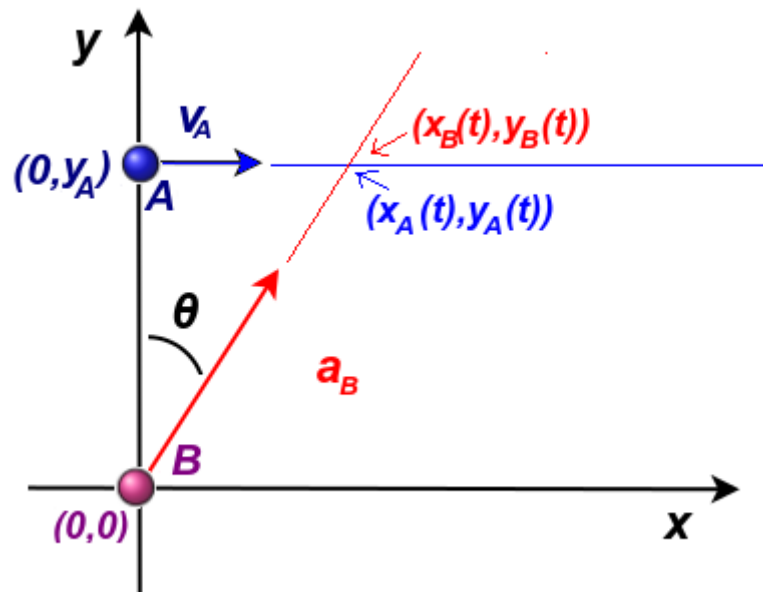


Figura II.11

velocità iniziale nulla e accelerazione \vec{a}_B con modulo $a_B = 0.40 \text{ m/s}^2$, nello stesso istante in cui la particella A attraversa l'asse y . Quale angolo θ tra \vec{a}_B e l'asse y provocherebbe una collisione tra le due particelle?

**** Esercizio 43

Al tempo t un punto materiale (figura II.12) viene lanciato orizzontalmente, con velocità di modulo $v_0 = 20 \text{ m/s}$, da un punto di quota $h = 50 \text{ m}$. All'istante $t' = 2 \text{ s}$ calcolare: le coordinate (x', y') e il raggio di curvatura nello stesso punto.

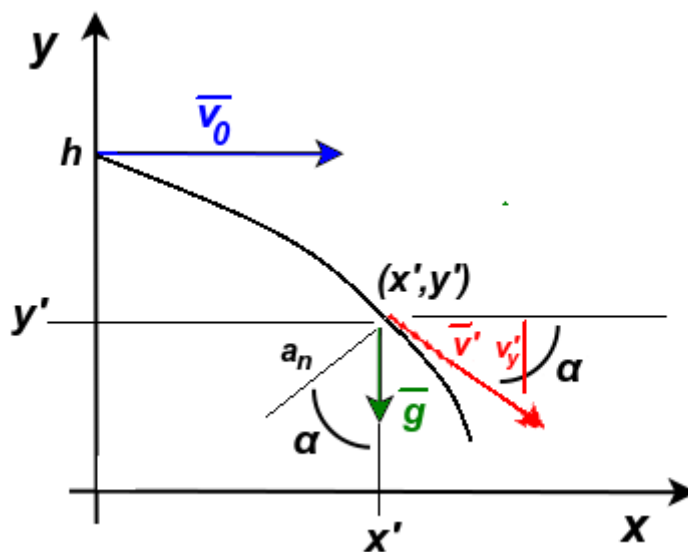


Figura II.12

Moto Circolare Uniforme**** Esercizio 44**

Una piattaforma circolare di raggio R ruota attorno ad un asse ortogonale passante per il suo centro (come in figura II.7). La piattaforma è ferma all'istante $t = 0$ e la sua velocità angolare varia nel tempo con la legge $\omega(t) = Kt^2$, con K costante. Ricavare l'espressione, al tempo t , delle componenti tangenziale e normale dell'accelerazione di un punto P solidale alla piattaforma, posto ad una distanza R dall'asse.

**** Esercizio 45**

Un aereo, senza variare la sua quota, inizia una virata con una velocità iniziale $\vec{v}_i = (4.0 \cdot 10^2 \hat{i})$ m/s e ne esce con velocità finale $\vec{v}_f = (4.0 \cdot 10^2 \hat{j})$. Trovare il tempo minimo t di permanenza in virata perché l'accelerazione centripeta a della traiettoria non superi i $4g$.

**** Esercizio 46**

Un sasso viene legato e fatto ruotare attaccato ad una cordicella lunga $l=1.5$ m su una circonferenza orizzontale ad una altezza di $h=2.0$ m dal suolo. La cordicella si rompe e il sasso viene scagliato orizzontalmente finendo poi per cadere ad una distanza $d=10$ m di distanza orizzontale. Quale era l'accelerazione centripeta del sasso in moto circolare?

***** Esercizio 47**

Due punti materiali si muovono nello stesso verso su due traiettorie circolari concentriche di raggio $R_1 = 10$ m e $R_2 = 18$ m con la stesso modulo della velocità $v = 10$ m/s. All'istante $t = 0$ s si trovano sul medesimo raggio con velocità vettoriali parallele e concordi. Calcolare l'intervallo di tempo τ che deve trascorrere affinché le velocità vettoriali risultino l'una opposta all'altra

Moto Parabolico**** Esercizio 48**

Un proiettile viene sparato orizzontalmente da un'arma posta a $h = 45.0$ m di altezza sopra un terreno orizzontale. La sua velocità alla bocca dell'arma è v_i 250 m/s. Per quanto tempo il proiettile rimane in aria? A che distanza orizzontale colpirà il terreno?

**** Esercizio 49**

Con riferimento alla figura II.13, un aereo vola orizzontalmente al terreno e sgancia una bomba da una altezza di 0.80 Km, colpendo un bersaglio distante d 2.4 Km in linea d'aria. Quale era la velocità dell'aereo? (Si trascuri l'attrito dell'aria sulla bomba).

****** Esercizio 50**

Una palla viene lanciata contro un muro con la velocità iniziale di modulo v_0 di 25.0 m/s e con un angolo $\theta=40.0^\circ$ rispetto al suolo e ad una altezza di $h_0=1.50$ m. Il muro si trova ad una

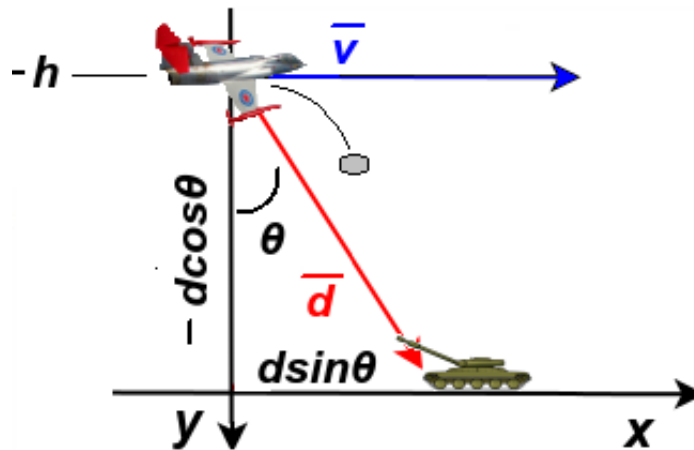


Figura II.13

distanza $d=22.0$ m. Si trovi per quanto tempo t' la palla rimane in aria prima di colpire il muro e la quota h' alla quale lo colpisce. Quale è inoltre la sua velocità \vec{v} quando colpisce la parete? Si determini anche se prima di raggiungere il muro aveva raggiunto il vertice della traiettoria e a che distanza orizzontale dalla posizione iniziale d_v e a che quota h_v si trova il vertice della traiettoria.

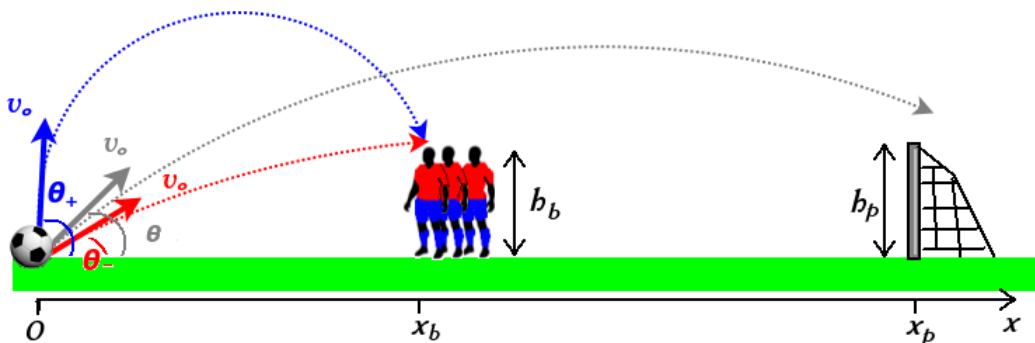


Figura II.14

**** **Esercizio 51**

Un calcio di punizione viene calciato verso la porta con una velocità v_0 di 70 Km/h e un angolo θ di alzo rispetto all'orizzontale. La porta si trova a $x_p=25$ m e ha una altezza di $h_p=2.5$ m. Tra il calciatore e la porta si frappone una barriera a $x_b=10$ m che si può considerare di alta $h_b = 2$ m. Si tratti il pallone come un punto materiale e si trascurino gli effetti dovuti all'aria (cioè l'attrito e l'“effetto” sulla sfera). Quale è l'angolo di alzo minimo θ_m per oltrepassare la barriera? Aggiungendo a questo angolo 10° , riesce la palla a raggiungere la porta?

Moti Relativi

*** **Esercizio 52**

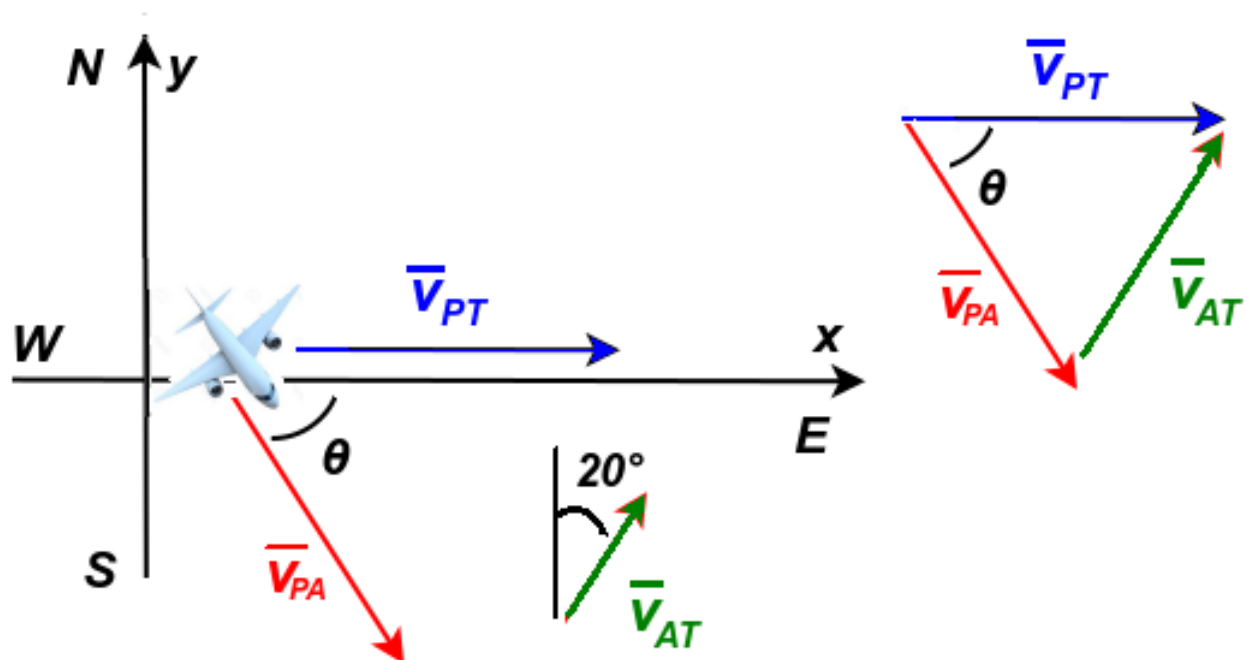


Figura II.15

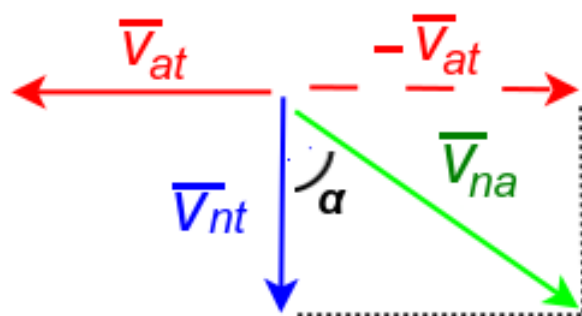


Figura II.16

Per poter volare verso Est un aereo deve tenere conto della direzione del vento. L'aereo (il punto materiale P) ha velocità v_{PA} rispetto all'aria (riferimento A) di modulo 215 Km/h e una direzione che forma un angolo θ verso Sud rispetto alla direzione Est. Il vento costante ha velocità v_{AT} rispetto al terreno (riferimento T) con modulo di 65.0 Km/h e direzione che forma un angolo di 20.0° ad Est rispetto al Nord. Quale è la velocità v_{PT} dell'aereo rispetto al terreno, direzione e verso?

** Esercizio 53

Della neve sta cadendo con una velocità costante di 9.0 m/s (\vec{v}_{nt} velocità neve rispetto al terreno). Un'auto viaggia a v_{at} 14 m/s. A quale angolo α rispetto alla verticale il guidatore vede cadere i fiocchi di neve?

Capitolo III

Statica e Dinamica

La Statica è la parte della Meccanica che studia le condizioni di equilibrio di un corpo materiale, ovvero le condizioni necessarie affinché un corpo, inizialmente in quiete, resti in equilibrio anche dopo l'intervento di forze esterne.

La Dinamica è invece il ramo della meccanica che si occupa dello studio del moto dei corpi e delle sue cause o, in termini più concreti, delle circostanze che lo determinano e lo modificano.

I casi trattati in questo capitolo saranno quelli relativi al punto materiale, una idealizzazione che consiste nel considerare i corpi come corpi puntiformi nei quali viene rappresentata come concentrata tutta la massa. Questa approssimazione è giustificata quando le dimensioni geometriche del corpo possono essere trascurabili allo scopo di studiarne la dinamica.

Concetti Fondamentali

- Leggi di Newton
- forza peso
- forza normale
- forza di tensione in una corda
- forza elastica
- forza di attrito
- diagramma di corpo libero
- forza centripeta
- forze non inerziali

Per la corretta soluzione degli esercizi è importante saper disegnare il diagramma di corpo libero e individuare quando usare un sistema di riferimento inerziale e quando non inerziale

III.1 Le Leggi di Newton

Grazie agli studi di Galileo e Newton fu finalmente chiarito che le forze applicate ad un corpo non provocano il moto, ma la sua variazione. Le leggi della *meccanica newtoniana* e la *relatività galileiana* (Sez. (II.3)) hanno validità nella descrizione della realtà fino a che non siano coinvolte velocità confrontabili con la velocità della luce nel vuoto (*relatività ristretta*) e particelle di dimensioni atomiche (*meccanica quantistica*).

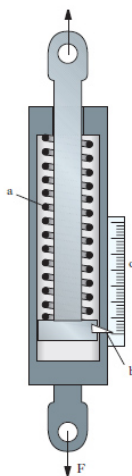


Figura III.1: Dinamometro a deformazione.

III.1.1 Definizione Statica di Forza

Il concetto di *forza* deve il suo nome all'associazione con lo sforzo muscolare che il senso comune ci indicherebbe come necessario per indurre un movimento ad un corpo. Per darne una definizione operativa (come abbiamo visto necessario nella Sez. (I.1.2)), ne adotteremo qui una "statica". Utilizzarne qui una dinamica, basata sui concetti che affronteremo successivamente, porterebbe a informazioni di tipo tautologico. Possiamo definire qui la forza in modo empirico, dicendo che è quella grandezza che viene misurata con uno strumento detto *dinamometro a deformazione* (Fig. (III.1)), costituito da una molla da tarare e da una scala graduata da costruire. Su quest'ultima possiamo segnare uno 0 in assenza di sollecitazione della molla. Poniamo un estremo della molla come fisso. Se all'estremo libero viene applicata una forza, la molla si deformerà. La direzione che assume il dinamometro nello spazio è la direzione della forza; il verso è quello che va dal punto di applicazione all'altra estremità della molla. La Forza ha infatti natura vettoriale.

Scegliamo quindi una forza campione che sia riproducibile costante nel tempo e consideriamola arbitrariamente come unitaria. La cosa più semplice è utilizzare una massa e sfruttare l'attrazione gravitazionale della Terra (*forza peso*). In corrispondenza della relativa deformazione della molla, segniamo un'altra tacca sulla scala, in modo da avere la nostra unità di misura. Con questo sistema potremo costruire tutta la scala.

Tuttavia, l'utilizzo della legge fisica alla base di questa misura della Forza, che vedremo più avanti, necessita tuttavia di assumere, appunto, a priori una relazione fra intensità della forza

e allungamento della molla. Anche se a posteriori si può verificare che le molle di acciaio, entro certo un limite di sollecitazione, si allungano in modo proporzionale all'intensità della forza applicata (Sez. (III.2.2)), possiamo ideare un metodo per evitare di dipendere a priori da tale ipotesi. Definiamo quindi come uguali fra loro due forze che, applicate ciascuna al dinamometro, lo mettono nella stessa direzione e provocano il medesimo allungamento della molla. Prendiamo una forza \vec{F}_3 uguale alla somma di altre due forze \vec{F}_1 e \vec{F}_2 ($\vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$). Applicando \vec{F}_3 da sola al dinamometro, questo viene messo nella stessa direzione e provoca lo stesso allungamento che si avrebbe se si applicassimo contemporaneamente al dinamometro \vec{F}_1 e \vec{F}_2 . In questo modo se due forze sono misurate come uguali da un determinato dinamometro, risulteranno tali anche per qualsiasi altro dinamometro costruito secondo le stesse specifiche, anche se non identico al primo. Ciò naturalmente avviene fino a che la molla non si “sfianchi”, cioè che ritorni sempre nella stessa posizione quando si elimina la forza e che, applicando più volte la stessa forza, si allunghi sempre nella stessa misura e ritorni sullo 0 della scala graduata in assenza di sollecitazione.

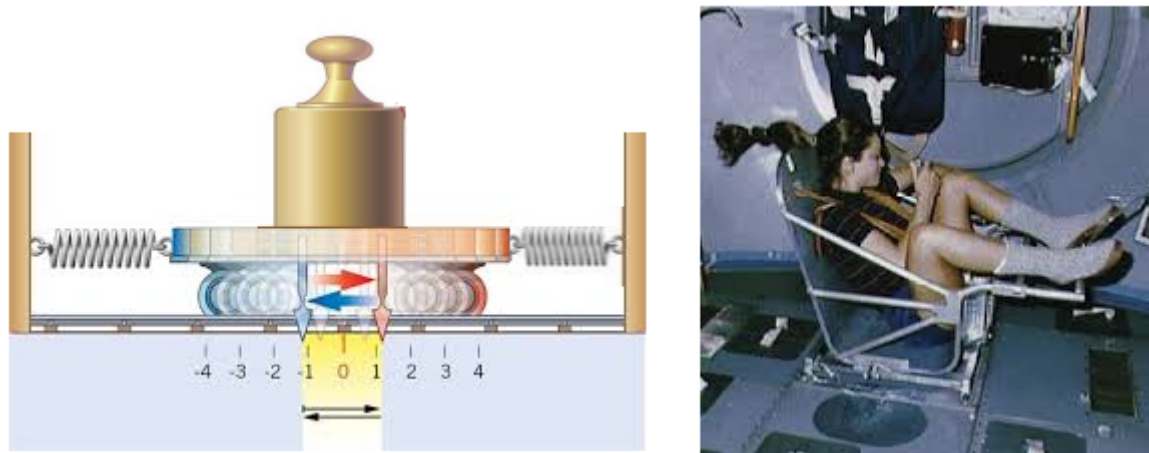


Figura III.2: Carrello delle masse (a sinistra), Body Mass Measurement Device (BMMD) a destra.

III.1.2 La Massa Inerziale

La *massa* è usualmente definita come la “quantità di materia che costituisce un corpo”. Per la sua misura operativa potremmo sfruttare, come nella sezione precedente, l’attrazione gravitazionale e utilizzare un dinamometro per misurarla indirettamente, incappando però nelle stesse ipotesi a priori. Non sarebbe poi in questo modo possibile misurare la massa in ambienti privi di accelerazione di gravità.

In Dinamica si può definire la *massa inerziale*, che determina il comportamento dinamico quando sono soggetti all’influenza di forze esterne. La massa si può definire con uno strumento chiamato *carrello delle masse* (Fig. (III.2) a sinistra), costituito da un carrello su ruote che si muove su rotaie con attrito trascurabile attaccato a due estremi fissi grazie a due molle. Oggetti con massa maggiore sono più difficili da spostare ed eseguono oscillazioni più lente; oggetti più leggeri oscillano più rapidamente. Quindi il periodo T di oscillazione del carrello, misurato con un orologio, è una proprietà che caratterizza la massa del corpo che vi è bloccato sopra.

Una volta bloccata una massa sul carrello si sposta e si misura il conseguente periodo T di oscillazioni. Se due oggetti A e B hanno la stessa massa, il periodo di oscillazioni misurato è lo stesso. Un corpo C che ha massa m_C pari alla somma delle masse $m_A + m_B$ posto da solo sul carrello, produce oscillazioni con un periodo uguale a quello che si misura ponendo contemporaneamente sul carrello gli oggetti A e B . Come per il dinamometro, usiamo il carrello solo per confrontare le masse di oggetti diversi e stabilire una regola di somma, senza fare alcuna ipotesi su quale sia nel dettaglio la relazione che lega il periodo d'oscillazione alla massa posta sul carrello. In questo modo due masse che risultano uguali se misurate su un determinato carrello, lo risulteranno anche se misurate con un carrello diverso. Se a questo punto scegliamo un oggetto arbitrario e gli attribuiamo la massa unitaria, possiamo costruire una scala di masse.

Per misurare la massa degli astronauti nello spazio si utilizza una specie di sedia montata su un carrello delle masse: l'astronauta si "pesa" entrando nella sedia e registrando il periodo con cui essa oscilla avanti e indietro. Questo dispositivo, in Fig. (III.2) a destra, si chiama BMMD (Body Mass Measurement Device).

La massa è una grandezza scalare e le sue dimensioni sono: $[m] = [L^0 M^1 T^0]$. In SI si misura in kg.

III.1.3 Prima Legge di Newton

Prima di Galileo, la spiegazione accettata da circa 2000 anni riguardo al moto era quella di Aristotele, secondo il quale un corpo tende a fermarsi se non vi è una forza a sostenere il moto. È questa una intuizione dovuta all'osservazione della Natura, che però non tiene conto del fatto che ogni corpo in movimento sulla Terra è a contatto con altri corpi e ciò ne ostacola il movimento. Galileo riportò una prima enunciazione di quello che viene conosciuto come *principio di inerzia* nel "Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo" (1632) sia nei "Discorsi" (1638), in seguito ai suoi studi sperimentali. Nel Dialogo, Galileo scrive:

[...] il mobile durasse a muoversi tanto quanto durasse la lunghezza di quella superficie, nè erta nè china; se tale spazio fusse interminato, il moto in esso sarebbe parimenti senza termine, cioè perpetuo

In "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", pubblicato in latino il 5 luglio 1687, Newton riporta la prima legge:

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare

In italiano si traduce come "ogni corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme se non è costretto a mutare tale stato da una qualche forza impressa". Una formulazione più attuale è invece la seguente:

I° Legge di Newton

In assenza di interazioni con altri corpi, è sempre possibile determinare un sistema di riferimento in cui un corpo o è fermo o si muove di moto rettilineo uniforme.

Un tale sistema di riferimento si chiama *riferimento inerziale* e la legge ne stabilisce l'esistenza. In generale i possibili sistemi inerziali sono infiniti e si muovono uno rispetto all'altro di moto traslatorio rettilineo e uniforme. Su questo argomento torneremo nella Sez. (III.3.2), dove tratteremo i sistemi di riferimento che non soddisfano questo requisito e la conseguenza dinamica di ciò. Nella Fisica Classica la nozione di velocità è relativa al sistema di riferimento e solo relativamente a quest'ultimo si può affermare che un corpo sia in moto rettilineo uniforme oppure in quiete ^[1]

III.1.4 Seconda Legge di Newton

Gli esperimenti mettono in luce una relazione fra la somma delle forze applicate a un corpo (cioè la *risultante*) e l'accelerazione del medesimo. In particolare poi la relazione risulta di proporzionalità fra forza e accelerazione. Newton scrisse:

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

che, nella sua versione attuale, diventa:

II° Legge di Newton

In un sistema di riferimento inerziale l'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale alla somma delle forze che gli altri corpi esercitano su di esso e inversamente proporzionale alla sua massa inerziale.

Possiamo riformularla come: *la somma $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$ delle forze applicate a un corpo equivale al prodotto della sua massa per la sua accelerazione, che ha stessa direzione e verso di \vec{F}* e scrivere questa legge come formula:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (\text{III.1})$$

Abbiamo quindi una definizione dinamica di forza e di una nuova unità di misura in SI. Si definisce la forza unitaria di 1 Newton (simbolo N) quella che applicata ad un corpo avente massa di 1 kg produce una accelerazione di $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Dimensionalmente:

$$[F] = [L^1 M^1 T^{-2}] \quad (\text{III.2})$$

III.1.5 Terza Legge di Newton

È esperienza comune che le forze vengano esercitate tra i corpi per mezzo dell'interazione con altri corpi. A seconda della natura delle forze coinvolte, le forze possono avvenire per contatto diretto oppure anche per azione a distanza (come per avviene tra una massa e la Terra), un concetto quest'ultimo che risultava incredibile prima di Newton, cioè in assenza di un mediatore ^[2]. Gli esperimenti suggeriscono anche che le forze che i due corpi interagenti si

^[1]La Fisica Aristotelica sarebbe potuto essere misurato rispetto al centro dell'Universo.

^[2]Cartesio aveva proposto l'*etere*, un mezzo fittizio del quale venne successivamente dimostrata sperimentalmente la non esistenza.

applicano reciprocamente siano uguali in modulo, dirette lungo la linea che collega i punti di applicazione, con verso opposto. Newton scrisse:

Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.

che possiamo attualizzare come:

III° Legge di Newton

I corpi interagiscono sempre a due a due; nell'interazione ciascun corpo esercita sull'altro una forza e le due forze sono fra loro uguali in modulo, opposte in verso e dirette lungo la linea che collega i punti di applicazione.

La terza legge di Newton è anche conosciuta come *principio di azione e reazione* ^[3]. Se un corpo A esercita su un corpo B una forza \vec{F}_{AB} (applicata sul corpo B), ad essa si associa una forza \vec{F}_{BA} (applicata sul corpo A) dello stesso tipo esercitata da B su A tale che:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \quad (\text{III.3})$$

Ciò è equivalente a dire che le forze si manifestano a coppie e che non esiste una singola forza isolata. Ciò può portare erroneamente a pensare che l'effetto sia quello di cancellarsi a vicenda; bisogna infatti ricordare che le due forze sono applicate a corpi diversi. Se la Terra esercita una forza gravitazionale su una piccola massa, anche quest'ultima ne esercita una uguale e opposta verso la Terra, che dovrebbe quindi essere accelerata. Tuttavia, per via della grande differenza di massa, l'effetto sulla Terra è del tutto trascurabile.

III.2 La Forza

III.2.1 La Forza Peso

Ai tempi di Galileo vigeva ancora la visione di Aristotele, secondo il quale l'Universo era composto da sfere concentriche, ognuna associata ad un certo tipo di sostanza dalla diversa "pesantezza" o "leggerezza". Ogni corpo quindi avrebbe dovuto tendere verso la zona alla quale competeva la sua natura e la velocità di caduta sarebbe dovuta essere proporzionale al peso del corpo. L'esperienza sembrava verificare che gli oggetti "pesanti" cadessero verso il basso più velocemente di quelli "leggeri". Tuttavia, questa esperienza non teneva conto della presenza dell'attrito, che agisce sui corpi in maniera diversa. Gli esperimenti di Galileo stravolsero questa visione. In particolare, attraverso i suoi esperimenti con il piano inclinato, posero le basi per il moto uniformemente accelerato, dimostrando sperimentalmente che lo spazio percorso è proporzionale al quadrato del tempo ^[4].

^[3]Nella Dinamica newtoniana le interazioni tra i corpi sono considerate istantanee, assunzione che fu dimostrata errata da Einstein alla luce dei dati sperimentali riguardanti i fenomeni elettromagnetici.

^[4] Galileo aveva già precedentemente osservato come il ragionamento aristotelico portasse a conclusioni errate. Supponiamo di avere due corpi omogenei e che uno abbia volume più grande dell'altro. Secondo Aristotele l'og-

Se disponiamo di n oggetti di masse diverse m_1, m_2, \dots, m_n e li appendiamo verticalmente ad un dinamometro, troveremo che un rapporto costante tra la forza letta dallo strumento e la massa:

$$\frac{F_1}{m_1} = \frac{F_2}{m_2} = \dots = \frac{F_n}{m_n} = g \quad (\text{III.4})$$

La costante g è il modulo dell'accelerazione di gravità ed ha un valore medio di 9.81 m/s^2 . Questo valore cambia sulla superficie terrestre a seconda della latitudine per due motivi:

- l'effetto della *forza centrifuga* dovuta alla rotazione terrestre (si veda la Sez. (??))
- la diversa lontananza dal centro della Terra, essendo la Terra una sfera solo per approssimazione, essendo più schiacciata ai poli

Quindi la *forza peso* \vec{F}_g o \vec{P} sulla superficie terrestre può essere scritta come:

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \quad (\text{III.5})$$

ed è costante nello stesso luogo e per altitudini non troppo elevati. La forza peso in Fisica Classica può essere inglobata all'interno della più generale *Legge di Gravitazione Universale* di Newton.

A questo punto ci aspettiamo che esista una relazione tra *massa inerziale* e *massa gravitazionale*, la cui definizione operativa può essere data attraverso la *bilancia*, i cui due bracci sono in equilibrio se i rispettivi piatti sono vuoti. La massa misurata attraverso la bilancia risulta indipendente dal luogo, cioè dal valore dell'accelerazione di gravità. In Fisica Classica la coincidenza tra il valore della massa inerziale e quella gravitazionale è sperimentale e non concettuale ^[5].

III.2.2 Forza Elastica

La *forza elastica* \vec{F}_e è generata da un corpo deformabile, come una molla, ed è sempre diretta nella stessa direzione e verso contrario della deformazione. Considerando una lunghezza a riposo della molla (cioè in assenza di sollecitazioni che ne inducano una deformazione), sia \vec{d} la variazione di lunghezza in seguito alla sollecitazione. Prendendo ad esempio l'estremo sinistro della molla come fisso avremo che \vec{d} ha verso positivo se la molla viene allungata verso destra e negativo in caso di compressione. La forza elastica segue quindi la *Legge di Hooke*:

$$\vec{F}_e = -k\vec{d} \quad (\text{III.6})$$

La costante k è detta *costante elastica* e caratterizza il comportamento di una molla ideale che mantiene inalterata la forza che può esercitare, indipendentemente dall'oscillazione. Si tratta di una forza variabile sia in modulo che in verso, mentre la direzione è sempre quella individuata dalla lunghezza della molla.

getto con maggior volume dovrebbe cadere più velocemente. Si immagini di unire i due corpi con una bacchetta. Dall'unione si otterrebbe un corpo più voluminoso e si potrebbe pensare che il corpo meno voluminoso "rallenti" quello più voluminoso, ottenendo una velocità media del corpo totale più piccola di quella del corpo più grande. Eppure, il nuovo corpo è più voluminoso dei precedenti, pertanto dovrebbe cadere a velocità più elevata. Si arriva quindi ad un assurdo.

^[5]Per risolvere questo problema è stato necessario attendere il *principio di equivalenza* di Einstein

III.2.3 Reazioni Vincolari

Il *vincolo* è una condizione che limita totalmente o parzialmente il moto del corpo e in Fisica Classica si esplica attraverso forze chiamate *reazioni vincolari*. La presenza di un vincolo limita i *gradi di libertà* di un corpo, cioè il numero di variabili che sono necessarie per descriverne la posizione in funzione del tempo. Un punto materiale libero di muoversi nello spazio avrà 3 gradi di libertà, se vincolato a muoversi su un piano ne avrà due, uno se è vincolato a muoversi lungo una sola direzione.

A differenza delle altre forze, delle quali sappiamo l'entità e ne calcoliamo l'effetto, non conosciamo a priori l'intensità delle forze vincolari, ma solo il suo effetto nel limitare il moto. Un *vincolo liscio* o *ideale* è un vincolo che esercita la sua influenza nel limitare uno o più gradi di libertà senza minimamente influenzare quelli permessi, ad esempio tramite l'introduzione di *forze di attrito*. Se un vincolo impedisce il movimento in un verso ma non nell'altro si parla di *vincolo unilatero*, altrimenti di *vincolo bilatero*. Un esempio per il primo caso sono le rotaie di un treno (niente impedisce in teoria al treno di staccarsi dalle rotaie verso l'alto). Per il secondo possiamo pensare alle montagne russe, le cui rotaie impediscono al carrello di spostarsi in entrambi i versi della direzione ortogonale alla pista. La *reazione normale* e la *tensione* sono due casi di forze vincolari.

La *forza normale* è il caso di vincolo unilatero, rappresentabile come una forza \vec{N} che agisce perpendicolarmente ad un piano. Questa forza impedisce ad i corpi materiali di compenetrarsi e fisicamente si può pensare generata a partire da una deformazione che avviene sul materiale del piano, le cui molecole "spingono" in direzione ortogonale alla superficie per tornare alla forma originaria.

La *tensione* \vec{T} è una forza che si esercita nella direzione del filo per mantenere un corpo vincolato ad esso. Generalmente si considera di avere a che fare con un filo ideale, cioè indeformabile e di massa trascurabile.

III.2.4 Forza di Attrito

Nel caso di due corpi che strisciano l'uno sull'altro oppure in quello di un corpo che si muova all'interno di un fluido si manifestano delle *forze di attrito* che ne impediscono il moto. Qui tratteremo il primo caso, in cui abbiamo a che fare con un piano che esercita un vincolo non liscio, ovvero *scabro* e la forza di attrito si comporta come una componente parallela al piano della forza vincolare. A questo punto bisogna distinguere due casi, a seconda se in corpo sia in quiete rispetto al piano oppure in moto. Nel primo caso, abbiamo a che fare con l'*attrito statico*:

$$\vec{F}_s = \mu_s N \hat{F}_s \quad (\text{III.7})$$

dove μ_s è il *coefficiente di attrito statico* e N è il modulo della forza normale. \hat{F}_s è il versore che individua la direzione e verso della forza di attrito statico. Bisogna infatti fare attenzione a non scrivere:

$$\vec{F}_s = \mu_s \vec{N} \quad \text{Errore!!} \quad (\text{III.8})$$

dato che la direzione di \vec{N} è ortogonale al piano, mentre la forza di attrito è sempre parallela ad essa. Il verso di \vec{F}_s è tale da opporsi ad una forza \vec{F} parallela al piano che tenda a mutare lo

stato di quiete del corpo rispetto al piano. Se il modulo di \vec{F}_s risulta maggiore di quello di \vec{F} , lo stato di quiete non relativa non viene modificato.

Il caso di *attrito dinamico* invece è caratterizzato dall'equazione:

$$\vec{F}_a = \mu_a N \hat{F}_a \quad (\text{III.9})$$

dove $\mu_a \leq \mu_s$ è il *coefficiente di attrito dinamico*, mentre il versore \hat{F}_a ha direzione parallela al piano e verso tale ad opporsi alla velocità relativa $\vec{v} \neq 0$ tra il corpo e il piano.

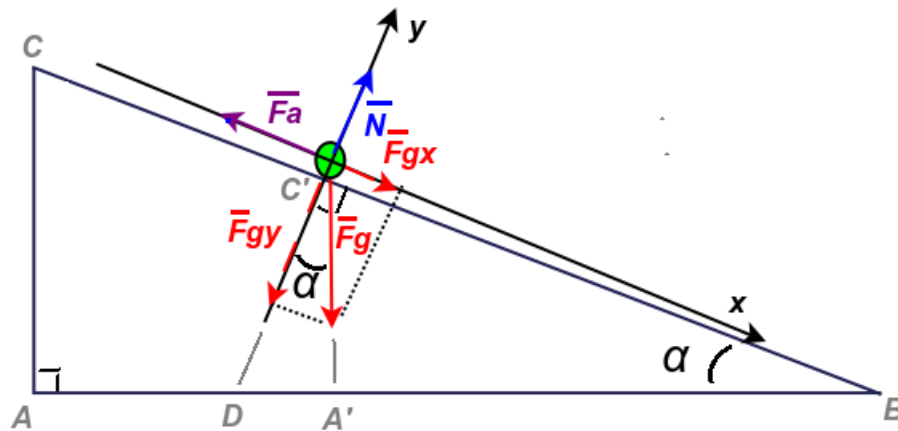


Figura III.3

III.3 Il Piano inclinato

Consideriamo il piano inclinato in Fig. (III.3), sul quale è poggiato un punto materiale. L'angolo che determina l'inclinazione del piano è l'angolo α . Un modo conveniente per scegliere il sistema di riferimento è quello di porre l'asse x lungo il piano e l'asse y normale ad esso. In questo sistema di riferimento, la forza normale \vec{N} risulta $N\hat{j}$, mentre la forza peso \vec{F}_g , che è sempre diretta verticalmente, risulta quindi avere una componente non nulla lungo ciascuno degli assi.

I triangoli \widehat{ABC} e $\widehat{A'BC'}$ sono simili. Quindi l'angolo $A'\hat{C}'B$ è uguale a $A\hat{C}B$. L'angolo $D\hat{C}'B$ è rettangolo per costruzione dell'asse y . Quindi l'angolo $D\hat{C}'A'$ è il complementare di $A'\hat{C}'B$. Quindi l'angolo $D\hat{C}'A'$ è uguale ad α . Da questa considerazione geometrica troviamo le componenti di \vec{F}_g sugli assi:

$$\begin{cases} \vec{F}_{gx} = -mg \sin \alpha \hat{j} \\ \vec{F}_{gy} = mg \cos \alpha \hat{i} \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Dato che, per via del vincolo, il corpo non può penetrare il piano, deve essere che:

$$\vec{N} - F_{gy} = \vec{0} \quad (\text{III.11})$$

che porta a trovare:

$$N = mg \cos \alpha \quad (\text{III.12})$$

Il moto lungo la direzione permessa dal vincolo risulta quindi determinato da $F_{gy}^{\vec{}}$:

$$F_{gx}^{\vec{}} = m\vec{a} \quad (\text{III.13})$$

con \vec{a} che sarà quindi $a\hat{i}$. Una volta scelto il sistema di riferimento possiamo anche evitare la notazione vettoriale se studiamo indipendentemente la dinamica sui due assi, avendo cura di assegnare i segni opportuni alle componenti in base al loro segno.

Se il vincolo non è liscio, dovremo introdurre anche le forze di attrito. Cerchiamo quindi di trovare il valore minimo per il coefficiente di attrito statico μ_s per avere la staticità di un corpo di massa m e successivamente, nel caso di corpo in movimento, cosa succede quando il coefficiente di attrito dinamico μ_d è uguale e poi minore a quel valore.

Nel primo caso, per avere l'equilibrio:

$$\left\{ \begin{array}{l} x : \underbrace{mg \sin \alpha}_{F_{gx}} = \underbrace{\mu_s N}_{F_a} \\ y : \underbrace{mg \cos \alpha}_{F_{gy}} = N \end{array} \right.$$

Dividendo la prima per la seconda si ricava il valore minimo per μ_s , quindi per avere staticità:

$$\mu_s \geq \tan \alpha$$

Se il corpo è in movimento (con verso quello positivo dell'asse x), abbiamo per il caso:

$$\mu_d = \tan \alpha$$

Questo è un caso di *equilibrio dinamico*, in cui la forza di attrito annulla l'effetto della forza peso. Quindi, nel caso in cui il corpo abbia una velocità iniziale diversa da 0 diretta lungo \hat{i} o \hat{j} , l'accelerazione è zero e il corpo si muove in moto rettilineo uniforme, mantenendo la sua velocità originaria. Nel caso in cui:

$$\mu_d < \tan \alpha$$

Abbiamo un moto uniformemente accelerato lungo il verso positivo di x , con accelerazione:

$$m a_x = \underbrace{mg \sin \alpha - \mu_d mg \cos \alpha}_F$$

$$a_x = g(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)$$

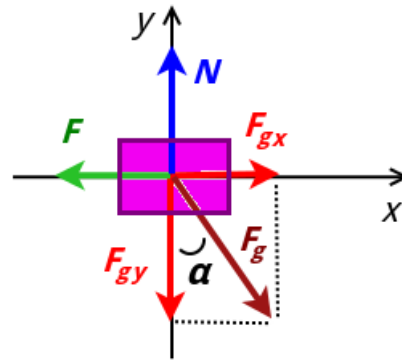


Figura III.4: Diagramma di corpo libero per un punto materiale sul piano inclinato.

III.3.1 Il diagramma di corpo libero

Il *diagramma di corpo libero* è usato per costruire una rappresentazione schematica delle forze che agiscono sul corpo. Per costruirlo si disegna una semplice rappresentazione geometrica del corpo e un sistema di riferimento. Tutte le forze esterne (comprese le reazioni vincolari) che agiscono sul corpo devono quindi essere rappresentate sul diagramma tramite la notazione vettoriale. In generale, il disegno di queste forze deve rispettare il punto di applicazione di quest'ultime. Se il sistema di riferimento è non inerziale, devono essere rappresentate le forze apparenti (si veda la Sez. (III.3.2)). Nel caso di un punto materiale, che stiamo in questo momento trattando, si possono considerare tutte le forze applicate al centro del corpo (approssimazione che non vale nel caso di corpi rigidi). In Fig. (III.4) c'è la rappresentazione del diagramma di corpo libero nel caso del corpo sul piano inclinato visto nella Sez. (III.3).

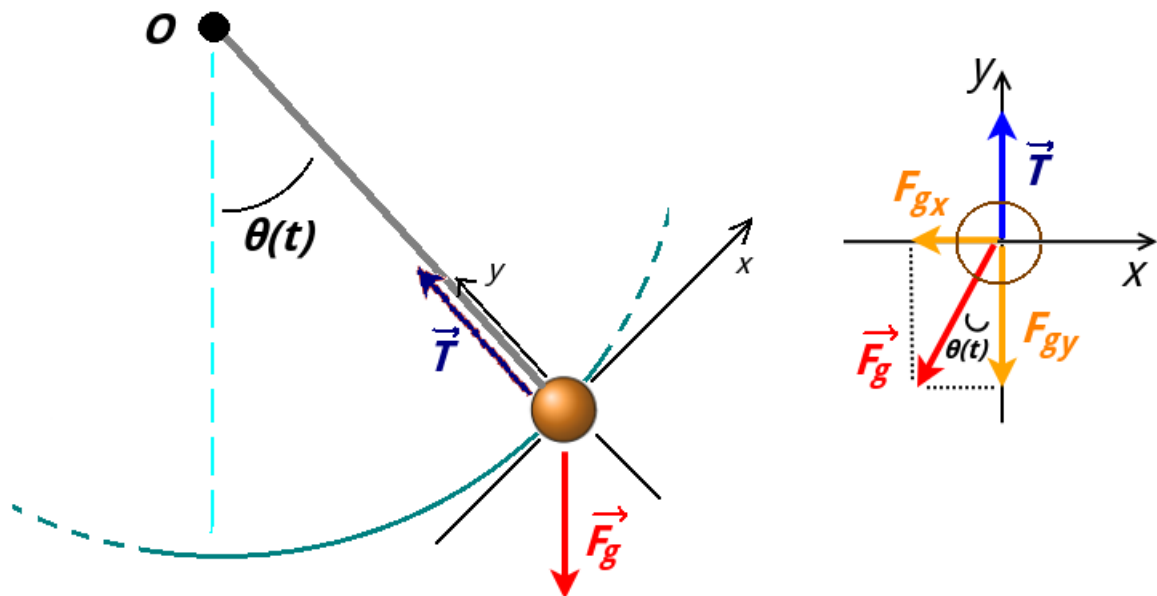


Figura III.5: Schematizzazione e diagramma di corpo libero per un pendolo semplice nell'istante t .

Possiamo usare il diagramma di corpo libero per studiare ad esempio il *pendolo semplice*,

già incontrato in Sez. (I.1.3) (dove, attraverso l'analisi dimensionale avevamo previsto che la durata del periodo doveva essere indipendente dalla massa del corpo, direttamente proporzionale alla radice della lunghezza del filo e inversamente proporzionale alla radice dell'accelerazione di gravità). Il pendolo semplice è costituito da un filo inestensibile lungo l e di massa trascurabile disposto sul piano verticale, con un estremo fisso ad un punto O e l'altro vincolato ad un corpo di massa m , considerato come un punto materiale. In Fig. (III.5) c'è la sua schematizzazione, a sinistra, e il diagramma di corpo libero, a destra, per il pendolo semplice in un'istante t , quando l'angolo che il filo forma con la verticale è $\theta(t)$. Il sistema di riferimento inerziale (dal punto di vista di un osservatore fermo che guarda il pendolo) è solidale con il corpo e gli assi x e y rispettivamente in direzione tangente e radiale all'arco di circonferenza che costituisce la traiettoria. Dal diagramma di corpo libero si ricavano le componenti di $\vec{F}_g = m\vec{g}$ sugli assi:

$$F_{gx} = -F_g \sin \theta(t) \quad (\text{III.14})$$

$$F_{gy} = -F_g \cos \theta(t) \quad (\text{III.15})$$

Lungo l'asse y non abbiamo movimento lungo della massa lungo la direzione del filo e abbiamo:

$$ma_c = T - mg \cos \theta \quad (\text{III.16})$$

dove a_c è l'accelerazione centripeta. La tensione del filo, oltre che annullare la componente lungo y della forza peso, svolge da forza centripeta (che verrà trattata nella Sez. (III.3.3)). L'accelerazione che ne risulta è una accelerazione normale allo spostamento che determina la rotazione della velocità tangenziale. Quindi la tensione del filo in funzione del tempo è:

$$T = m(g \cos \theta + l\omega^2(t)) \quad (\text{III.17})$$

Per l'asse x abbiamo:

$$ma(t) = mg \sin \theta(t) \quad (\text{III.18})$$

L'angolo $\theta(t)$ è dato da:

$$\theta(t) = \frac{s(t)}{l} \quad (\text{III.19})$$

dove $s(t)$ è l'arco. Derivando:

$$\omega = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{v(t)}{l} \quad (\text{III.20})$$

dove si ritrova la pulsazione ω . Derivando ancora si può introdurre l'accelerazione angolare α :

$$\alpha = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{a(t)}{l} \quad (\text{III.21})$$

Sostituendo nella Fig. (III.18):

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{g}{l} \sin \theta(t) \quad (\text{III.22})$$

abbiamo quindi trovato un'equazione differenziale che descrive la cinematica del sistema. Facciamo l'*approssimazione di piccole oscillazioni*, per la quale possiamo approssimare, per ampiezze di oscillazioni piccole:

$$\sin \theta \approx \theta \quad (\text{III.23})$$

La Fig. (III.22) diventa:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{g}{l}\theta(t) \quad (\text{III.24})$$

La soluzione di questa equazione differenziale è la forma dell'equazione cinematica di un moto armonico:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{III.25})$$

dove ϕ è una fase iniziale, θ_0 l'ampiezza dell'oscillazione e la pulsazione è:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (\text{III.26})$$

e quindi il periodo è:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (\text{III.27})$$

confermando il risultato qualitativo trovato con l'analisi dimensionale in Sez. (I.1.3) e trovando la costante adimensionale uguale a 2π .

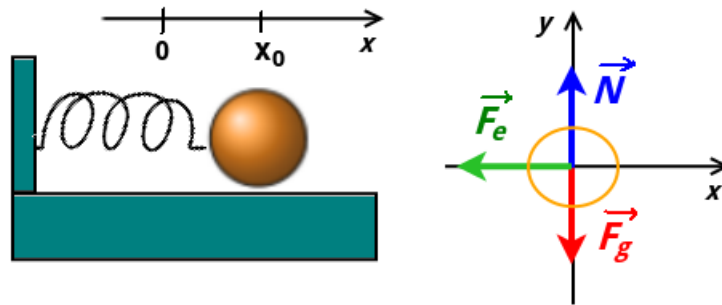


Figura III.6: Schematizzazione e diagramma di corpo libero per un punto materiale poggiato su un piano orizzontale e vincolato ad una molla.

In Fig. (III.6) abbiamo un punto materiale poggiato su un piano orizzontale e vincolato ad una molla di costante elastica k . Scegliamo come origine dell'asse x il punto in cui la molla è a riposo. Supponiamo che al tempo $t = 0$ abbiamo posizionato l'oggetto alla coordinata $x(0) = x_0$ e abbandonato da fermo ($v(0) = 0$). La molla si sarà allungata di una lunghezza x_0 . Nel diagramma di corpo libero abbiamo che lungo l'asse y le forze si annullano. Sull'asse x invece:

$$ma = F_e \quad (\text{III.28})$$

da cui:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (\text{III.29})$$

Anche in questo caso la soluzione è un moto di tipo moto armonico dalla forma:

$$x(t) = d \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{III.30})$$

dove la pulsazione è:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{III.31})$$

sostituendo le condizioni iniziali $x(0) = x_0$ e $v(0) = 0$, si trova:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad (\text{III.32})$$

Il periodo sarà quindi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{III.33})$$

Si spiega quindi perché nel carrello delle masse in Sez. (III.1.2) si può fare una misura della massa inerziale tramite la misura del periodo di oscillazione.

III.3.2 Sistemi di Riferimento Non Inerziali

In Sez. (III.1.3) abbiamo visto che se un corpo non interagisce con nessun altro corpo (e quindi non vi sono forze applicate ad esso), è sempre possibile individuare un sistema in cui questo è in quiete o si muove in moto rettilineo uniforme. Tale sistema di riferimento è un sistema di riferimento inerziale e l'oggetto al suo interno è in *equilibrio*.

Nella pratica individuare un sistema di riferimento di questo tipo è possibile sono in approssimazione. Un riferimento fisso a Terra può essere approssimativamente trattata come un sistema inerziale. Nello studio di una palla che si muove su un campo di calcio possiamo determinare la natura di tutte le forze che ne determinano la dinamica in ottima approssimazione. Tuttavia, è possibile evidenziare la sua natura non inerziale, dovuta alla rotazione terrestre attorno al suo asse, ad esempio percorrendo tragitti lunghi che vanno dal polo Nord al polo Sud. In quel caso vedremmo che il corpo sottoposto ad una accelerazione verso Ovest, senza riuscire ad identificare, all'interno del sistema di riferimento scelto, la natura di questa accelerazione e la forza che la determina. Questa accelerazione è dovuta proprio al fatto che il sistema di riferimento solidale con la Terra sta ruotando (e quindi accelerando, come visto in Sez. (II.2.2)) verso Est. Queste forze non identificabili e dovute soltanto alla scelta di un sistema di riferimento non inerziale sono chiamate *forze apparenti e fittizie*.

Ad esempio, la forza apparente prima descritta è la *forza di Coriolis* ed è alla base dei sistemi ciclonici e anticiclonici in atmosfera, oltre che alla deviazione nella traiettoria di oggetti a lunga gittata, come aerei e missili. Nel *pendolo di Foucault* si vede che il piano di oscillazione del pendolo appare ruotare attorno ad un asse verticale con il passare delle ore. Quello che

succede è che il piano di oscillazione del pendolo ha orientamento fisso e attorno ad esso ruota il pavimento insieme alla Terra. Un sistema di riferimento inerziale migliore sarebbe uno con origine nel Sole e assi orientati rispetto alle stelle cosiddette “fisse” (cioè che non appaiono apparentemente in moto relativo tra loro).

Consideriamo quindi quello che accade in un sistema di riferimento *non inerziale*. Supponiamo di considerare un osservatore B posto su un treno che si muove in moto rettilineo uniforme con velocità v rispetto all’osservatore A fermo a terra. L’osservatore B, all’interno di un vagone, pone una sfera su un tavolo e vede questa rimanere in equilibrio e in quiete. L’osservatore A a terra vedrà la sfera che si muove di moto rettilineo uniforme uguale con velocità uguale a quella del treno. Immaginiamo ora che il treno cominci a frenare e osserviamo il fenomeno dal punto di vista di A. Se la sfera non è vincolata a stare ferma sul tavolo, continuerà a muoversi con la stessa velocità v che aveva prima della frenata, comportandosi come un punto libero. L’osservatore A riconoscerà che la velocità relativa che si instaurerà al passare del tempo tra la sfera e il treno è dovuta alla decelerazione del treno, mentre la sfera resta un punto libero.

L’osservatore B osserva invece che la sfera subisce (rispetto al treno, al quale l’osservatore è solidale) un’accelerazione, dato che vede la sfera, inizialmente ferma, muoversi accelerando. Per B è naturale imputare tale fenomeno alla presenza di una forza, pur non essendoci nell’ambiente nessun oggetto responsabile di questa interazione. Quindi B associa all’accelerazione di B una forza apparente F_{ap} . Che si tratti di una forza vera e propria è manifesto dal fatto che per annullarla (e far rimanere la sfera ferma sul tavolo e quindi ferma rispetto al suo sistema di riferimento non inerziale) è necessario applicare sulla sfera una forza F uguale ed opposta.

Per l’osservatore inerziale A, F è una forza che va applicata alla sfera affinché essa decelerino insieme al treno. Per l’osservatore non inerziale B invece F si tratta di una forza necessaria per annullare l’effetto della forza apparente F_{ap} .

A differenza di quello che succedeva in Sez. (II.3), dove avevamo due sistemi di riferimento che si muovono in moto relativo con velocità costante, l’accelerazione di un oggetto P non è più la stessa se misurata nei due sistemi, se uno di questi è non inerziale. Supponiamo che il sistema di riferimento non inerziale sia in accelerazione \vec{A} rispetto all’altro. Secondo il sistema inerziale su un oggetto di massa m è applicata una forza F . Quindi, per la seconda legge di Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (\text{III.34})$$

L’accelerazione misurata nel sistema non inerziale sarà:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A} \quad (\text{III.35})$$

Quindi misurerà anche una forza \vec{f}' :

$$\vec{f}' = m\vec{a}' = \vec{f} - m\vec{A} \quad (\text{III.36})$$

cioè non misura una forza soltanto data con l’interazione di oggetti, ma anche il contributo della forza apparente $-m\vec{A}$, che si chiama *forza d’inerzia*. L’accelerazione \vec{A} è una *accelerazione di trascinamento*.

In un sistema di riferimento non inerziale, ad esempio che sta traslando in moto rettilineo uniformemente accelerato, un oggetto sarà descritto attraverso una forza di trascinamento nel relativo diagramma di corpo libero.

III.3.3 Forze nel Moto Circolare Uniforme

Abbiamo visto in Sez. (II.2.2) che un corpo in moto circolare uniforme è sottoposto ad una accelerazione centripeta \vec{a}_c , il cui modulo a_c :

$$a_c = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} = \omega v \quad (\text{III.37})$$

la sua direzione è quella radiale, con il verso dato dal versore \hat{n} che punta verso il centro della circonferenza. Mettiamoci quindi in un sistema di riferimento inerziale A che osserva questo oggetto. Perché sia mantenuto il moto circolare uniforme è necessario che l'interazione con un altro oggetto produca una *forza centripeta*:

$$\vec{F}_c = m a_c \hat{n} \quad (\text{III.38})$$

questa forza ha stessa direzione verso dell'accelerazione centripeta e viene "interpretata" da varie forze che possono realizzare l'interazione con il corpo in movimento. Ad esempio, nel caso di un sasso attaccato ad una corda, la \vec{F}_c viene prodotta dalla forza di tensione \vec{T} . Nel caso di una macchina che percorre una curva invece dalla forza di attrito \vec{F}_a tra le gomme e la strada. Per l'osservatore inerziale A quindi avremo l'equazione dinamica descritta dalla (III.38) e il problema per A verte la Dinamica.

Analizziamo invece lo stesso problema dal punto di vista di un osservatore non inerziale B che si trova solidale con il sistema che sta ruotando. In questo sistema compare una accelerazione di trascinamento $-\vec{a}_c$ dovuta al fatto che il sistema di riferimento sta ruotando. Assocerà quindi ad essa una forza apparente \vec{F}_τ detta *forza centrifuga*:

$$\vec{F}_\tau = m a_c \hat{r} \quad (\text{III.39})$$

La forza centrifuga appare con direzione e verso data dal versore $\hat{r} = \hat{r}$, quindi per l'osservatore non inerziale B è percepita come una forza che tende il corpo ad allontanarsi dal centro di rotazione. Per B quindi, per mantenere in rotazione il corpo sulla circonferenza è necessario che vi sia una forza "reale", come la tensione di una corda nel caso del sasso, che annulli esattamente il contributo della forza centrifuga. Quindi, lo stesso problema fisico è descritto dall'osservatore non inerziale come un problema di Statica.

Riepilogo Formule

- *Seconda Legge di Newton*

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

- *Forza Peso*

$$\vec{F}_g = m \vec{g}$$



Figura III.7: A sinistra: *Aristotele* (Stagira, 384 a.C - Calcide, 322 a.C.). Al centro: *Galileo Galilei* (Pisa, 15 febbraio 1564 - Arcetri (Firenze), 8 gennaio 1642). A destra: *Isaac Newton* (Woolsthorpe-by-Colsterworth (Lincolnshire), 25 dicembre 1642 - Londra, 20 marzo 1727).

- *Forza Elastica*

$$\vec{F}_e = -k\vec{d}$$

dove \vec{d} è la deformazione della molla.

- *Forza di Attrito Statico*

$$|\vec{F}_a| = \mu_s |\vec{N}| (-\hat{w})$$

dove \hat{w} è il versore che indica direzione e verso del possibile spostamento del corpo dovuto ad altre forze.

- *Forza di Attrito Dinamico*

$$|\vec{F}_a| = \mu_d |\vec{N}| (-\hat{w})$$

dove \hat{w} è il versore che indica direzione e verso della velocità del corpo.

- *Forza Centripeta*

$$\vec{F}_c = ma_c \hat{n}$$

- *Forza Centrifuga*

$$\vec{F}_\tau = ma_c \hat{r}$$

Esercizi

Leggi di Newton

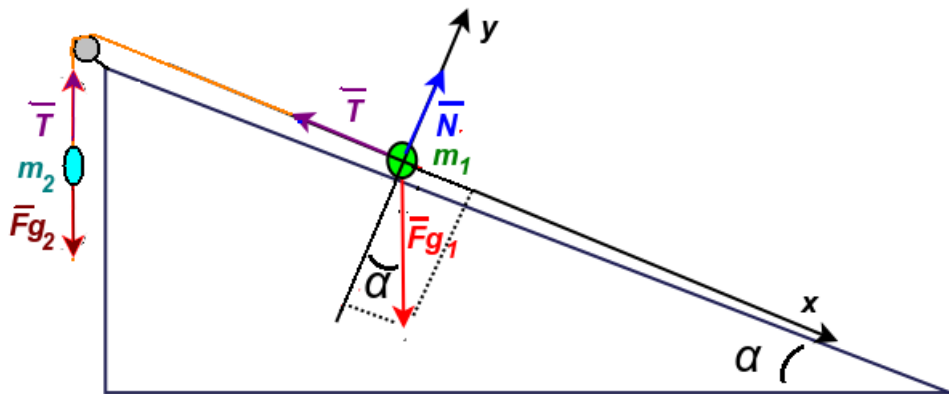


Figura III.8

* Esercizio 54

Due masse sono collegate da una corda inestensibile e una carrucola, come in figura III.8. Qual è il rapporto tra le masse m_1 e m_2 che garantisce la staticità del sistema ($\alpha = 30^\circ$)?

** Esercizio 55

Un punto materiale si muove risalendo una guida rettilinea con attrito inclinata di un angolo $\alpha = 30^\circ$. Nell'istante $t = 0$ (quando l'oggetto si trova all'inizio della guida), la sua velocità ha modulo $v = 5.0$ m/s, direzione parallela alla guida e verso che punta in salita. Dopo che ha percorso una distanza $l = 2.0$ m, la sua velocità diventa 0. Calcolare μ_d .

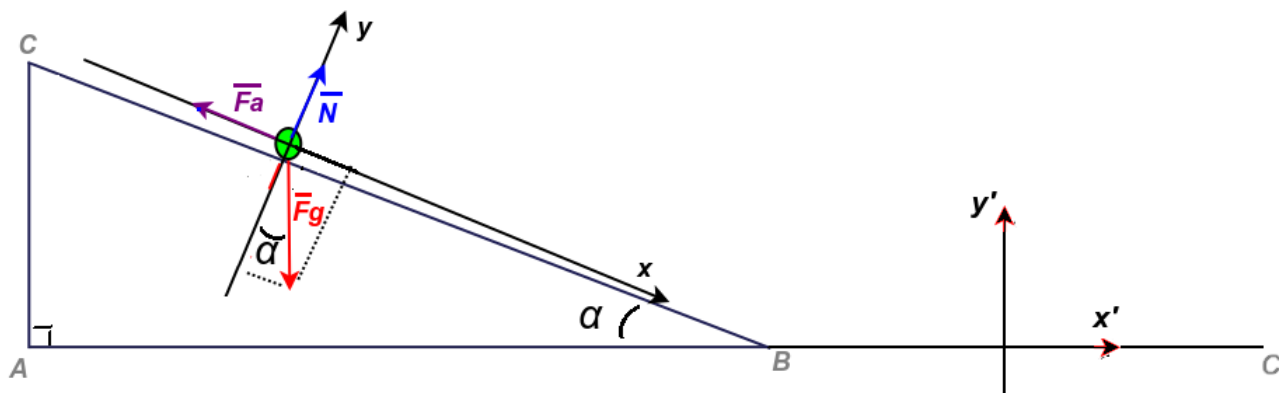


Figura III.9

*** Esercizio 56

Un corpo è posto lungo una guida con attrito ($\mu_d = 0.30$) composta da un tratto inclinato $\alpha = 30^\circ$ e un tratto orizzontale (figura III.9). Nell'istante iniziale viene messo nel punto A ad una altezza $h=3.0$ m con velocità iniziale nulla. Trovare il valore della velocità massima v_M e il percorso totale compiuto fino a raggiungere il punto C. Il raccordo in B è fatto in modo da non introdurre perturbazioni nel moto e dar far cambiare la direzione di v istantaneamente senza alterarne il modulo.

** Esercizio 57

Trovare la quota massima raggiunta nel tratto \overline{BC} dell'esercizio precedente, sostituendo al piano orizzontale una guida in salita inclinata di un angolo $\beta=45^\circ$ rispetto al suolo.

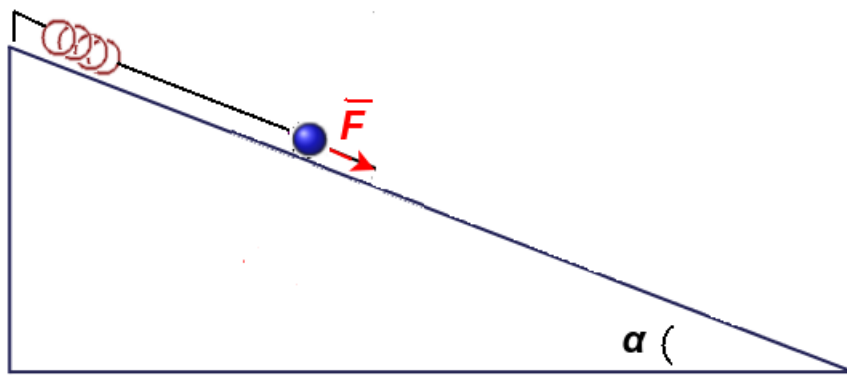


Figura III.10

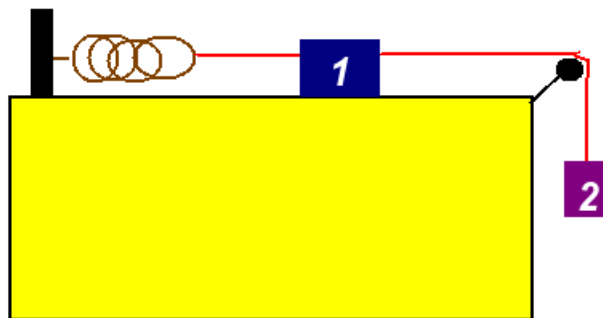


Figura III.11

** Esercizio 58

Con riferimento alla figura III.10, un corpo su un piano inclinato ($\alpha = 30^\circ$) è tenuto fermo da una molla che si è deformata di una lunghezza $x= 3.00$ cm. Al corpo è stata applicata anche una forza aggiuntiva \vec{F} diretta come il piano inclinato e verso discendente. Se il corpo ha massa m di 1.00 Kg e la forza \vec{F} ha modulo $F=3.00$ N, si trovi la costante elastica k della molla.

** Esercizio 59

Con riferimento alla figura III.10, un corpo su un piano inclinato ($\alpha = 30^\circ$) è tenuto fermo da una molla che si è deformata di una lunghezza $x = 3.00$ cm. Al corpo è stata applicata anche una forza aggiuntiva \vec{F} diretta come il piano inclinato e verso discendente. Se il corpo ha massa m di 1.00 Kg e la forza \vec{F} ha modulo $F = 3.00$ N, si trovi la costante elastica k della molla.

** Esercizio 60

Un corpo di massa m_1 (8.6 kg) è poggiato su un piano orizzontale collegato con un filo inestensibile ad una massa m_2 (10.5 kg) sospesa nel vuoto (figura III.11). La molla ha una costante elastica $k = 200$ N/m. Il piano ha un coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.1$. In condizioni statiche, di quanto si allunga la molla?

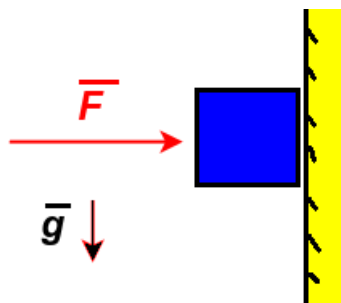


Figura III.12

** Esercizio 61

Un blocco (figura III.12) viene tenuto fermo in verticale su un muro applicando una forza $\vec{F} = 20$ N diretta in modo da schiacciarlo sulla parete. Sapendo che il coefficiente di attrito statico della parete $\mu_s = 0.40$ e quello dinamico μ_d di 0.23. Si calcoli la massa del corpo e l'accelerazione di scivolamento nel caso in cui F venga ridotta di 3 N.

** Esercizio 62

Un blocco, di massa $m = 11$ Kg viene trascinato su un piano con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 1.2\mu_d$ tramite una corda inestensibile che forma un angolo $\theta = 30^\circ$ con il suolo. A questa corda è applicata una forza di modulo $F = 8.0$ N, tale da non sollevare il blocco. Se il blocco viene trascinato a velocità costante, quanto è μ_s ?

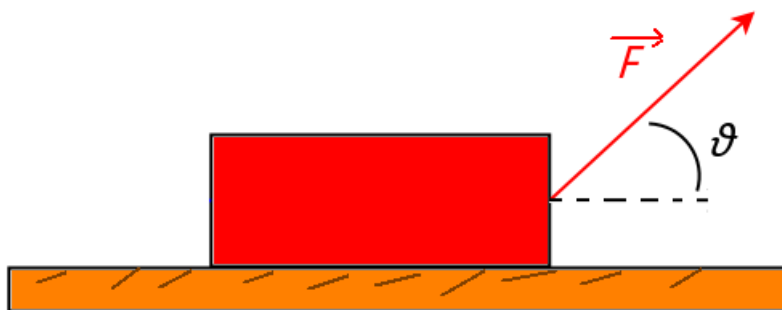


Figura III.13

**** Esercizio 63**

Il blocco in Fig. (III.13) di massa $m = 20$ kg è su un pavimento con attrito. In un certo istante si applica una forza di intensità pari alla metà del peso del corpo inclinata in un angolo $\theta = 30^\circ$ rispetto l'orizzontale. Sapendo che μ_d è 0.20, qual è l'accelerazione del blocco che avanza orizzontalmente?

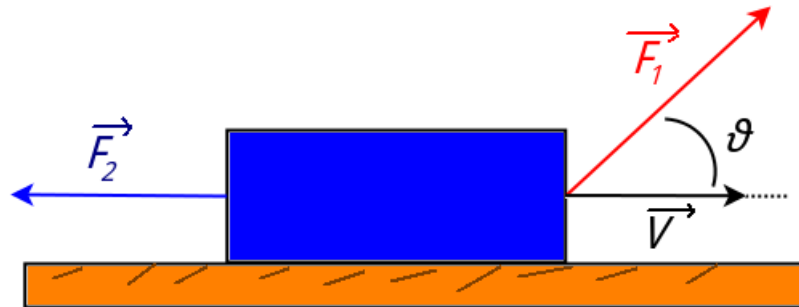


Figura III.14

***** Esercizio 64**

In Fig. (III.14) agiscono due forze su un blocco di massa 80.0 kg che sta scivolando a velocità costante \vec{v} di modulo 0.230 m/s verso destra. Il coefficiente di attrito dinamico μ_d di 0.100. Il modulo di \vec{F}_2 è di 25.0 N e l'angolo θ di $\frac{\pi}{6}$. Quanto deve essere il modulo di \vec{F}_1 perché il blocco continui di moto rettilineo uniforme?

Terza Legge di Newton

Figura III.15

**** Esercizio 65**

Due blocchi di massa m_1 3.0 kg e m_2 2.5 kg (Fig. (III.15)) sono posti a contatto su un piano liscio e orizzontale. Una forza orizzontale di modulo F 50 N viene applicata al corpo 1. Determinare l'accelerazione del sistema dei due blocchi e la forza di contatto tra i due blocchi.

***** Esercizio 66**

In Fig. (III.15) una forza orizzontale \vec{F} di modulo 12 N spinge il blocco 1 di massa m_1 1.0 kg che a sua volta preme sul blocco 2 di massa m_2 di 3.0 kg. Il modulo della forza di attrito \vec{F}_{a1} della parte inferiore del blocco 1 è di 2.0 N, mentre quello del blocco 2 è 4.0 N. Qual è il modulo della forza di contatto \vec{f} che il blocco 1 esercita sul blocco 2?

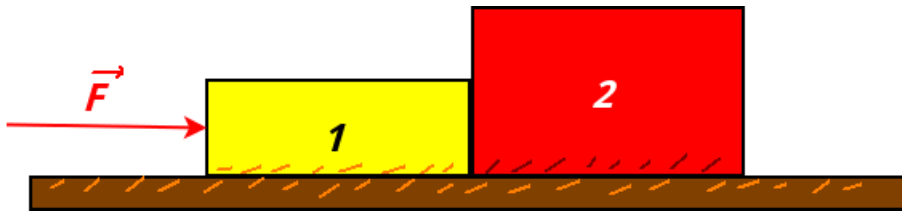


Figura III.16

Sistemi di Riferimento Non Inerziali

** Esercizio 67

Una massa è attaccata tramite un filo inestensibile all'interno di un vagone di un treno che viaggia a velocità costante. Improvvisamente il treno accelera con a costante di 1 m/s^2 . Calcolare di quanto si inclina il filo che tiene attaccata la massa, trovando l'angolo tra il filo e la normale al suolo.

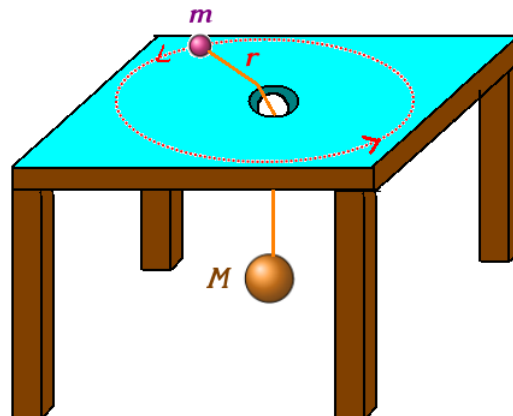


Figura III.17

** Esercizio 68

Una palla di massa $m=1.50 \text{ kg}$ in figura III.17 ruota su un tavolo privo di attrito il cui piano è parallelo al suolo, descrivendo una circonferenza di raggio $r=20.0 \text{ cm}$. Tramite un filo inestensibile ed un foro praticato al centro del tavolo la massa è collegata ad un'altra massa $M=2.50 \text{ kg}$. A quale velocità deve ruotare m per mantenere M in equilibrio?

** Esercizio 69

Una persona si pesa su una bilancia dentro un ascensore che sta salendo con una accelerazione $a = 3.00 \text{ ms}^{-2}$. Se la bilancia indica un peso di 103 Kgp , quale è la massa della persona?

**** Esercizio 70

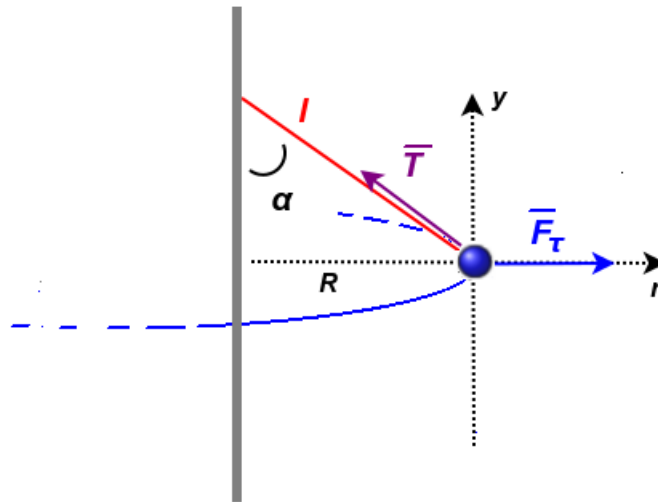


Figura III.18

Con riferimento alla figura III.18, una pallina vincolata ad una corda lunga $l = 1.0$ m, viene fatta ruotare attorno ad un'asta verticale con una velocità tangenziale $v = 3.8$ m/s. Si trovi l'angolo α tra l'asta e la corda.

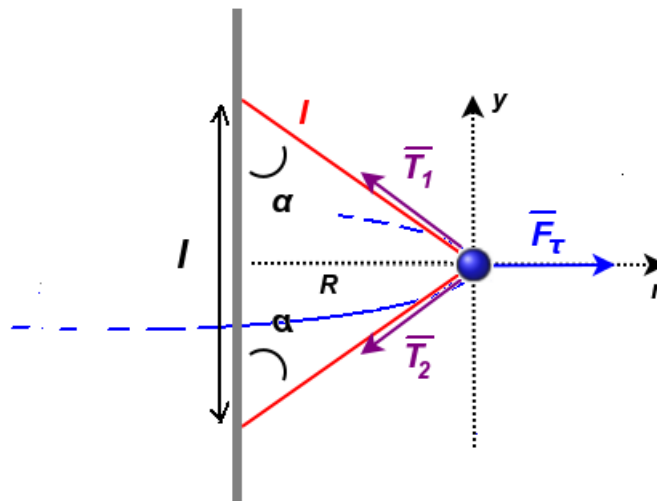


Figura III.19

*** Esercizio 71

Con riferimento alla figura III.19, in modo simile all'esercizio precedente, un corpo puntiforme è obbligato a ruotare attorno ad una sbarra verticale legata con due corde lunghe $l = 1.70$ m. I punti sui quali le corde sono legate sono anch'essi distanziati di una distanza l . Sapendo la massa m del corpo uguale a 1.34 Kg e la tensione \vec{T}_2 di modulo $T_2 = 8.74$ N, trovare T_1 . Trovare

anche il modulo della velocità tangenziale v del corpo considerando di studiare il sistema sia in un sistema di riferimento inerziale che in uno non inerziale (coincidente con il corpo).

***** Esercizio 72

Una curva sopraelevata (raggio di curvatura r di 210 m) è progettata in modo che, in assenza di attrito, un'auto non esca di strada né verso l'alto né verso il basso se tiene una velocità \vec{v}_m di modulo 120 km/h.

Parte 1: Si trovi l'angolo θ di inclinazione della curva studiano il problema sia nel caso del sistema di riferimento inerziale che in quello non inerziale.

Parte 2: Introducendo l'attrito sulla strada, quanto deve essere il coefficiente di attrito statico μ_s perché l'auto non scivoli verso il basso se viaggia ad una velocità di 50 Km/h?

Parte 3: Utilizzando lo stesso μ_s trovato precedentemente, di quanto si può salire oltre v_m senza sbandare verso l'alto?

Capitolo IV

Energia

In Fisica l'energia è una grandezza fisica scalare definita come una proprietà di oggetto di compiere lavoro o generare calore. È associata ad uno stato o condizione di un corpo o di un sistema di corpi e può assumere varie forme, ma non può essere convertita o distrutta (principio di conservazione dell'energia), principio al quale mai è stata osservata alcuna eccezione. L'energia è una grandezza fisica che può essere misurata, e quindi definita in maniera operativa, attraverso il suo passaggio da una forma ad un'altra.

Nella prima sezione verrà trattata l'energia cinetica e la sua relazione con il lavoro. Nella seconda, verrà discussa l'energia potenziale e le forze conservative. Anche in questo capitolo, i corpi verranno trattati come punti materiali.

Concetti Fondamentali

- Energia Cinetica
- lavoro
- teorema delle forza vive
- forze conservative ed energia potenziale
- energia potenziale gravitazionale
- energia potenziale elastica
- energia meccanica

IV.1 Energia Cinetica e Lavoro

IV.1.1 Energia Cinetica

L'energia cinetica K è la forma di energia associata al modo di un corpo. Se m è la massa di un punto materiale e v la sua velocità, la sua energia cinetica è:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{IV.1})$$

È una grandezza scalare e dimensionalmente l'energia è equivalente a:

$$[K] = [m][v]^2 = [L^2M^1T^{-2}] \quad (\text{IV.2})$$

In S.I. si misura in $\text{kg}\cdot\text{m}^2\text{s}^{-2}$, equivalente al *Joule* (simbolo J).

Se un corpo varia la sua velocità da una velocità di modulo v_i ad un'altra di modulo v_f in seguito ad una accelerazione o decelerazione, la variazione di energia cinetica sarà dunque:

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) \quad (\text{IV.3})$$

IV.1.2 Lavoro

La variazione di energia cinetica data dalla (IV.3), essendo dovuta ad una accelerazione \vec{a} , sarà causata dalla presenza di una forza \vec{F} agente sul corpo. In virtù di ciò si dice che la forza ha compiuto un *lavoro* L sul corpo. In altre parole, il lavoro W è l'energia trasferita^[1] ad/da un corpo per mezzo di una forza. Se questa energia viene ceduta al corpo, il lavoro risulta positivo (*lavoro motore*), se viene invece ceduta da quest'ultimo, il lavoro diventa negativo (*lavoro resistente*).

Supponiamo di avere un punto materiale vincolato a muoversi lungo una direzione coincidente con l'asse x e di avere una forza \vec{F} che forma con l'asse x un angolo θ . Proiettando questa forza lungo l'asse x avremo:

$$F_x = ma_x \quad (\text{IV.4})$$

Questa forza si mantiene costante e applicata al corpo finché questo non ha coperto, mediante uno spostamento, una distanza Δx . In seguito a questa accelerazione, dalla cinematica ((II.27)) avremo che il punto materiale, durante questo tragitto, ha modificato la sua velocità da una iniziale \vec{v}_i ad una \vec{v}_f , entrambe lungo x :

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a_x d \quad (\text{IV.5})$$

Trovando a_x dalla (IV.4) e sostituita nelle (IV.5):

$$v_f^2 = v_i^2 + 2\frac{F_x}{m}\Delta x \quad (\text{IV.6})$$

^[1]Per trasferimento si intende un passaggio di energia mediante una trasformazione e non il passaggio di un qualche tipo di fluido.

da cui, utilizzando la (IV.3) si trova il *teorema delle forze vive* (o *dell'energia cinetica*):

$$\Delta K = L \quad (\text{IV.7})$$

dove

$$L = F_x \Delta x \quad (\text{IV.8})$$

cioè il prodotto della componente della forza costante lungo lo spostamento per l'entità dello spostamento stesso. Dal punto di vista delle operazioni tra i vettori il lavoro è definito tramite il prodotto scalare tra la forza \vec{F} e lo spostamento \vec{d} :

$$L = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (\text{IV.9})$$

Il lavoro di una forza costante \vec{F} assume un valore nullo quando la direzione della forza è perpendicolare a quella dello spostamento. Inoltre risulta positivo nel caso in cui la componente di \vec{F} ha componente concorde al verso dello spostamento \vec{d} e negativo in caso contrario. Le dimensioni e l'unità di misura del lavoro sono le stesse dell'energia.

Lavoro della forza peso

Un esempio di lavoro effettuato da una forza costante è il lavoro della forza peso. Nel caso di un corpo che sta cadendo di una quota h , la forza peso compie un lavoro positivo:

$$\text{corpo in caduta} \quad L_g = mgh \quad (\text{IV.10})$$

È positivo perché la forza è concorde allo spostamento e la forza peso è responsabile di una trasformazione di energia che aumenta l'energia cinetica del corpo. In caso di ascesa di una quota h invece:

$$\text{corpo in ascesa} \quad L_g = -mgh \quad (\text{IV.11})$$

Il lavoro preleva dal corpo una energia cinetica.

Supponiamo ora di sollevare un corpo attraverso una forza \vec{F} . Durante lo spostamento quindi il corpo compie un lavoro positivo L_F , mentre la forza peso compie un lavoro negativo L_g . La forza \vec{F} trasferisce energia al corpo, mentre \vec{F}_g ne sottrae. Secondo la (IV.7):

$$\Delta K = L_F + L_g \quad (\text{IV.12})$$

Nel processo inverso, cioè di abbassamento del corpo, avremo i segni invertiti dei due lavori.

Se il corpo è fermo prima e dopo il sollevamento/abbassamento ($v_i = v_f = 0$) oppure ha la stessa velocità, avremo:

$$\Delta K = 0 \longrightarrow L_f = -L_g \quad (\text{IV.13})$$

Il lavoro L_F è quindi opposto a L_g . La (IV.13) è la stessa qualsiasi sia l'andamento di \vec{F} durante lo spostamento, a patto che la velocità iniziale sia uguale a quella finale.

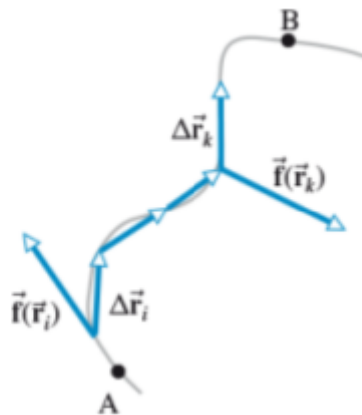


Figura IV.1: Una forza variabile lungo uno spostamento generico.

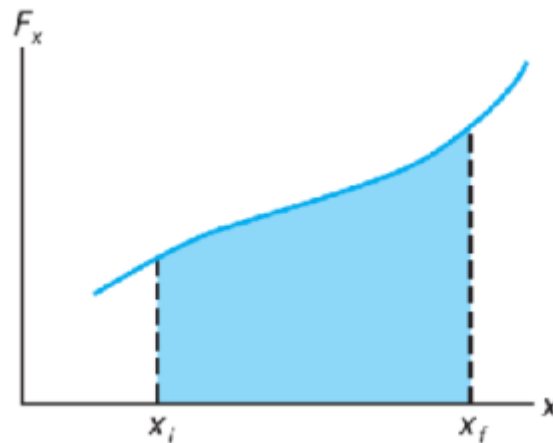


Figura IV.2: Il lavoro compiuto dalla forza variabile in una dimensione è pari all'area delimitata dalla curva $F_x(x)$ nell'intervallo definito dallo spostamento da x_i a x_f e dall'asse x .

Lavoro di una forza variabile

Supponiamo di avere una forza \vec{F} non costante lungo una direzione generica nello spazio tridimensionale:

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \quad (\text{IV.14})$$

e un generico spostamento $\Delta \vec{r}$:

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k} \quad (\text{IV.15})$$

Per calcolare il lavoro, non possiamo usare direttamente la (IV.9), perché la forza non è costante. In generale, neanche $\Delta \vec{r}$ può non essere costante e descrivere un percorso dato da una traiettoria γ (Fig. (IV.1)). Possiamo immaginare quindi di dividere idealmente ogni componente dello spostamento lungo gli assi in spostamenti infinitesimi $d\vec{r}$ tanto da poter considerare la forza

costante all'interno di questi intervalli. A questo punto si può calcolare il *lavoro infinitesimo*

$$\partial L = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{IV.16})$$

Il simbolo “ ∂ ” al posto di “ d ” indica che il lavoro infinitesimo non è un differenziale esatto, cioè un differenziale di una *funzione di stato*. La funzione di stato è una funzione che identifica uno stato di un sistema e quindi la sua variazione dipende solo dal valore assunto negli stati iniziali e finali e non dal percorso fatto durante questo passaggio. In componenti cartesiane la (IV.16) è:

$$\partial L = (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (\text{IV.17})$$

Si può quindi integrare lungo la traiettoria γ (integrale di linea):

$$L = \int_{\gamma} F_x dx + \int_{\gamma} F_y dy + \int_{\gamma} F_z dz \quad (\text{IV.18})$$

dove $\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$ e $\vec{r}_f = x_f \hat{i} + y_f \hat{j} + z_f \hat{k}$ sono rispettivamente le posizioni iniziali e finali che individuano la traiettoria γ .

Se un numero n di forze agiscono simultaneamente su un punto materiale lungo una traiettoria che va da un punto A ad un punto B avremo:

$$L_{AB} = \int_A^B \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^n \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^n L_{AB}^i \quad (\text{IV.19})$$

Il lavoro totale è dato dalla somma dei lavori individuali fatti dalle singole forze (*principio di indipendenza delle azioni simultanee*).

Prendiamo per semplicità il caso di una forza variabile $\vec{F}(x)$ diretta lungo l'asse x e parallela allo spostamento, considerando quindi un problema unidimensionale. Il lavoro svolto sul punto materiale mentre questo si sposta dalla coordinata x_i ad una x_f è:

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx \quad (\text{IV.20})$$

Con riferimento alla Fig. (IV.2), Il lavoro compiuto dalla forza variabile in una dimensione è pari all'area delimitata dalla curva $F_x(x)$ nell'intervallo definito dallo spostamento da x_i a x_f e dall'asse x .

Un esempio notevole di forza variabile è la forza elastica. Consideriamo che la molla sia in equilibrio in corrispondenza della coordinata $x = 0$. La $F(x)$ diventa in questo caso:

$$F(x) = F_e = -kx \quad (\text{IV.21})$$

Quindi la (IV.20) diventa:

$$L_e = -k \int_{x_i}^{x_f} x dx = -\frac{1}{2}k [x^2]_{x_i}^{x_f} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \quad (\text{IV.22})$$

Il lavoro risulta quindi positivo se $x_i^2 > x_f^2$, cioè se la posizione finale è più vicina al punto di equilibrio $x = 0$ di quella iniziale. In questo caso il punto materiale si sta avvicinando al

punto di equilibrio della molla e quindi quest'ultima sta trasferendo ad esso energia cinetica. In caso contrario è negativo e l'energia cinetica viene sottratta. Nel caso di una generica posizione finale x rispetto al punto di equilibrio in $x = 0$:

$$L_e = -\frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{IV.23})$$

Supponiamo ora di usare una forza $\vec{F}_t = F_t \hat{i}$ per spostare il punto materiale vincolato alla molla lungo l'asse x . Dopo questo spostamento, per il teorema delle forze vive:

$$\Delta K = L_t + L_e \quad (\text{IV.24})$$

Se il punto materiale è a riposo prima e dopo lo spostamento:

$$L_t = -L_e \quad (\text{IV.25})$$

In questo caso allora il lavoro fatto dalla forza F_t è l'opposto del lavoro svolto dalla molla.

IV.1.3 Potenza

La *potenza* è la rapidità con cui viene sviluppato il lavoro. Se L è il lavoro sviluppato da una forza F durante un intervallo di tempo Δt , si definisce la *potenza media* $\bar{\mathcal{P}}$:

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{L}{\Delta t} \quad (\text{IV.26})$$

La *potenza istantanea* è invece:

$$\mathcal{P} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{L}{\Delta t} = \frac{\partial L}{\partial t} \quad (\text{IV.27})$$

Nel caso in cui questo lavoro sia compiuto da una forza che agisce su un punto materiale:

$$\mathcal{P} = \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (\text{IV.28})$$

dove \vec{v} è la velocità istantanea della particella.

Dimensionalmente:

$$[\mathcal{P}] = [L][\Delta t]^{-1} = [L^2 M^1 T^{-2}][L^0 M^0 T^{-1}] = [L^2 M^1 T^{-3}] \quad (\text{IV.29})$$

In SI si misura quindi in $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-3}$, equivalente a J/s e al Watt (simbolo W). Altra unità di misura è il *cavallo vapore* (simbolo CV):

$$1 \text{ CV} = 735.5 \text{ W} \quad (\text{IV.30})$$

Dalla definizione di potenza si ricava un'altra unità di misura diffusa per l'energia: il *chilowattora* (simbolo kWh), che è dato dal prodotto di 1 KW per un intervallo di tempo uguale ad un'ora:

$$1 \text{ kWh} = (10^3 \text{ W}) \cdot (3.6 \cdot 10^3 \text{ s}) = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J} \quad (\text{IV.31})$$

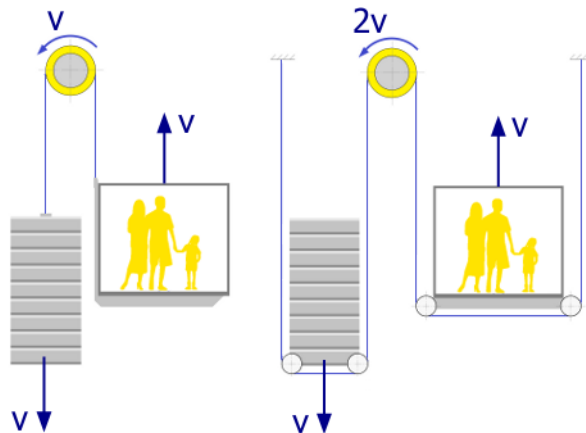


Figura IV.3: Schematizzazione di un montacarichi a trazione diretta (sinistra) e indiretta 2:1 (destra).

IV.1.4 Esempio del montacarichi

In Fig. (IV.3) ci sono due esempi di schemi di montacarichi. Soffermiamoci sul montacarichi a trazione diretta, cioè il disegno a sinistra (per i vantaggi derivanti dall'utilizzo di quello a destra si veda l'esercizio 79). Il montacarichi è fatto salire tramite un motore che responsabile del sollevamento, mentre una parte molto importante è svolta dal contrappeso, per ridurre il lavoro che deve essere effettuato.

Supponiamo che il montacarichi si muova a velocità costante e indichiamo con m_M la massa del montacarichi e con m_c quella del contrappeso, con L_M il lavoro svolto dalla gravità sul montacarichi, con L_c quello sul contrappeso e con L_s quello svolto dal motore del sistema. Il montacarichi si muove verso l'alto di una altezza h :

$$L_M = -m_Mgh$$

Il contrappeso si muove verso il basso della stessa quantità:

$$L_c = m_cgh$$

Il lavoro totale sarà:

$$L_t = L_M + L_c + L_s$$

Dato che la salita si svolge a velocità costante, il teorema delle forze vive ci dice che:

$$L_t = \Delta K = 0$$

Quindi il lavoro svolto dal motore è:

$$L_s = -L_M - L_c = gh(m_M - m_c)$$

Se non vi fosse il contrappeso il lavoro L'_s fatto dal motore per sollevare il montacarichi sarebbe:

$$L'_s = ghm_M$$

IV.2 Energia Potenziale

IV.2.1 Campo di Forza ed Energia Potenziale

Il *campo* è una funzione che descrive una proprietà dello spazio, attraverso ad esempio uno scalare (*campo scalare*) o un vettore (*campo vettoriale*). Un *campo di forza* descrive in ogni punto dello spazio la presenza di una forza rappresentata da un vettore, che in genere cambia da punto a punto. Le *linee di flusso* del campo sono delle linee tangenti punto per punto ai vettori del campo.

Definire un campo vettoriale risulta utile per descrivere le interazioni a distanza tra gli oggetti. Ad esempio, la presenza di una massa induce nello spazio circostante delle proprietà che descrivono come un altro corpo nelle vicinanze risentirebbe di questa interazione. In questo caso, all'interno dello spazio delimitato da una stanza (all'interno della quale possiamo quindi trascurare l'effetto della curvatura terrestre), il *campo gravitazionale*, che in questo caso può essere considerato costante, in ogni punto generico P , descritto dal vettore posizione \vec{r} , è rappresentato da un vettore costante diretto verso il basso e che coincide con l'accelerazione di gravità (vedere la Fig. (IV.4)):

$$\vec{g}(\vec{r}) = -g\hat{k} \quad (\text{IV.32})$$

Se mettiamo nel punto P una massa m di prova, essa risentirà appunto di una forza data dal prodotto della massa per il campo in quel punto, cioè $\vec{F} = -mg\hat{k}$, descrivendo quindi un campo di forza. Le linee del campo descrivono proprio la traiettoria che seguirebbe la massa se soggetta soltanto all'attrazione gravitazionale della Terra. Nei capitoli successivi vedremo altri esempi molto importanti di campo.

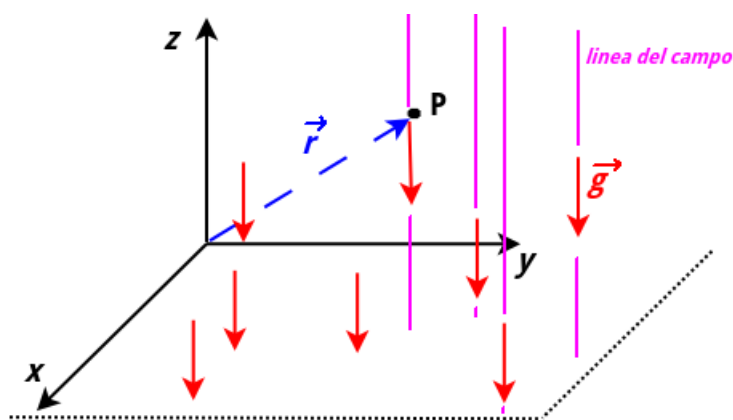


Figura IV.4: Linee del campo gravitazionale terrestre, se si possono trascurare gli effetti della curvatura del pianeta, sono perpendicolari al suolo.

L'*energia potenziale* U è l'energia associata alla posizione e all'orientamento di un corpo una volta che questo risulti immerso all'interno di un campo di forza con una ben definita proprietà. Questa proprietà consiste nel fatto che la forza che produce il campo deve essere *conservativa*, una proprietà che verrà definita nella Sez. (IV.2.2). Due esempi sono la forza peso e la forza elastica.

Dato che l'energia potenziale è una forma di energia, che può essere trasformata in altre, intuitivamente possiamo intuire, ad esempio, che un corpo posto ad una quota molto alta abbia "potenzialmente" la possibilità di ottenere più energia cinetica da una caduta, rispetto ad uno ad una quota più bassa. Se invece pensiamo ad un corpo che viene scagliato verticalmente verso l'alto, possiamo intuire che la sua energia venga trasformata durante la salita in energia potenziale, fino al raggiungimento della quota più elevata, in corrispondenza della quale l'energia cinetica è ridotta a 0.

Quindi, in generale, il lavoro di una forza conservativa è uguale alla variazione di energia potenziale cambiata di segno:

$$\text{(per forze conservative)} \quad L = -\Delta U \quad (\text{IV.33})$$

IV.2.2 Forza Conservativa

Definizione di Forza Conservativa

Supponiamo di avere un punto materiale che si muove per effetto di una forza lungo una certa traiettoria. La forza in questione è una forza conservativa se il lavoro che compie non dipende dal percorso, ma solo dalla posizione iniziale e da quella finale. Quindi nel caso di traiettoria chiusa qualsiasi (cioè con la posizione iniziale che coincide con quella finale) il lavoro di una forza conservativa è nullo.

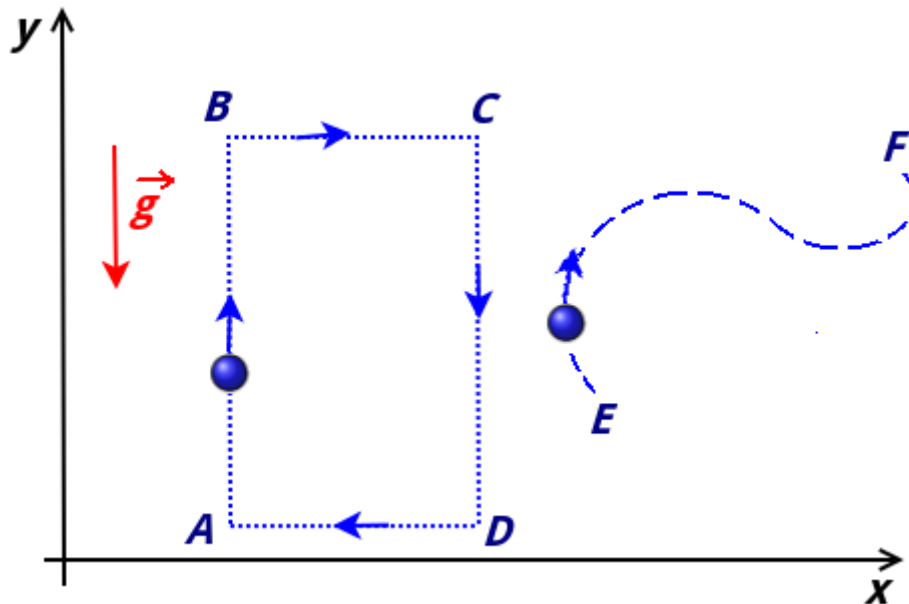


Figura IV.5: Lavoro della forza peso in un cammino chiuso, a sinistra. Lungo un percorso generico, a destra.

Prendiamo il caso della forza peso e consideriamo il semplice percorso chiuso in Fig. (IV.5) a sinistra, costituito da un rettangolo che giace su un piano verticale. In ogni punto dello spazio è presente un campo gravitazionale costante con $\vec{g} = -g\hat{j}$. Un corpo di massa m risente quindi in ogni punto di una forza $\vec{F}_g = -mg\hat{j}$. Nell'istante iniziale il corpo si trova in A, dove ritornerà

dopo aver compiuto la traiettoria chiusa. I lati \overline{AB} e \overline{CD} sono lunghi a , mentre i lati \overline{BC} e \overline{DA} sono lunghi b . Calcoliamo il lavoro lungo ogni lato del rettangolo utilizzando la definizione di lavoro ((IV.9)) e di prodotto scalare ((I.56)):

$$\text{Tratto } \overline{AB} \quad L_{AB} = -mga \quad (\text{IV.34})$$

dato che lo spostamento \vec{a} forma infatti con \vec{F}_g un angolo di π .

$$\text{Tratto } \overline{BC} \quad L_{BC} = 0 \quad (\text{IV.35})$$

poiché in questo tratto lo spostamento \vec{b} è perpendicolare a \vec{F}_g .

$$\text{Tratto } \overline{CD} \quad L_{CD} = mga \quad (\text{IV.36})$$

dato che $-\vec{a}$ e \vec{F}_g sono paralleli.

$$\text{Tratto } \overline{DA} \quad L_{DA} = 0 \quad (\text{IV.37})$$

dato che $-\vec{b}$ e \vec{F}_g sono perpendicolari. Il lavoro totale lungo il percorso chiuso si trova sommando i lavori fatti lungo i tratti:

$$L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = -mga + 0 + mga - 0 = 0 \quad (\text{IV.38})$$

Si trova quindi che il lavoro totale fatto dalla forza peso è nullo in un percorso chiuso e che quindi la forza peso è una forza conservativa. Quindi nel percorso generico in Fig. (IV.5) a destra avremo che il lavoro fatto da \vec{F}_g dipende solo dalla quota del punto iniziale E e di quella del punto finale F . Il lavoro fatto da \vec{F}_g sarà uguale alla variazione di energia potenziale cambiata di segno:

$$L_g = -\Delta U_g \quad (\text{IV.39})$$

Infatti se il corpo è in ascesa, la forza peso compie un lavoro negativo ed il corpo accumula un'energia potenziale mano a mano che raggiunge una quota più elevata. Quindi, indicando con y_i e y_f rispettivamente la quota iniziale e finale, possiamo trovare l'espressione dell'*energia potenziale gravitazionale* usando la Fig. (IV.20):

$$L_g = \int_{y_i}^{y_f} (F_g)dy = \int_{y_i}^{y_f} (-mg)dy \quad (\text{IV.40})$$

che sostituita nella (IV.40):

$$\Delta U_g = - \int_{y_i}^{y_f} (-mg)dy = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y \quad (\text{IV.41})$$

dove si indica con Δy la variazione di quota.

L'energia potenziale si esprime sempre mediante una variazione, mentre un suo valore assoluto può essere espresso solo attraverso un riferimento, al quale associamo arbitrariamente una energia potenziale nulla. Nel caso gravitazionale, possiamo porre il riferimento sul piano

orizzontale. Quindi, indicando con h la una quota rispetto a terra, a questa, tramite la (IV.41), possiamo associare una energia potenziale gravitazionale:

$$U_g = mgh \quad (\text{IV.42})$$

Dato che anche la forza elastica è conservativa, possiamo trovare l'energia potenziale elastica. Pensiamo di avere una molla in equilibrio nella coordinata $x = 0$ e di spostare un punto materiale da una coordinata x_i ad una x_f :

$$U_e = - \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = k \int_{x_i}^{x_f} xdx = \frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2) \quad (\text{IV.43})$$

Se x_i coincide con $x = 0$, per un generico spostamento x :

$$U_e = \frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{IV.44})$$

Forza Conservativa da una Energia Potenziale

Se si conosce l'energia potenziale, si può trovare la forza associata ad essa in un punto dello spazio. Nello spazio tridimensionale, sia $U(x, y, z)$ un'energia potenziale, definita rispetto un riferimento. Si tratta quindi di un campo scalare, dato che in ogni punto dello spazio è definita un'energia potenziale, che, essendo una energia, è una quantità scalare- Sia $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$, dove le componenti della forza sono in generale dipendenti dalla posizione considerata. Il lavoro infinitesimo sarà:

$$\partial L = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (\text{IV.45})$$

La variazione infinitesima di energia potenziale è:

$$dU(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \quad (\text{IV.46})$$

Essendo:

$$\partial L = -dU(x, y, z) \quad (\text{IV.47})$$

ne consegue che, per una forza conservativa:

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{IV.48})$$

Matematicamente, la (IV.48) si esprime dicendo che la forza conservativa in un punto si trova tramite il gradiente del campo scalare dato dall'energia potenziale associata:

$$\vec{F}(x, y, z) = -\vec{\nabla}U(x, y, z) \quad (\text{IV.49})$$

il gradiente (che può essere anche scritto come *grad*) è un particolare vettore di componenti:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.50})$$

che va applicato a $U(x, y, z)$.

I casi unidimensionali precedentemente trattati rendono il calcolo della (IV.49) più semplicemente:

$$F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (\text{IV.51})$$

Per la forza peso diretta lungo l'asse y quindi ^[2]:

$$\vec{F}(y) = -\frac{\partial mg(y - y_0)}{\partial y} = -mg \quad (\text{IV.53})$$

IV.2.3 Energia Meccanica

L'energia meccanica E_M di un sistema è dato dalla somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica:

$$E_M = K + U \quad (\text{IV.54})$$

Supponiamo di essere nelle condizioni in cui sul sistema agiscono solo conservative. Se una forza conservativa compie lavoro, per il teorema delle forze vive ((IV.7)) ci sarà una variazione di energia cinetica:

$$\Delta K = L \quad (\text{IV.55})$$

Allo stesso tempo, per la (IV.33):

$$\Delta U = -L \quad (\text{IV.56})$$

quindi, combinando le due equazioni, si ha:

$$\Delta K = -\Delta U \quad (\text{IV.57})$$

In altre parole, se in un sistema isolato agiscono solo forze conservative, se l'energia cinetica cresce quella potenziale diminuisce e viceversa. Se individuiamo due istanti t_i e t_f , avremo che:

$$K_f - K_i = -(U_f - U_i) \quad (\text{IV.58})$$

^[2] Impostando comunque il calcolo in uno spazio 3D avremmo: $U(x, y, z) = mgy$. Quindi:

$$\vec{F} = -\frac{\partial(mgy)}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial(mgy)}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial(mgy)}{\partial z}\hat{k} = -mg\hat{j} \quad (\text{IV.52})$$

Usando la definizione (IV.54) si trova il *principio di conservazione dell'energia meccanica*:

$$E_{Mi} = K_i + U_{Mi} = E_f = K_f + U_{Mf} = E_M \quad (\text{IV.59})$$

Quando in un sistema agiscono solo forze conservative, l'energia meccanica si conserva:

$$\Delta E_M = \Delta K + \Delta U = 0 \quad (\text{IV.60})$$

Il vantaggio in questo caso è che possiamo mettere in relazione l'energia potenziale e l'energia cinetica in un istante con quelle di un altro istante senza bisogno di calcolare il lavoro fatto nel frattempo dalle forze conservative.

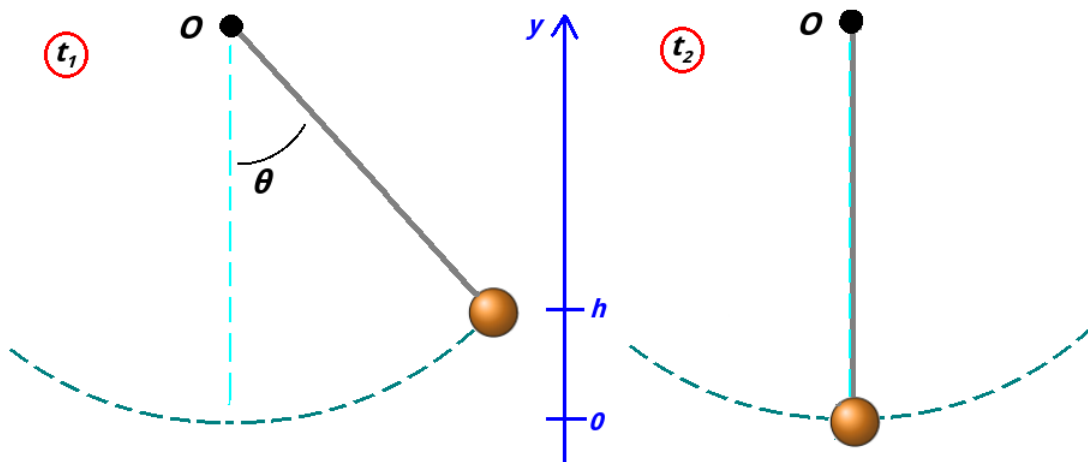


Figura IV.6: Nell'istante t_1 la massa del pendolo si trova alla quota più elevata, mentre nell'istante t_2 si trova in corrispondenza del centro di oscillazione e quindi alla quota più bassa.

Consideriamo il pendolo in Fig. (IV.6). Nell'istante t_1 la massa del pendolo si trova alla quota più elevata (cioè quando la massa ha raggiunto uno dei due estremi di oscillazione), mentre nell'istante t_2 si trova in corrispondenza del centro di oscillazione e quindi alla quota più bassa. Prendiamo l'origine dell'asse y in corrispondenza di quest'ultimo punto, mentre h è la quota massima. Assumiamo quindi uguale a 0 l'energia potenziale in $y = 0$. Nell'istante t_1 , dato che successivamente la massa invertirà il suo moto, il modulo della velocità e quindi l'energia cinetica, è uguale a 0. Nell'istante t_2 , il modulo della velocità sarà massimo, perché negli istanti successivi la forza peso provvederà ad una decelerazione. L'energia meccanica nei due istanti:

$$\text{In } t_1: \quad E_M = mgh \quad (\text{IV.61})$$

$$\text{In } t_2: \quad E_M = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{IV.62})$$

Dato che il moto è determinato da solo la forza peso, che è conservativa, si avrà:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad (\text{IV.63})$$

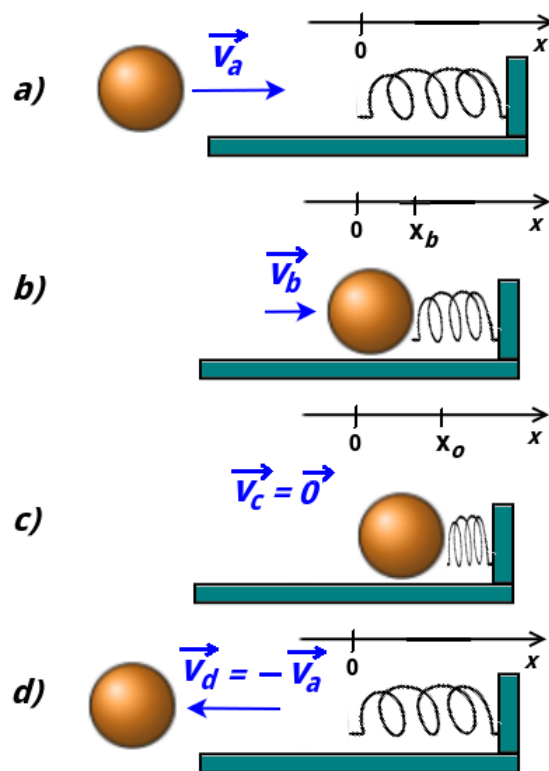


Figura IV.7: 4 fasi relative all'urto tra una molla e un corpo.

Supponiamo di avere un corpo di massa m e con una velocità iniziale \vec{v}_a diretta verso una molla di costante elastica k in equilibrio (Fig. (IV.7)). Il sistema molla+corpo può essere considerato un sistema isolato nel quale l'energia meccanica complessiva si conserva. Nella fase a) tutta l'energia meccanica del sistema è dato dall'energia cinetica del corpo:

$$a) \quad E_M = \frac{1}{2}mv_a^2 \quad (IV.64)$$

In b) avremo una fase intermedia in cui l'energia cinetica iniziale del corpo è andata immagazzinandosi in energia potenziale elastica:

$$b) \quad E_M = \frac{1}{2}mv_b^2 + \frac{1}{2}kx_b^2 \quad (IV.65)$$

In c) tutta l'energia è andata in energia potenziale della molla:

$$c) \quad E_M = \frac{1}{2}kx_o^2 \quad (IV.66)$$

Negli istanti successivi l'energia viene convertita in energia cinetica del corpo, la cui velocità avrà cambiato di segno, fino a che in d) tutta l'energia è tornata in energia cinetica del corpo:

$$d) \quad E_M = \frac{1}{2}mv_d^2 = \frac{1}{2}mv_a^2 \quad (IV.67)$$

Data v_a e k si può quindi trovare la massima compressione della molla x_o , uguagliando la Fig. (IV.64) e la Fig. (IV.66):

$$x_o = \sqrt{\frac{m}{k}} v_a \quad (\text{IV.68})$$

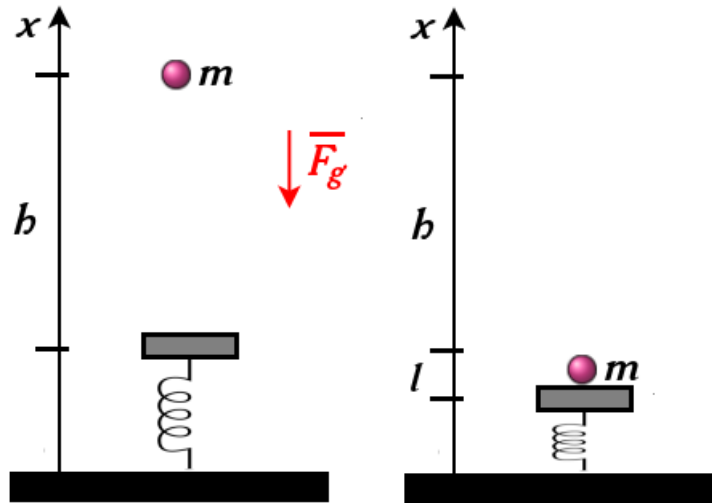


Figura IV.8: Corpo in caduta su una molla.

Se più forze conservative agiscono sul sistema (e non vi agiscono forze non conservative), l'energia meccanica in istanti diversi t_i e t_f si conserva e abbiamo:

$$E_M = K_i + \sum U_i = K_f + \sum U_f \quad (\text{IV.69})$$

dove le sommatorie indicano la somma delle energie potenziali dovute a forze conservative.

Consideriamo ora il caso il cui una massa m venga invece fatta cadere da ferma da una altezza h su una molla disposta verticalmente ed inizialmente in equilibrio (Fig. (IV.8)). Una volta raggiunta la piattaforma, la molla si comprime di un tratto l . Nell'istante finale la velocità è nulla perché la caduta della massa viene arrestata dall'intervento della molla. Il totale la massa è caduta coprendo un tratto verticale lungo $(l + h)$. Quindi l'energia potenziale gravitazionale si è convertita in energia potenziale elastica:

$$mg(l + h) = \frac{1}{2}kl^2$$

IV.2.4 Punti di Equilibrio

Una *posizione di equilibrio* è un punto dello spazio in cui un corpo posizionato su di esso rimane in quiete indefinitamente. Sebbene questa sia una condizione cinematica, a determinarla devono essere precise caratteristiche dinamiche, cioè le condizioni che devono essere soddisfatte dalle forze che agiscono su di esso. La prima risposta che potremmo dare è che in un punto di equilibrio la risultante delle forze sia nulla, in modo da non imprimere al corpo accelerazioni

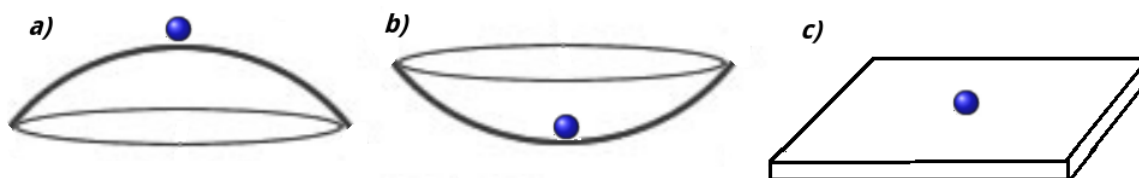


Figura IV.9: a) equilibrio instabile, b) equilibrio stabile, c) equilibrio indifferente.

che metterebbero il corpo in moto. Tuttavia questa definizione, comunque corretta, non permette di analizzare in modo più approfondito le differenze che vi sono tra punti di equilibrio.

Pensiamo di porre in quiete un punto materiale sul vertice di una sfera. In questo punto, sicuramente il punto materiale sarà in equilibrio, perché la forza peso sarà equilibrata dalla forza normale sulla superficie della sfera. Come questo punto materiale viene spostato di una quantità infinitesima da questo punto tuttavia, l'esperienza ci dice che andrà incontro ad una inevitabile caduta. Questo è un esempio di *equilibrio instabile* (Fig. (IV.9)-a)), poiché un corpo che se ne allontani tenderà ad allontanarsene sempre più. Se il punto materiale viene invece messo in fondo ad una sfera cava, punto nel quale sussistono le stesse condizioni di equilibrio delle forze del caso precedente, questo, se fatto allontanare, tenderà a ritornarvi. Questo è un caso di *equilibrio stabile* (Fig. (IV.9)-b)). Un altro caso è l'*equilibrio indifferente* (Fig. (IV.9)-c)), come succede se il punto viene poggiato sul piano; il punto si trova infatti in una regione di spazio costituita da punti di equilibrio, nei quali quindi le condizioni dinamiche sono le stesse.

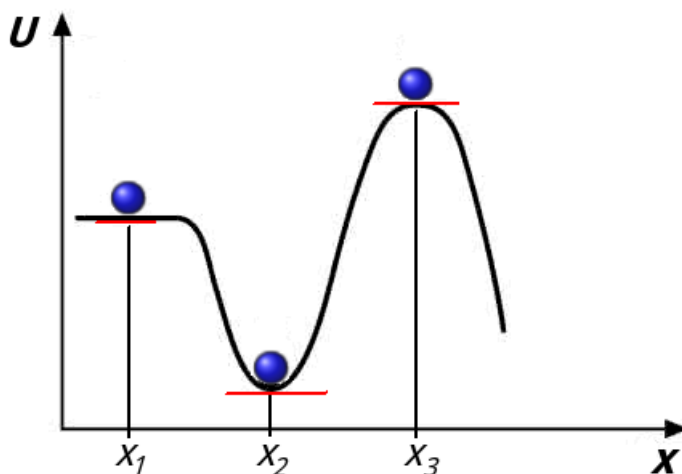


Figura IV.10: Esempio di una energia potenziale variabile con la coordinata x . Nei punti x_1 , x_2 e x_3 la derivata si annulla.

Quando il corpo è immerso in un campo di forze conservativo, le condizioni dinamiche dei punti di equilibrio si possono esprimere in termini dell'energia potenziale. Nel caso unidimensionale, supponiamo di avere una forza conservativa $F(x)$ che agisce su una particella, che quindi possiede un'energia potenziale $U(x)$. Se disegnano in un grafico l'andamento di $U(x)$

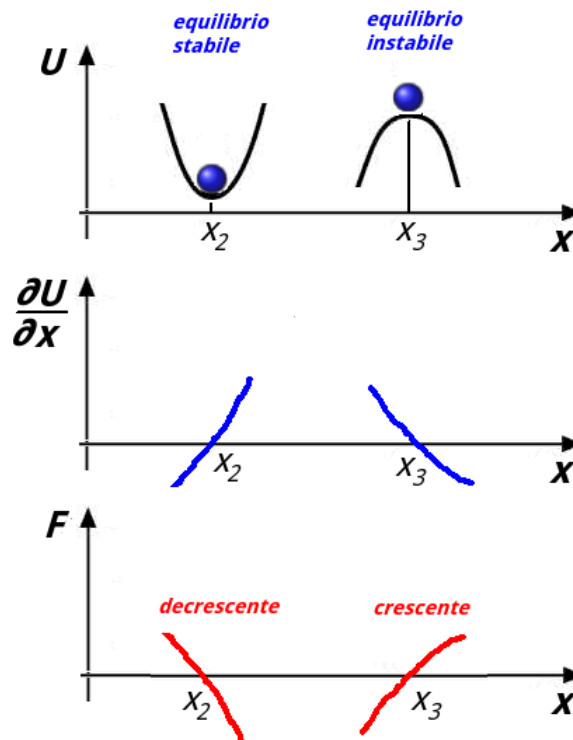


Figura IV.11: Nell'intorno di x_2 $U(x)$ è crescente, quindi $F(x) = -(\partial U/\partial x)$ è decrescente. Nell'intorno di x_3 $U(x)$ è decrescente, quindi $F(x) = -(\partial U/\partial x)$ è crescente.

troviamo che, grazie alla (IV.51), possiamo concludere che il valore della forza in una posizione sia legato alla variazione dell'andamento dell'energia potenziale. Il punto in cui una forza conservativa si annulla può essere espresso tramite la IV.51, cioè imponendo la derivata di $U(x)$ rispetto a x uguale a zero:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV.70})$$

In Fig. (IV.10) questa condizione è soddisfatta nei punti x_1 , x_2 e x_3 , dove la derivata si annulla (punti di stazionarietà) e quindi la tangente nel punto (in rosso nel disegno) è parallela all'asse x . I punti considerati x_2 e x_3 sono rispettivamente dei punti di minimo e massimo relativo. Nel primo caso abbiamo trovato un punto di equilibrio stabile, nel secondo uno di equilibrio

instabile. Il punto x_1 è in una regione in cui l'energia potenziale è costante e quindi si tratta di un punto di equilibrio indifferente.

Fare uno studio di funzione di $U(x)$ è sufficiente per individuare la natura dei punti di equilibrio. Tuttavia, risulta più istruttivo valutare analiticamente questa natura in termini della variabilità della forza. Secondo la (IV.51) la derivata prima di $U(x)$ rispetto a x è uguale a $-F(x)$. Si può quindi trovare $F(x)$ e valutare se nell'intorno dei punti di equilibrio $F(x)$ è crescente o decrescente, studiano cioè il segno della derivata. Se nel punto di equilibrio x_n $F(x_n)$ è decrescente, si ha un punto di equilibrio stabile. In caso contrario $F(x_n)$ è un punto di equilibrio instabile.

Prendiamo il caso x_2 in Fig. (IV.10) di equilibrio stabile. La forza $F(x_2)$ si annulla in quel punto. Nell'intorno sinistro di x_2 , $U(x)$ è decrescente, quindi $\frac{\partial U}{\partial x} < 0$ e quindi $F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} > 0$. Nell'intorno destro di x_2 , $U(x)$ è crescente, quindi $F(x) < 0$. Quindi, come si vede in Fig. (IV.11), $F(x)$ è decrescente nell'intorno di x_2 . Quando il corpo si sposta verso sinistra da x_2 , la forza è positiva, quindi diretta verso destra (positiva). Quando si sposta a sinistra, la forza è diretta verso sinistra (negativa). La forza quindi è diretta in modo da riportare il corpo verso x_2 .

Le considerazioni analoghe si trovano per l'equilibrio instabile x_3 , dove si trova che spostando il corpo dal punto la forza, essendo sempre diretta come lo spostamento, tende ad allontanarlo sempre più.

IV.2.5 Forze Non Conservative

L'energia meccanica non si conserva se sul sistema agiscono forze non conservative, come ad esempio la forza di attrito. Per una forza non conservativa il lavoro lungo un percorso chiuso è diverso da zero e quindi dipende dal percorso non dal punto di inizio e dal punto di arrivo. Supponiamo di avere un corpo che si muove su un piano con attrito fino a fermarsi; Si interpreta la diminuzione di energia meccanica come un processo di conversione di energia: l'energia trasformata è associata ad un mutamento delle caratteristiche delle superfici del corpo e del piano; rilevabili se ne misuro la temperatura. Si parla quindi di *energia interna* E_i del sistema corpo + piano orizzontale. L'energia interna è l'energia associata alle caratteristiche delle entità molecolari di cui è composto il sistema, come l'*energia termica* E_{th} . Nel caso in esame, l'aumento dell'energia termica è uguale alla diminuzione dell'energia meccanica, soddisfacendo la conservazione dell'*energia totale* del sistema quando questo sia *isolato* dall'ambiente esterno. Questo processo di conversione di energia meccanica in energia interna è un processo unidirezionale, tipica dei processi dissipativi. In generale quindi abbiamo che:

$$L_{nc} = \Delta E_M = \Delta E_{th} \quad (IV.71)$$

Consideriamo di nuovo il caso dell'uro tra la massa e la molla visto alla fine della Sez. (IV.2.3), inserendo questa volta una forza di attrito \vec{F}_a che agisce durante il processo di compressione e rilassamento della molla. Questa volta l'energia meccanica totale e ciò si ripercuoterà sulla massima compressione della molla. La variazione di energia meccanica mentre il corpo si sposta dalla coordinata x_0 al punto di massima compressione $x_f \neq x_0$ è dato dal lavoro della forza d'attrito:

$$\Delta E_M = -F_a x_f \quad (IV.72)$$

La variazione dell'energia meccanica è la differenza tra l'energia finale e quella iniziale:

$$\Delta E_M = E_{Mf} - E_{Mi} = \left(\frac{1}{2}kx_f^2\right) - \left(\frac{1}{2}mv_a^2\right) \quad (\text{IV.73})$$

dal quale si trova:

$$-F_a x_f = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 \quad (\text{IV.74})$$

$$-F_a x_f = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 \quad (\text{IV.75})$$

Dalla quale si può trovare x_f scegliendo la radice positiva dell'equazione di secondo grado (trovandosi il corpo a destra di $x = 0$):

$$\frac{1}{2}kx_f^2 + F_a x_f + \frac{1}{2}mv_a^2 \quad (\text{IV.76})$$

Riepilogo Formule

- *Energia Cinetica di un punto materiale*

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

- *Lavoro di una Forza costante \vec{F} su uno spostamento \vec{d}*

$$L = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

- *Lavoro di una Forza \vec{F} su uno spostamento infinitesimo $d\vec{r}$*

$$\partial L = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- *Lavoro di una Forza variabile \vec{F} su uno spostamento lungo una traiettoria γ*

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz$$

- *Teorema delle Forze Vive*

$$\Delta K = L$$

- *Lavoro delle forze conservative*

$$L_{co} = -\Delta U$$

- *Variazione di Energia Potenziale Gravitazionale (caso \vec{g} costante) per variazione di quota Δh*

$$\Delta U_g = mg\Delta h$$

- *Energia Potenziale Elastica ($x = 0$ posizione a riposo) per deformazione x*

$$U_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- *Forza conservativa*

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(x, y, z)$$

- *Forza conservativa (caso 1D)*

$$F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

- *Punto di Equilibrio x_0*

$$\text{tale che } \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x_0} = 0$$

- *Punto di Equilibrio x_0 Stabile*

$$F(x) \text{ decrescente in } x_0$$

- *Punto di Equilibrio x_0 Instabile*

$$F(x) \text{ crescente in } x_0$$

- *Energia Meccanica*

$$E_m = K + U$$

- *Lavoro delle forze non conservative*

$$L_{cn} = \Delta E_m = \Delta E_{th}$$

Esercizi

Energia e Lavoro

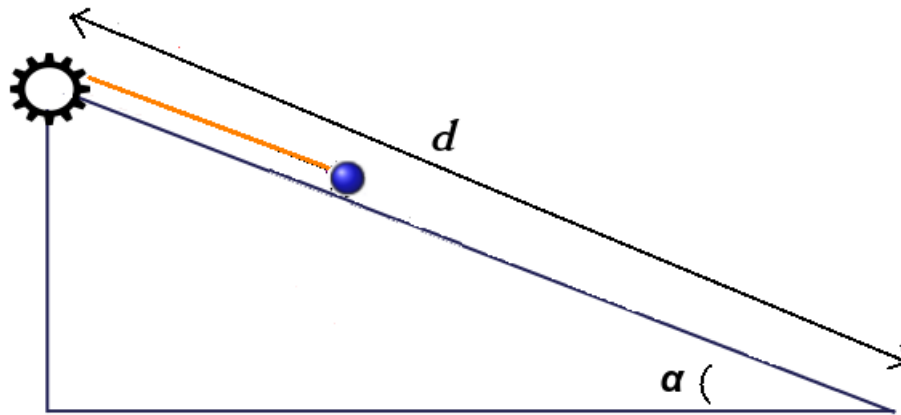


Figura IV.12

**** Esercizio 73**

Un motore (figura IV.12) tramite una corda inestensibile trascina una massa $m = 10 \text{ Kg}$ su un piano inclinato privo di attrito con $\alpha = \frac{\pi}{6}$. La rampa è lunga $d = 5.0$. Sapendo che il corpo all'inizio e alla fine del moto è fermo, trovare tutti i lavori delle forze in gioco.

**** Esercizio 74**

Sia data una forza \vec{F} :

$$\vec{F} = 2x\text{N}/\text{m}\hat{i} + 3\text{N}\hat{j}$$

dove x ha le dimensioni di una lunghezza. Una particella sottoposta alla forza compie uno spostamento da \vec{r}_i a \vec{r}_f :

$$\vec{r}_i = 2\text{m}\hat{i} + 3\text{m}\hat{j}$$

$$\vec{r}_f = -4\text{m}\hat{i} - 3\text{m}\hat{j}$$

Trovare il lavoro L .

**** Esercizio 75**

Sia data una forza \vec{F} :

$$\vec{F} = (-5.00\hat{i} + 5.00\hat{j} + 4.00\hat{k})\text{N}$$

che agisce su una massa $m = 2.00 \text{ Kg}$ con velocità iniziale di modulo $v_i = 4.00 \text{ m/s}$. Trovare la velocità v_f della massa dopo che ha effettuato uno spostamento \vec{d} :

$$\vec{d} = (2.00\hat{i} + 2.00\hat{j} + 7.00\hat{k})\text{m}$$

Trovare il lavoro L .

**** Esercizio 76**

Un veicolo di massa $m=1.660$ tonnellate parte da ferma e raggiunge una velocità v di 72 Km/h in un tempo t di 33 s. Trascurando gli attriti e considerando una accelerazione costante, calcolare: a) la variazione ΔK di energia cinetica

b) La potenza media \mathcal{P}_m

c) La potenza istantanea \mathcal{P} nell'istante finale

** Esercizio 77

Si tratti il problema 73 inserendo l'attrito ($\mu_d = 0.1$).

** Esercizio 78

Trovare nuovamente la velocità massima dell'esercizio 56, usando questa volta usando la definizione di lavoro e di energia cinetica.

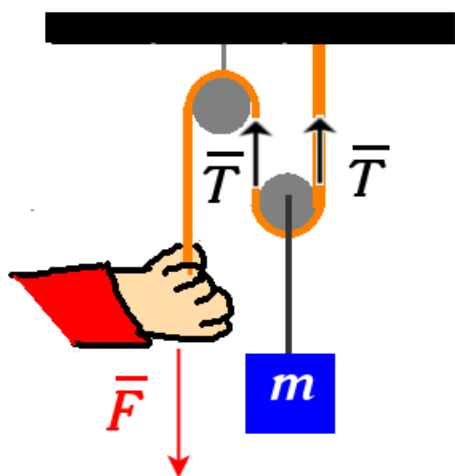


Figura IV.13

**** Esercizio 79

Con riferimento alla figura IV.13, una corda passa da due pulegge con un peso di massa $m=20$ Kg attaccato a quella di destra. Una forza \vec{F} è applicata manualmente all'estremità libera della corda. La massa sale di quota di 2 cm. Trovare:

a) il modulo di \vec{F} perché la massa salga a velocità costante

b) Lo spostamento h della mano dell'operatore

c) il lavoro fatto da \vec{F}

d) il lavoro fatto dalla forza peso

Energia Meccanica

** Esercizio 80

Una massa m di 1.0 Kg è appesa ad una molla verticale (figura IV.14). La quota $h=0.20$ m è la quota alla quale la molla è a riposo senza l'introduzione della massa. Un gancio impedisce

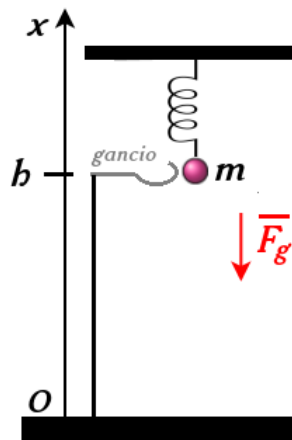


Figura IV.14

che la massa cada, allungando quindi la molla dalla posizione di equilibrio. Se il gancio viene rimosso, calcolare il valore minimo della costante elastica k della molla perché la massa non tocchi terra una volta lasciata libera di cadere.

** Esercizio 81

Un corpo si muove orizzontalmente sotto l'azione di una forza elastica, oscillando attorno al punto di equilibrio. La sua distanza massima d da questa posizione di equilibrio che raggiunge durante questo modo è di 3.0 cm. Prendendo l'origine di un asse x nel punto di equilibrio, trovare i punti sull'asse in cui l'energia cinetica del corpo uguaglia l'energia potenziale.

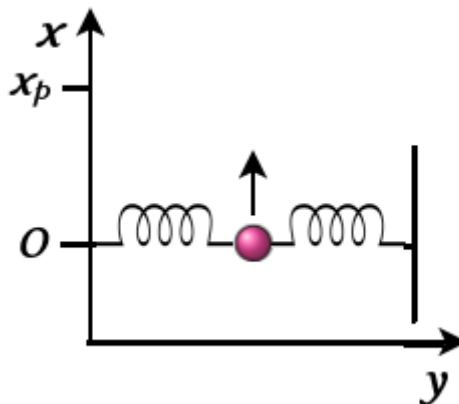


Figura IV.15

***** Esercizio 82

Su un piano orizzontale x, y , ci sono due molle identiche, attaccate nel punto di equilibrio. La lunghezza l di ciascuna molla è 1.0 m, mentre la costante elastica è $k=100$ N/m. Il punto di contatto (figura IV.15) viene tirato in direzione parallela all'asse x fino a raggiungere una distanza x_p . Trovare il lavoro totale L per effettuare questa operazione.

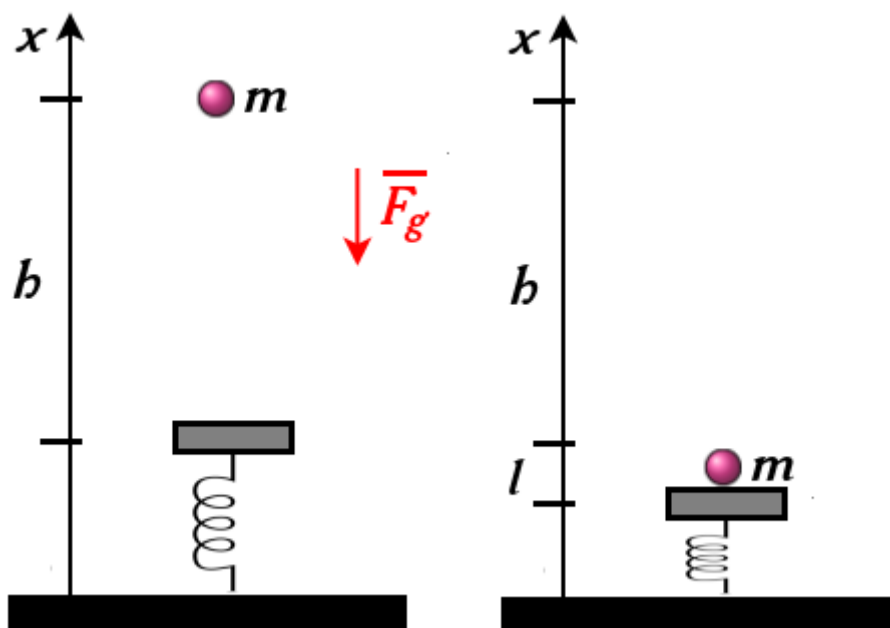


Figura IV.16

** Esercizio 83

Una massa $m=1.00$ Kg viene lasciata cadere da ferma da una altezza $h=0.500$ rispetto alla piattaforma posta sopra una molla verticale in equilibrio. Una volta raggiunta la piattaforma, la molla si comprime di un tratto l . Trovare il valore di l .

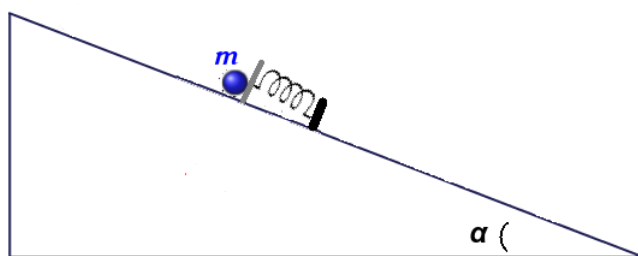


Figura IV.17

*** Esercizio 84

Con riferimento alla figura IV.17, una massa $m= 2.00$ Kg lungo un piano inclinato, viene poggiata ferma su una molla compressa di $l=0.200$ m. Trascurando l'attrito, e considerando la costante elastica della molla $K=1.96 \cdot 10^3$ N/m e $\alpha = 30^\circ$. Una volta lasciata libera la molla, trovare:

- Energia Potenziale della molla compressa
- Di quanto varia l'energia potenziale gravitazionale durante l'intero tragitto (raggiungimento

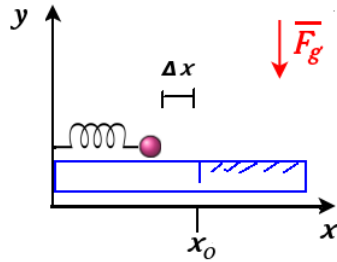


Figura IV.18

della massima quota)

c) quanto lontano lungo il piano inclinato viene spinto il blocco

*** Esercizio 85

Con riferimento alla figura IV.18, una molla ($k = 640 \text{ N/m}$), alla quale è stato attaccato un corpo di massa $m=3.5 \text{ Kg}$, viene compressa di una lunghezza Δx rispetto al punto di equilibrio x_0 . Il piano sul quale è poggiato la massa non presenta attrito per $x < x_0$ e presenta un attrito dinamico con $\mu_d=0.25$. La massa si ferma ad una distanza $D=7.8 \text{ m}$ dal punto di equilibrio x_0 . Trovare:

- quanta energia meccanica è stata dissipata
- qual è la massima energia cinetica della massa
- di quanto era compressa la molla

*** Esercizio 86

Una massa ($m=550 \text{ g}$) sta scendendo lungo un piano inclinato che forma un angolo di 45° con il suolo. Dopo essere scivolato di un tratto d incontra una molla in equilibrio. L'oggetto continua a scivolare per un ulteriore tratto $x= 3.0 \text{ cm}$. La molla ha costante elastica $k= 100 \text{ N/m}$. Trovare il tratto d .

Punti di Equilibrio

*** Esercizio 87

Una molecola, composta da due atomi, ha una energia potenziale funzione della distanza di separazione r data da:

$$U(r) = \frac{k_1}{r^{12}} - \frac{k_2}{r^6}$$

dove k_1 e k_2 sono due costanti positive. Trovare la distanza di equilibrio r_0 in funzione di k_1 e k_2 .

**** Esercizio 88

La massa m cava in figura IV.19 è vincolata a scorrere su una guida verticale circolare di raggio r . Dimostrare che i punti A e B sono di equilibrio e trovare se sono stabili o instabili.

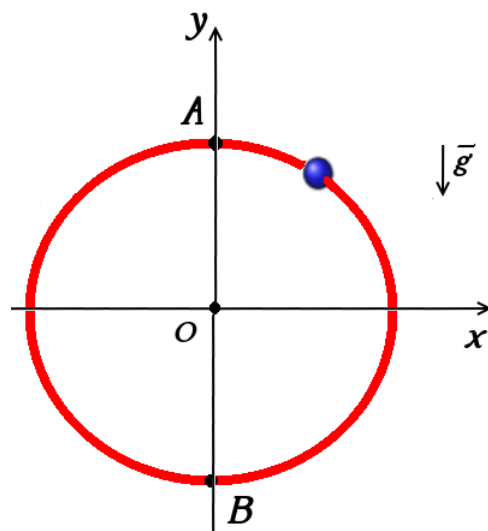


Figura IV.19

Capitolo V

Quantità di Moto e Urti

In questo capitolo tratteremo la quantità di moto nel caso di punti materiali e di sistemi di punti materiali. Verrà anche trattato il caso degli urti.

Concetti Fondamentali

- centro di massa di un sistema di punti materiali
- quantità di moto
- seconda legge di Newton per sistemi
- primo teorema del centro di massa
- impulso
- conservazione quantità di moto
- urti

V.1 Centro di Massa

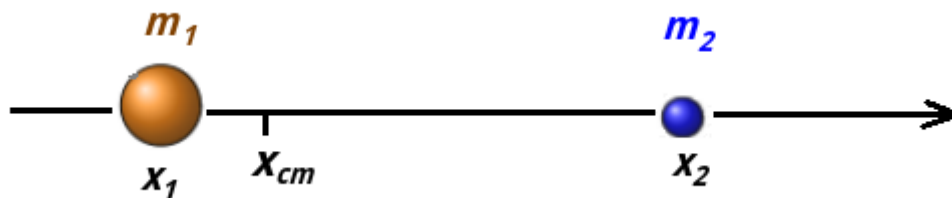


Figura V.1: Centro di Massa di due punti materiali.

Il *centro di massa* di un sistema di punti materiali è il punto che:

1. si muove come se la massa totale del sistema si fosse concentrata
2. si comporta come se la risultante delle forze esterne al sistema vi agisse

Consideriamo il caso in Fig. (V.1), in cui vediamo due punti materiali di massa diversa m_1 e m_2 . È naturale pensare che, se tracciamo un asse x che congiunge le due masse, il centro di massa x_{cm} del sistema debba essere più vicino alla massa più elevata. Dalla definizione di centro di massa sappiamo che questo si comporta come se avesse una massa totale di $(m_1 + m_2) = M$. La sua posizione sarà:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{V.1})$$

Nel caso in cui una massa sia molto più grande dell'altra, il centro di massa va a coincidere con la posizione della massa più grande. Dividiamo infatti il numeratore e il denominatore del secondo membro della (V.9) per la massa più grande m_1 :

$$x_{cm} = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1} x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \quad (\text{V.2})$$

Se $m_1 \gg m_2$, la quantità $\left(\frac{m_2}{m_1}\right)$ risulta $\ll 1$ e quindi si può trascurare:

$$\text{se } m_1 \gg m_2 \quad x_{cm} \approx x_1 \quad (\text{V.3})$$

La formula (V.9) si può generalizzare al caso di n particelle disposte in uno spazio tridimensionale:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (\text{V.4})$$

dove la massa totale M è data da:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad (\text{V.5})$$

In un sistema cartesiano, una posizione generica \vec{r}_m è data da:

$$\vec{r}_m = x_m \hat{i} + y_m \hat{j} + z_m \hat{k} \quad (\text{V.6})$$

Quindi la (V.11) può essere riscritta considerando solo componente per componente:

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad (\text{V.7})$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad (\text{V.8})$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i \quad (\text{V.9})$$

Vederemo più avanti come questi risultati possono essere generalizzati nel caso di corpi continui.

V.2 Seconda Legge di Newton per sistemi

Si supponga di avere un sistema di punti materiali *chiuso*, cioè che non ha scambi di materia con l'ambiente esterno. Riscriviamo la (V.11) come:

$$M \vec{r}_{cm} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (\text{V.10})$$

derivando questa espressione rispetto al tempo, troviamo tutte le velocità istantanee nei punti coinvolti:

$$M \vec{v}_{cm} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad (\text{V.11})$$

derivando ancora troviamo le accelerazioni:

$$M \vec{a}_{cm} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \quad (\text{V.12})$$

Per la seconda legge di Newton, ogni accelerazione impressa ad ogni massa è responsabile una risultante di forze non nulla applicata su di essa:

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i \quad (\text{V.13})$$

quindi la V.12 si riscrive come:

$$M \vec{a}_{cm} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (\text{V.14})$$

A questo punto, nella sommatoria a destra bisogna identificare quali forze sono interne al sistema e quali esterne:

$$M\vec{a}_{cm} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{int} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ext} \quad (\text{V.15})$$

- *forze interne*

Queste forze interne, come tutte le forze, intervengono sempre come coppie di azione e reazione. Indicando con \vec{F}_{ij} la forza che la particella j -esima esercita sulla i -esima si ha $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ per cui il risultante delle forze interne è nullo:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{int} = \sum_{i=1, j \neq i}^n \vec{F}_{ij} = \vec{0} \quad (\text{V.16})$$

- *forze esterne* azioni esercitate da punti appartenenti all'ambiente circostante esterno al sistema. Ad esse saranno accoppiate forze di reazione dei punti del sistema verso l'ambiente, che tuttavia saranno applicate solo su quest'ultimo.

La (V.15) quindi si riscrive come:

$$M\vec{a}_{cm} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ext} \quad (\text{V.17})$$

Se con \vec{F}^e si indica la risultante delle forze esterne agente su tutti i punti del sistema:

$$\vec{F}^e = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ext} \quad (\text{V.18})$$

Abbiamo quindi la generalizzazione della seconda legge di Newton per sistemi di punti materiali:

$$M\vec{a}_{cm} = \vec{F}^e \quad (\text{V.19})$$

Il centro di massa di un sistema di punti materiali si comporta come un punto materiale avente la massa totale del sistema sotto l'azione della risultante delle forze esterne agente su tutti i punti del sistema. L'accelerazione \vec{a}_{cm} indica soltanto l'accelerazione del centro di massa e non dà l'informazione riguardo al moto dei singoli punti materiali che compongono il sistema. Un esempio è quella dell'esplosione di un fuoco di artificio se, trascurando l'attrito dell'aria, si considera come la forza peso unica forza agente sul sistema dopo il lancio. Prima di esplodere il proiettile si muoverà di moto parabolico con una certa traiettoria. Le forze coinvolte nell'esplosione sono tutte forze interne e quindi non compaiono nella sommatoria nella (V.18). Prima e dopo l'esplosione l'unica forza esterna che agisce è la forza peso. Quindi il centro di massa del proiettile, anche dopo l'esplosione e indipendentemente dalla direzione dei frammenti, continuerà a muoversi di moto parabolico come se l'esplosione non fosse mai avvenuta. Altro esempio è il salto di una ballerina (Fig. (V.3)) che compie un balzo muovendo braccia e gambe; appena i suoi piedi lasciano il suolo, il suo centro di massa traccia una traiettoria parabolica

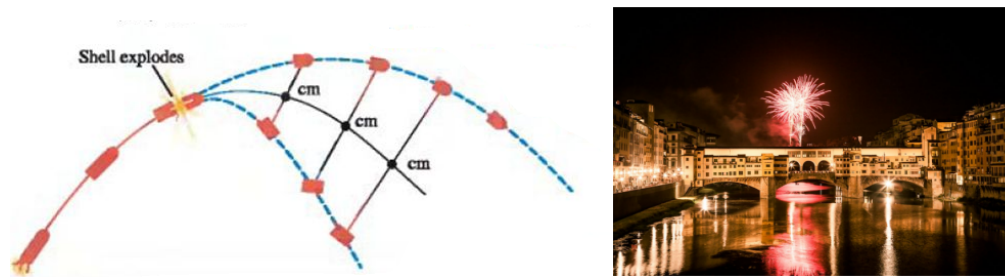


Figura V.2: A sinistra il moto di un proiettile che dopo un'esplosione si divide in due frammenti. Il centro di massa del sistema segue sempre la stessa traiettoria parabolica prima e dopo l'esplosione. In un fuoco d'artificio, questa esplosione divide il proiettile in moltissimi frammenti, ma il moto del centro di massa rimane lo stesso.

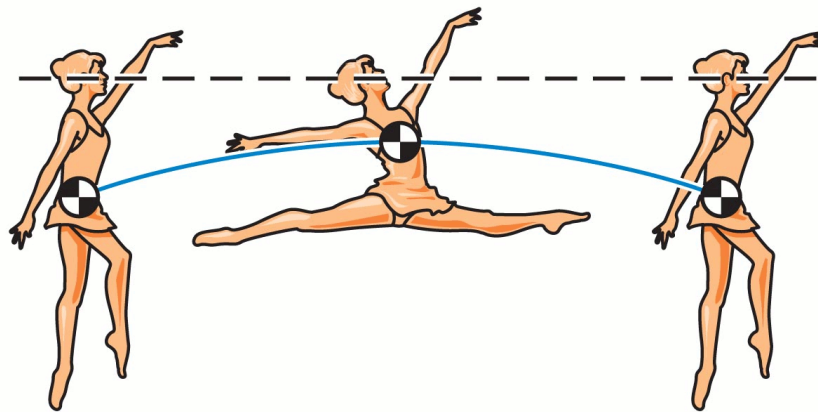


Figura V.3: Moto del centro di massa durante un salto di una ballerina.

fino all'atterraggio. Se le gambe e le braccia si muovono, la testa e il busto raggiungeranno un'altezza più bassa di quella che avrebbero avuto mantenendo il corpo rigido. Il risultato è che la testa e il busto seguono un moto quasi orizzontale.

Se un sistema è *isolato* cioè, oltre ad essere chiuso, non risente dell'interazione con altri elementi dell'ambiente esterno ad esso (condizione che si può in pratica ottenere solo in approssimazione):

$$\text{sistema isolato} \quad M\vec{a}_{cm} = \vec{0} \quad (\text{V.20})$$

e quindi il centro di massa del sistema obbedisce alla prima legge di Newton e possiamo individuare un sistema di riferimento inerziale rispetto al quale il centro di massa è in quiete o si muove in moto rettilineo uniforme, indipendentemente dal moto relativo degli elementi interni al sistema. In Fig. (V.4) un sistema è costituito da due sfere di uguale massa. Quella azzurra si muove in moto rettilineo uniforme fino ad urtare quella gialla. Nell'istante dopo l'urto, la sfera azzurra si ferma e quella gialla inizia a muoversi. Se durante questo processo il sistema può essere considerato isolato, il centro di massa del sistema si muove durante tutto il processo di moto rettilineo uniforme, indipendentemente dalla velocità che hanno le due masse nei diversi istanti.

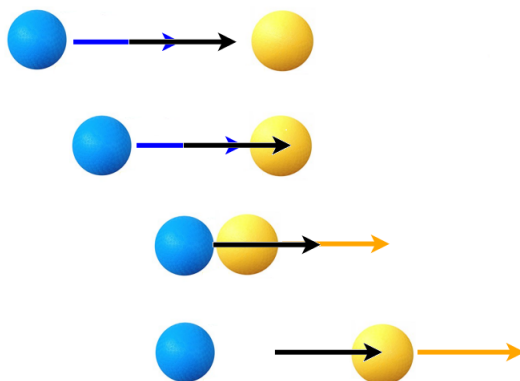


Figura V.4: Se non agiscono forze esterne sulle due sfere, il centro di massa del sistema costituito da esso si muove di moto rettilineo uniforme (freccia nera).

V.3 Quantità di Moto

V.3.1 Quantità di Moto per un punto materiale

Se abbiamo un punto materiale con massa m e velocità \vec{v} , si definisce la *quantità di moto* \vec{q} ^[1]:

$$\vec{q} = m\vec{v} \quad (\text{V.21})$$

A volte \vec{q} viene chiamato anche *momento* ^[2]. Dimensionalmente:

$$[q] = [L^1 M^1 T^{-1}] \quad (\text{V.22})$$

In SI si misura in kg·m/s.

Si può quindi riscrivere la seconda legge di Newton in termini di quantità di moto, derivando la (V.21) ^[3]:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} \quad (\text{V.23})$$

dato che:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = m\vec{a} \quad (\text{V.24})$$

Quindi la quantità di moto di un punto materiale può variare solo in presenza di una forza applicata su di essa.

La (V.23) può essere riscritta evidenziando la variazione infinitesima di quantità di moto dovuta all'applicazione di una forza (in generale, dipendente dal tempo) per una quantità di tempo infinitesima.

$$d\vec{q} = \vec{F}(t)dt \quad (\text{V.25})$$

^[1]Il simbolo può cambiare in testi diversi (come ad esempio \vec{p}).

^[2]In testi di fisica avanzata viene chiamato anche *impulso*, che tuttavia in Fisica Classica ha un altro significato, anche se connesso.

^[3]Per sistemi a massa costante.

da cui:

$$\int_{t_i}^{t_f} d\vec{q} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt \quad (\text{V.26})$$

$$\vec{q}_f - \vec{q}_i = \Delta\vec{q} = \vec{J} \quad (\text{V.27})$$

dove con \vec{J} chiamiamo l'*impulso della forza*:

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt \quad (\text{V.28})$$

Se la forza è variabile, ma si conosce il suo valore medio $\langle \vec{F} \rangle$ (Fig. (V.5)):

$$\vec{J} = \langle \vec{F} \rangle \Delta t \quad (\text{V.29})$$

Dimensionalmente:

$$[J] = [F][\Delta t] = [L^1 M^1 T^{-2}][L^0 M^0 T^1] = [L^1 M^1 T^{-1}] \quad (\text{V.30})$$

In SI si misura in kg·m/s.

Nel caso in cui la forza sia costante nel tempo, la (V.28) si riduce a:

$$\vec{J} = \vec{F}\Delta t \quad (\text{V.31})$$

L'equazione (V.27) va sotto il nome di *teorema dell'impulso*: la variazione della quantità di moto su un punto materiale è data dall'impulso della forza applicata. Se sulla particella non agiscono forze, la quantità di moto del punto materiale quindi rimane inalterata.

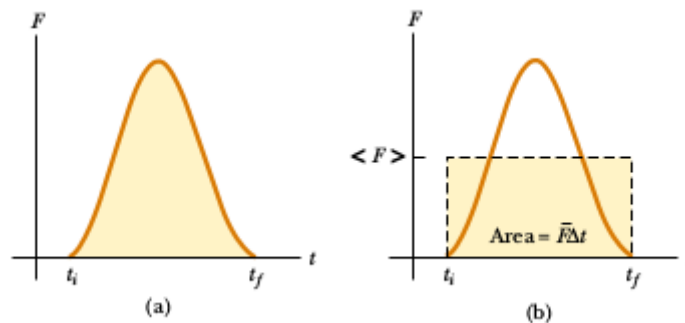


Figura V.5: In a), l'integrale di una forza variabile (caso 1D) è uguale all'area sottesa dalla curva. In b), questo integrale è equivalente all'area del rettangolo tratteggiato conoscendo $\langle \vec{F} \rangle$.

Il teorema dell'impulso può essere espresso in termini di componenti di \vec{F} e \vec{q} :

$$\Delta q_x = \int_{t_i}^{t_f} F_x dx \quad (\text{V.32})$$

e analogamente per le componenti lungo gli altri assi.

V.3.2 Primo e Secondo Teorema del Centro di Massa

Si può generalizzare la quantità di moto nel caso di un sistema composto da n punti materiali. Chiamiamo con \vec{Q} la quantità di moto complessiva del sistema:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n \vec{q}_i \quad (\text{V.33})$$

Da questa equazione, utilizzando la (V.21) e la (V.11) si trova:

$$\vec{Q} = M\vec{v}_{cm} \quad (\text{V.34})$$

Questo risultato va sotto il nome di *primo teorema del centro di massa*: *Ai fini del calcolo della quantità di moto, l'intero sistema può essere trattato come un punto materiale, coincidente col centro di massa, avente massa pari alla massa totale.*

Possiamo riscrivere quindi derivare la (V.34) e usare la (V.19) come:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e \quad (\text{V.35})$$

che fornisce la *prima equazione della dinamica dei sistemi di punti materiali*: la variazione istantanea della quantità di moto è dovuta alla risultante delle sole forze esterne agenti sul sistema.

La (V.35) può essere a sua volta riscritta come:

$$\vec{F}^e = M\vec{a}_{cm} \quad (\text{V.36})$$

che prende il nome di *secondo teorema del centro di massa*, che non è altro che la già vista generalizzazione della seconda legge di Newton per sistemi (Fig. (V.19)): *Il centro di massa di un sistema si muove come un punto materiale nel quale sia concentrata l'intera massa del sistema e sul quale agisca il risultante delle forze esterne.*

Il moto del centro di massa fornisce le informazioni riguardante la parte traslatoria del sistema. Nel caso in cui non vi siano forze esterne:

$$\left(\text{Se } \vec{F}^e = \vec{0}\right) \longrightarrow \vec{Q} = \text{costante} \quad (\text{V.37})$$

Questo risultato va sotto il nome di *principio di conservazione della quantità di moto*: *Se il sistema è isolato (la risultante delle forze esterne è nulla) la quantità di moto complessiva (cioè la somma della quantità di moto degli elementi) del sistema rimane costante.* La somma delle quantità di moto dei due oggetti sarà in questo caso costante nel tempo, benché in generale queste quantità di moto non siano costanti, considerate singolarmente. Questo risultato sarà particolarmente importante nella trattazione degli urti.

Facciamo prima alcuni esempi di esperienza quotidiana. Se una persona in piedi su un carrello, o su una barca, spicca un salto in avanti, il corpo su cui si trova compie un movimento in senso opposto. Diversi tipi di propulsione si basano proprio sulla conservazione della quantità di moto del sistema composto dal corpo e l'ambiente circostante, soprattutto quando si tratta di un fluido: ad esempio, su una barca è montato un motore che aziona pale simili a quelle di un ventilatore; esse spingono l'aria verso il retro della barca e l'aria spinge

le pale e quindi la barca in avanti. In mare, i remi dei vogatori e le pale dell'elica della nave spingono contro l'acqua. E nei cieli le ali degli uccelli e le eliche degli aeroplani spingono contro l'aria.

Consideriamo il caso del rinculo di un fucile dopo lo sparo di un proiettile. Prima dello sparo la quantità di moto del sistema fucile + proiettile è nulla, in quanto il sistema è isolato e fermo. Indichiamo con m_f e m_p la massa rispettivamente del fucile e del proiettile e con v_f e v_p le loro velocità dopo l'esplosione del colpo. Dopo lo sparo la quantità di moto del sistema deve essere ancora nulla, e poiché il proiettile acquista una certa quantità di moto, il fucile ne deve acquistare una uguale e contraria, muovendosi in senso opposto al proiettile. Quando le forze interne sono molto più intense di quelle esterne (durante il brevissimo intervallo di tempo dell'esplosione), è possibile considerare isolato il sistema e applicare, pertanto, la conservazione della quantità di moto:

$$0 = m_f v_f + m_p v_p \quad (\text{V.38})$$

La velocità di rinculo del fucile è:

$$v_f = -v_p \frac{m_p}{m_f} \quad (\text{V.39})$$

La velocità del fucile dopo l'esplosione è quindi diretta nel verso opposto a quella del proiettile.

V.4 Urti

V.4.1 Conservazione della Quantità di Moto durante un urto

Un *urto* è un'interazione tra corpi che ha luogo in una regione limitata e molto piccola del tempo e dello spazio. Un esempio è una rapida collisione tra due corpi. Data la rapidità con la quale avviene l'urto (dalla durata che può essere considerata istantanea), i corpi coinvolti in molti casi possono essere considerati isolati, anche se su di essi agiscono delle forze esterne. Questa approssimazione non risulta tuttavia valida se sui corpi stanno agendo delle forze vincolari in grado di esercitare delle *forze impulsive* per soddisfare le condizioni sul vincolo.

Se il sistema può essere considerato isolato durante l'urto, per il sistema vale la (V.37), cioè la quantità di moto totale si conserva. Questa è quindi una proprietà dell'urto che, indipendentemente dal tipo di urto, risulta sempre verificata ogni volta che possiamo considerare il sistema dei corpi coinvolti come isolato durante il breve tempo della collisione. Quindi se due punti materiali si scontrano con quantità di moto \vec{q}_{1i} e \vec{q}_{2i} , dopo l'urto avranno due quantità di moto \vec{q}_{1f} e \vec{q}_{2f} tali da soddisfare la seguente relazione:

$$\vec{Q}_i = \vec{Q}_f \longrightarrow \vec{q}_{1i} + \vec{q}_{2i} = \vec{q}_{1f} + \vec{q}_{2f} \quad (\text{V.40})$$

Vedremo invece che l'energia cinetica è una quantità che non sempre si conserva durante un urto. Durante l'urto il sistema è isolato e quindi la sua dinamica è governata da forze interne che, nel caso non siano conservative, compiono lavoro non nullo durante l'interazione.

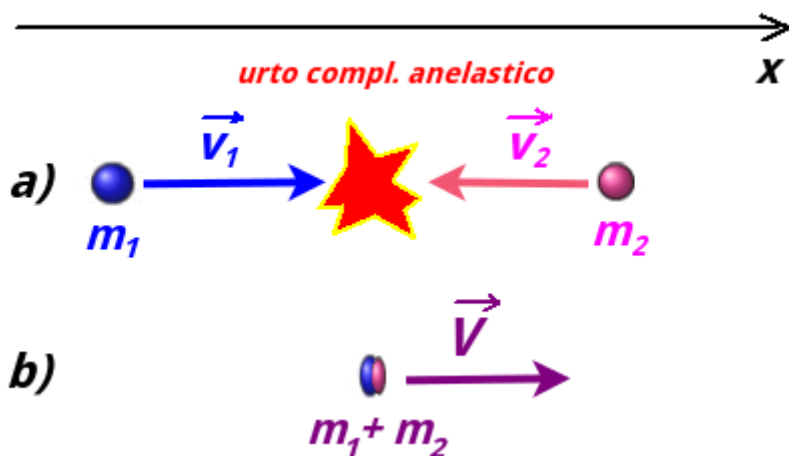


Figura V.6: Caso di un urto completamente anelastico. In a) siamo nell'istante immediatamente precedente l'urto e in b) in quello successivo.

V.4.2 Urto anelastico

Un urto durante il quale l'energia non sia conservata è detto *urto anelastico*. Tra questo tipo di urti, nel caso di *urto completamente anelastico* (o *urto perfettamente anelastico*), dopo il quale i corpi si fondono in un unico corpo con massa uguale alla somma delle masse dei corpi coinvolti. In Fig. (V.6), c'è un esempio di urto frontale tra due particelle che avviene in una direzione individuata dall'asse x . Le quantità di moto prima dell'urto (caso 1D) sono $q_1 = m_1 v_1$ e $q_2 = m_2 v_2$ (istante a)). Subito dopo l'urto si è formato un corpo di massa $(m_1 + m_2)$ e con velocità V . Durante l'urto il sistema è isolato e quindi possiamo applicare la conservazione dell'impulso:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V \quad (\text{V.41})$$

da cui si può ricavare la velocità di due corpi fusi insieme dopo l'urto:

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{V.42})$$

Durante il processo di urto completamente anelastico si può verificare che l'energia cinetica non si conserva durante il processo:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 > 0 \quad (\text{V.43})$$

L'energia dispersa si trasforma principalmente in calore e nell'urto anelastico questa dissipazione di energia cinetica è massima.

In genere uno dei due corpi è fermo prima dell'urto (*bersaglio*), mentre tutta la quantità di moto del sistema prima dell'urto è data dalla quantità di moto del corpo in movimento (*bersaglio*). Un caso pratico per lo sfruttamento di questo tipo di urto è il *pendolo balistico*, un dispositivo un tempo usato per la misura della velocità di un proiettile di massa m , sparato con velocità orizzontale di modulo v contro la massa. Il pendolo balistico è costituito da una massa

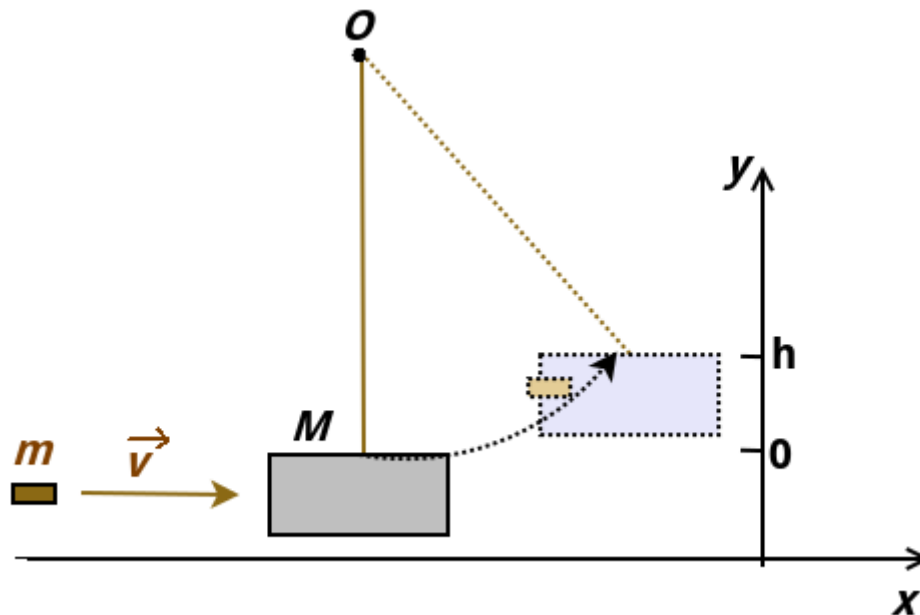


Figura V.7: Schema semplificato del pendolo balistico per la misura della velocità dei proiettili. Il disegno tratteggiato è la configurazione del sistema dopo l'urto anelastico tra proiettile e bersaglio, nell'istante in cui il pendolo raggiunge la sua quota più elevata durante l'oscillazione.

M appesa con dei fili verticali (nel disegno per semplicità è stato disegnato solo un filo) ed inizialmente in condizioni statiche. Lo studio di questo tipo di problema avviene in due fasi: nella prima studiamo l'urto anelastico e nella seconda studiamo il moto del nuovo corpo formato dalla massa M e dal proiettile dopo l'urto.

Nella prima fase abbiamo un processo di urto praticamente istantaneo ed anelastico. Il sistema può essere quindi considerato isolato durante l'urto, anche se c'è la forza esterna della forza peso. L'altra forza esterna in gioco è la tensione \vec{T} della corda, che potrebbe esercitare una forza impulsiva durante l'urto. Tuttavia, questa forza è diretta lungo l'asse y , mentre l'urto avviene lungo l'asse x . Il suo contributo come forza impulsiva è nullo durante il tempo della collisione. Si può trattare quindi il sistema come isolato durante l'urto e applicare la conservazione dell'impulso lungo l'asse x , trovando:

$$V = \frac{mv}{m + M} \quad (\text{V.44})$$

Subito dopo l'urto si è formato un nuovo corpo composto dal proiettile + la massa M con velocità iniziale V diretta lungo l'asse x . Da questo momento in poi passiamo alla seconda fase del problema, dove la forza peso è la forza conservativa esterna. L'energia meccanica del sistema prima dell'urto non si è conservata, ma si conserverà negli istanti successivi. Durante la sua prima oscillazione, il pendolo raggiungerà una variazione di quota h , prima di invertire il moto. Quindi, nella seconda fase del processo, l'energia meccanica nella quota $y = 0$ ($E_M(0)$) (nell'istante successivo dopo l'urto, quando tutta l'energia è energia cinetica) sarà uguale a quella nella quota massima $y = h$ ($E_M(h)$) (dove tutta l'energia si è trasformata in energia

potenziale gravitazionale):

$$E_m(0) = E_M(h) \longrightarrow \frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh \quad (\text{V.45})$$

Inserendo la (V.44) nella (V.45) e risolvendo per v , si ottiene:

$$\frac{1}{2}(m + M) \left(\frac{mv}{m + M} \right)^2 = (m + M)gh \quad (\text{V.46})$$

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh} \quad (\text{V.47})$$

Misurando quindi la quota massima h di salita del pendolo balistico e le masse M e m si misura indirettamente la velocità del proiettile.

V.4.3 Urto elastico

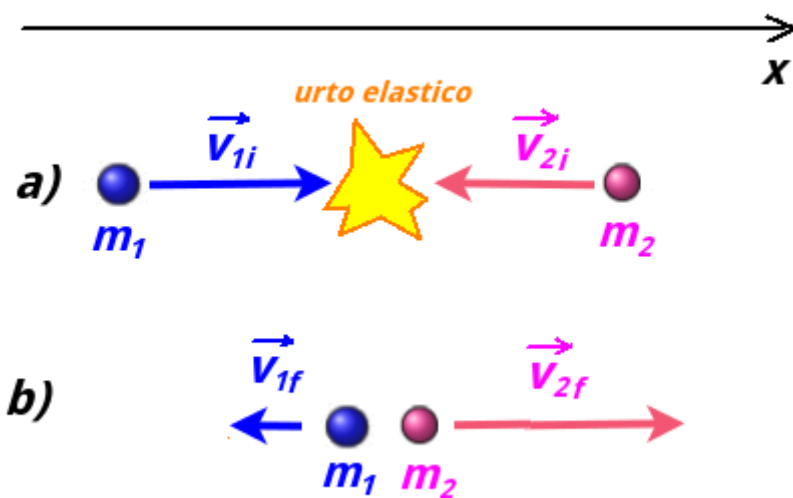


Figura V.8: Caso di un urto elastico. In a) siamo nell'istante immediatamente precedente l'urto e in b) in quello successivo.

Nel caso di un'urto *elastico* a conservarsi, oltre alla quantità di moto è anche l'energia cinetica totale dei due corpi. Quindi le forze interne all'opera durante la collisione non dissipano energia cinetica. Tratteremo solo il caso di urti unidimensionali di punti materiali, che è un caso di *urti centrali*, cioè un urto tra corpi il cui moto avviene lungo la congiungente dei centri di massa.

Indicando con v_{1i} e v_{2i} le velocità iniziali delle masse m_1 e m_2 e con v_{1f} e v_{2f} quelle finali, si impone la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica del sistema:

$$Q : \quad m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (\text{V.48})$$

$$K : \quad \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \quad (\text{V.49})$$

Conoscendo le masse e le velocità iniziali, dalla (V.48) e dalla (V.49) si possono ricavare le velocità finali dopo l'urto:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2i} \quad (\text{V.50})$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{2i} \quad (\text{V.51})$$

Per la derivazione di questi espressioni, si veda la Appendice A).

In genere abbiamo a che fare con situazioni semplificate:

- caso $m_1 = m_2$

Se i corpi hanno la stessa massa, dopo un urto elastico centrale “si scambiano” le velocità: le (V.50) e (V.51) si riducono infatti a:

$$v_{1f} = v_{2i} \quad (\text{V.52})$$

$$v_{2f} = v_{1i} \quad (\text{V.53})$$

- caso $v_{2i} = 0$

uno dei due corpi (il corpo 2) è fermo:

le (V.50) e (V.51) si riducono a:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} \quad (\text{V.54})$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} \quad (\text{V.55})$$

- caso $v_{2i} = 0$ $m_2 \gg m_1$

oltre ad essere fermo, il corpo 2 ha anche una massa molto più grande dell'altra:

dividendo i numeratori e denominatori del secondo membro delle (V.56) e (V.57) per m_2 , queste si approssimano a:

$$(m_2 \gg m_1) \quad v_{1f} = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}v_{1i} \approx -v_{1i} \quad (\text{V.56})$$

$$(m_2 \gg m_1) \quad v_{2f} = \frac{2\frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + 1}v_{1i} \approx 0 \quad (\text{V.57})$$

Con questa approssimazione, il corpo 1 “rimbalza” sul corpo più grande invertendo la sue velocità, mentre il corpo 2 rimane in quiete.

- caso $v_{2i} = 0$ $m_2 \ll m_1$

il corpo 2 è sempre in quiete, ma questa volta è il corpo 1 ad essere più massivo: dividendo i numeratori e denominatori del secondo membro delle (V.56) e (V.57) per m_1 , queste si approssimano a:

$$(m_2 \ll m_1) \quad v_{1f} = \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} v_{1i} \approx v_{1i} \quad (\text{V.58})$$

$$(m_2 \ll m_1) \quad v_{2f} = \frac{2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} v_{1i} \approx 2v_{1i} \quad (\text{V.59})$$

Con questa approssimazione, il corpo 1 mantiene il suo stato di moto, mentre il corpo 2 rimane ottiene una velocità pari a due volte quella del corpo più grande.

Riepilogo Formule Quantità di Moto

- *Posizione del Centro di Massa per n punti materiali*

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

- *Seconda Legge di Newton per Sistemi (secondo teorema del centro di massa)*

$$M \vec{a}_{cm} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}_i^e$$

- *Quantità di Moto di un Punto Materiale*

$$\vec{q} = m \vec{v}$$

- *Impulso di una Forza*

$$\vec{J} = \int_{\Delta t} \vec{F}(t) dt$$

- *Teorema dell'impulso*

$$\Delta \vec{q} = \vec{J}$$

- *Primo Teorema del Centro di Massa*

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n \vec{q}_i = M \vec{v}_{cm}$$

- *Prima Equazione della Dinamica per Sistemi di Punti Materiali*

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e$$

Riepilogo Formule Urti

- *Urto generico*

$$\vec{Q} = \text{costante}$$

- *Urto elastico*

$$\vec{Q} = \text{costante}$$

$$K_{\text{tot}} = \text{costante}$$

- *Urto elastico unidimensionale tra due masse 1 e 2*

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

Esercizi

Centro di Massa

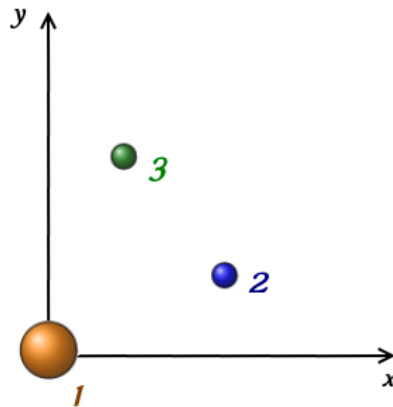


Figura V.9

* Esercizio 89

Il sistema in figura V.9 è costituito da 3 particelle: $m_1=10.0$ kg di coordinate (0.0, 0.0) m, $m_2=3.0$ kg di coordinate (2.0, 1.0) m e $m_3=2.0$ kg di coordinate (1.0, 3.0) m. Si trovino le coordinate del centro di massa.

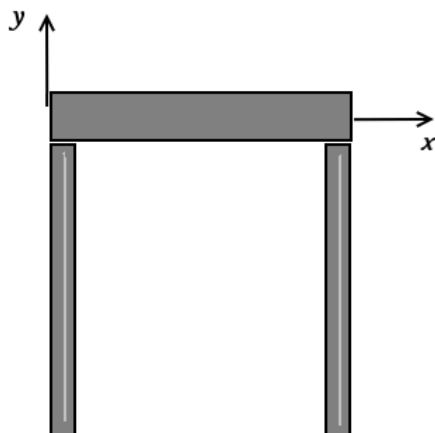


Figura V.10

**** Esercizio 90**

Il sistema in figura V.10 è costituito da 3 bacchette omogenee sottili lunghe $L=22$ cm. Le due bacchette verticali hanno massa m e quella orizzontale $3m$. Quali sono le coordinate del centro di massa?

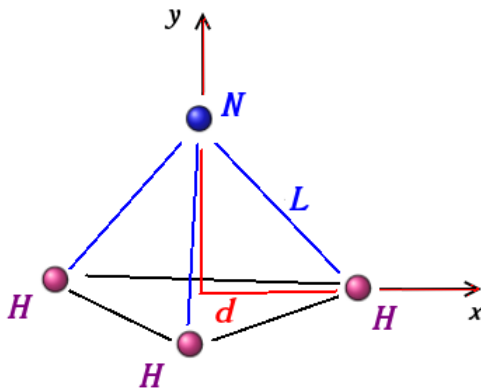


Figura V.11

***** Esercizio 91**

In figure V.11 è schematizzata la molecola dell'ammoniaca (NH_3), con i 3 atomi di idrogeno che formano un triangolo equilatero, il cui baricentro si trova a $d = 9.40 \cdot 10^{-11}$ m da ciascun atomo di idrogeno. L'atomo di azoto è il vertice della piramide retta. La distanza L è $10.14 \cdot 10^{-11}$ m e il rapporto tra le masse atomiche N/H è 13.9. Trovare le coordinate del centro di massa rispetto all'azoto sul piano x, y .

Seconda Legge di Newton per sistemi***** Esercizio 92**

Una massa m_1 0.50 kg e una massa m_2 di 1.50 kg si trova nello stesso punto di coordinate $\vec{r}=(1.0\hat{i}+2.0\hat{j})$ m. A partire dall'istante $t = 0$ s agiscono due forze esterne al sistema delle due masse: su m_1 agisce $\vec{F}_1=(2.0\hat{i}+3.0\hat{j})$ N e $\vec{F}_2 = (-3.0\hat{i}-2.0\hat{j})$. Qual è la posizione finale del centro di massa nell'istante t_2 4.0 s?

Impulso

** Esercizio 93

Un'automobile di massa m 1.5 tonnellate si muove a velocità $\vec{v}_i = -15.0\hat{i}$ m/s verso un muro posto ad una coordinata x minore di quella dell'auto. Dopo l'urto, la velocità dell'auto è $\vec{v}_f = 2.60\hat{i}$ m/s. Se la collisione dura Δt 150 ms, trovare l'impulso \vec{J} dovuto alla collisione e la forza media $\langle F \rangle$ esercitata sull'auto.

Conservazione della Quantità di Moto

** Esercizio 94

Un proiettile è stato sparato da un cannone con velocità v di modulo 20 m/s con un angolo $\theta = 60^\circ$. Al vertice della traiettoria del proiettile, questo esplose rompendosi in due frammenti di uguale massa. Uno dei due ha velocità nulla e cade verticalmente. A che distanza dal cannone cade il proiettile?

**** Esercizio 95

Un cannone di massa $M= 1.00$ tonnellata non fisso, inizialmente a riposo su un piano orizzontale senza attrito, spara un proiettile di massa $m=30.0$ kg in direzione $\theta=60^\circ$ a velocità relativa $v_0=40$ m/s rispetto al cannone. a) Trovare il moto del cannone dopo lo sparo. b) Viene aggiunto un sistema di ammortizzazione per frenare il rinculo del cannone lungo il piano orizzontale. Questo sistema può essere schematizzato con un sistema elastico con $k = 1.00 \cdot 10^3$ N/m. Di quanto si accorcia il sistema di ammortizzamento?

** Esercizio 96

Un'astronave sta viaggiando alla velocità v_0 di $4.3 \cdot 10^3$ km/h. In un certo istante espelle il propulsore esaurito alla velocità v_r di 82 km/h rispetto al modulo di comando. La massa M del propulsore è 4 volte quella del modulo di comando m . Qual è dopo questo istante, la nuova velocità v del modulo?

** Esercizio 97

Una granata in volo a $v_0 = 10$ m/s esplose in due frammenti. Il primo dei due ha il 60% della massa originaria e continua a muoversi nella stessa direzione e verso precedente l'esplosione con velocità \vec{v}_1 di modulo 25 m/s. Trovare la velocità del frammento più piccolo.

*** Esercizio 98

Un pattinatore di massa $M = 70$ kg è in piedi sul ghiaccio e lancia orizzontalmente una pietra di massa $m=3.0$ kg con velocità di modulo $v= 8.0$ m/s. Si trovi a che distanza egli

percorrerà a causa del rinculo se il coefficiente di attrito dinamico tra i pattini ed il ghiaccio è pari a $\mu_d=0.02$.

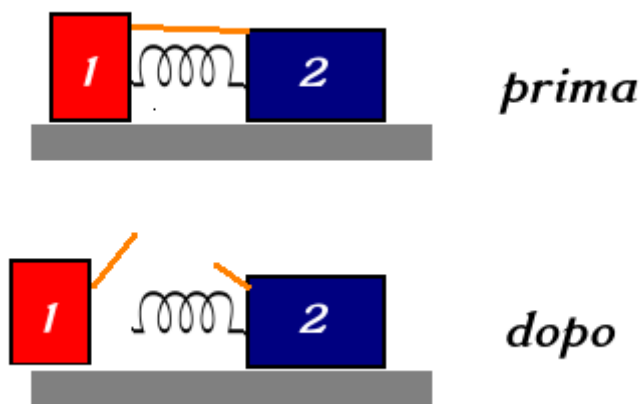


Figura V.12

*** Esercizio 99

Con riferimento alla figura V.12, due blocchi di masse m (1) e $3m$ (2), dove $m = 0.350$ kg si trovano su un piano orizzontale senza attrito. Una molla di massa trascurabile è fissata ad uno di essi e in due blocchi vengono spinti uno contro l'altro (con la molla nel mezzo) e assicurati con una fune una volta messa in compressione la molla (prima) (compressione di $d= 1.00$ cm). La fune viene poi successivamente tagliata (dopo) e il corpo 2 si muove verso destra con velocità di modulo $v_2=2.00$ m/s. Trovare: a) velocità del blocco 1 b) k della molla

Urti

** Esercizio 100

Due masse $m_1 = 0.50$ kg e $m_2=1.50$ kg sono sospese tramite una fune al soffitto. Inizialmente, ogni massa è accanto all'altra, con la massa m_1 a sinistra. Quest'ultima viene innalzata di una quota $h=13$ cm tenendo il filo sempre teso e poi lasciata andare, provocando un urto elastico con la massa m_2 . Trovare il moto delle due masse dopo l'urto.

** Esercizio 101

Un pezzo di legno di massa $M=5.4$ kg è sospeso tramite due funi al soffitto. Orizzontalmente viene sparato un proiettile contro di massa $m=9.5$ g e velocità non nota. Il proiettile si conficca nel legno, determinando un urto completamente anelastico. Dopo l'urto, mantenendo le corde tese, il pezzo di legno si alza di una quota $h=6.3$ cm. Quanto era la velocità del proiettile.

** Esercizio 102

Un'auto di massa $m_1 = 1.80 \cdot 10^3$ kg, ferma ad un semaforo, viene tamponata da un'altra auto di massa $m_2 = 9.00 \cdot 10^2$ kg. Se la seconda auto viaggiava a $v_2 = 20.0$ m/s e le macchine rimangono incastrate dopo l'urto, qual'è la velocità finale v_f dopo l'urto delle due auto?

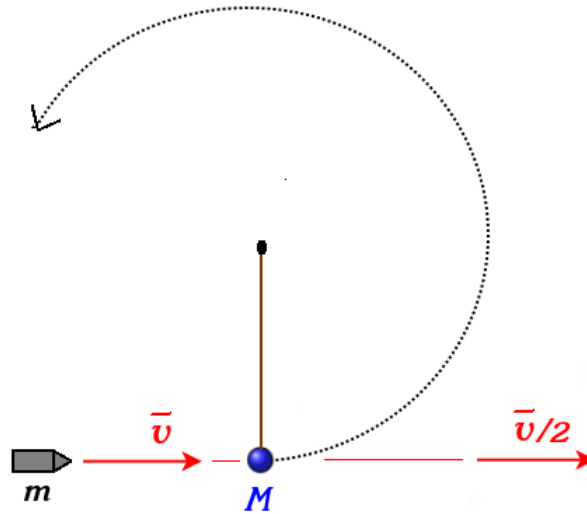


Figura V.13

*** Esercizio 103

Due auto di massa $m_1 = 1000$ kg e $m_2 = 1200$ kg si urtano provenendo da due direzioni perpendicolari in un urto completamente anelastico. Dopo l'urto le auto rimangono fuse insieme e la velocità del *cm* del nuovo corpo ha direzione $\theta = \pi/6$ rispetto alla direzione originaria della prima auto. Sapendo che il modulo della velocità della seconda auto è 80 km/h, trovare la velocità della prima. Trovare anche l'energia cinetica dissipata in altra forma.

**** Esercizio 104

Con riferimento alla figura V.13, un proiettile di massa m e velocità di modulo v penetra attraverso una massa M ed emerge con velocità invariata in direzione verso ma dimezzata in modulo. La massa M è attaccata tramite un'asta rigida ad un gancio e dopo il colpo subito compie una oscillazione. Determinare il minimo valore di v perché la massa possa descrivere un cerchio.

** Esercizio 105

Una massa m_1 di 340 g si muove alla velocità v_{1i} di 1.2 m/s e si scontra elasticamente con una massa m_2 ignota che era ferma. Dopo l'urto, la prima massa prosegue con lo stesso verso della velocità e con modulo $v_{1f} = 0.66$ m/s. a) Qual è la massa m_2 ? b) Qual è la velocità v_{2f} ? c) Qual è la velocità del *cm*?

Capitolo VI

Gravitazione

In questo capitolo verrà trattata la legge di gravitazione di Newton e alcuni cenni riguardanti il moto dei pianeti.

Concetti Fondamentali

- leggi di Keplero
- forza gravitazionale in forma vettoriale
- energia potenziale gravitazionale
- campo gravitazionale

VI.1 Storia dell'Astronomia

Prima della cosiddetta “rivoluzione copernicana”, il modello cosmologico dominante era basato su un sistema geocentrico (in occidente basato sulle interpretazioni soprattutto di Tolomeo e Aristotele), nel quale la Terra risulta fissa e con tutti gli altri corpi celesti che le ruotano attorno. Il moto dei pianeti, che appariva diverso da quello delle stelle fisse, risultava un affascinante mistero. Rispetto alle stelle infatti, i pianeti appaiono disegnare nel tempo una traiettoria complicata, con un apparente moto retrogrado ^[1]. Il moto retrogrado apparente risultava scon-

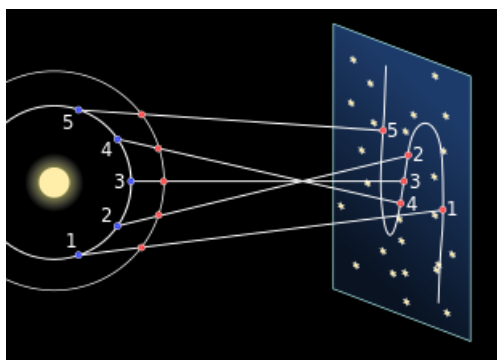


Figura VI.1: Retrogradazione di un pianeta esterno, osservato dalla Terra.

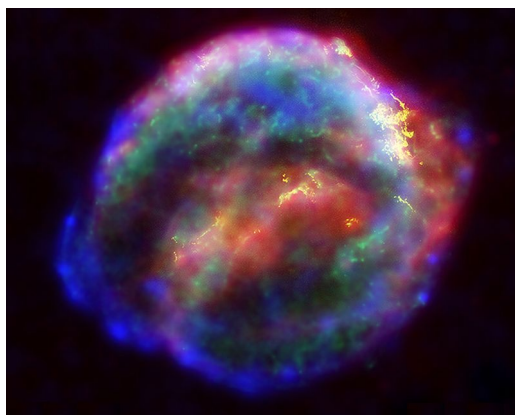


Figura VI.2: Osservazione moderna dei resti della “Supernova di Keplero”.

certante per gli astronomi greci e fu una delle ragioni per cui essi chiamarono questi oggetti *pianeti*, che in greco significa “vagabondi”.

Il moto retrogrado di Marte era particolarmente incompatibile perché durante la retrogradazione il pianeta si avvicina alla Terra più del Sole. Per tener conto della retrogradazione gli

^[1] Nell’insieme di credenze che prende il nome di *Astrologia*, questo moto apparente dei pianeti attraverso diverse zone della sfera celeste avrebbe un ruolo nel determinare la personalità e il destino delle persone. Pur essendo del tutto priva di fondamento scientifico, all’Astrologia va comunque attribuito il ruolo storico di antenata dell’Astronomia, prima cioè dell’affermazione del metodo scientifico e dell’osservazione degli astri attraverso la scienza.

astronomi greci Apollonio di Perga, Ipparco e Claudio Tolomeo modificarono il sistema geocentrico, introdussero l'artificio delle sfere concentriche e descrissero efficacemente le orbite, anche retrograde, tramite la combinazione di due o più orbite circolari.

All'inizio del XVI° secolo, si sviluppò il *modello eliocentrico* di Niccolò Copernico (Mikołaj Kopernik) (1473-1543), che riprese quello di Aristarco di Samo (310 a.C. - 230 a.C.), ponendolo sotto rigorosa trattazione matematica ("De revolutionibus orbium coelestium" - 1543). Nel modello eliocentrico, il moto retrogrado apparente è causato dalla diversa velocità angolare dei pianeti, che diventa sempre più piccola mano a mano che si considerano pianeti più lontani dal Sole (Fig. (VI.1)). Le sue enormi implicazioni divennero evidenti solo dopo che alcuni importanti studiosi che si schierarono come sostenitori del modello, tra i quali Giordano Bruno (1548-1600), Galileo e Giovanni Keplero (Johannes von Kepler) (1546-1601).

Una "nuova stella" fu osservata il 9 ottobre 1604 dall'astronomo fra' Ilario Altobelli. Questo luminosissimo astro fu osservato successivamente il 17 ottobre anche da Keplero, che ne fece oggetto di uno studio, ("De Stella nova in pede Serpentarii"), così che quella stella è oggi nota come "Supernova di Keplero" (Fig. (VI.2)). Galileo interpretò il fenomeno come prova della mutabilità dei cieli, sulla base del fatto che, non presentando la "nuova stella" alcun cambiamento di parallasse, essa dovesse trovarsi oltre l'orbita della Luna. Ciò era in aperto contrasto con la teoria aristotelica, che prevedeva la perfezione e l'immutabilità delle sfere celesti. L'utilizzo da parte di Galileo del cannocchiale a partire dal 1609 permise un'osservazione più precisa dei corpi celesti, trovando quindi che la superficie lunare, contrariamente alla più diffusa concezione del tempo, presenta imperfezioni simili a quelle terrestri. Le macchie solari dimostravano poi dei mutamenti anche nel Sole. Decisiva fu la scoperta da parte di Galileo nel 1610 dei 4 più grandi satelliti di Giove (i "satelliti medicei": Io, Europa, Ganemide e Callisto), che dimostravano chiaramente che c'erano dei corpi non ruotavano attorno alla Terra.

Sebbene non interamente esplicitamente dichiarati, nel modello di Copernico c'erano quindi tutti gli ingredienti per fare a pezzi le fondamenta della fisica aristotelica. Il libro di Copernico venne elencato tra i libri proibiti del Sant'Uffizio nel 1620, giudicando che le conclusioni portassero ad una visione in contrasto con l'interpretazione letterale della Bibbia ^[2]. Le ipotesi della teoria copernicana erano:

- La Terra ruota attorno al proprio asse una volta al giorno
- La Terra ruota attorno al Sole
- Le stelle sono molto più lontane dalla Terra rispetto al Sole e ai pianeti

Tycho Brahe (1546-1601), l'ultimo grande astronomo ad osservare il cielo senza l'uso del cannocchiale, collezionò una enorme mole di dati, misurando con precisione per venti anni le posizioni del Sole e dei pianeti. Giovanni Keplero, utilizzando i dati di Tycho, determinò le orbite della Terra e di Marte ed elaborò delle leggi empiriche che descrivono le orbite dei pianeti attorno al Sole.

Fu poi Newton ad introdurre le leggi del moto e la *legge di gravitazione universale*, portando ad una teoria generale che unificava le leggi astronomiche di Keplero e l'esperienza terrestre. Nel 1687 Newton pubblicò il "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", comunemente

^[2]L'errore fu ammesso dalla Chiesa soltanto 4 secoli dopo con Giovanni Paolo II.

chiamati “Principia”. L’opera, pubblicata in tre volumi nel 1687 a spese dell’astronomo Halley, famoso per la cometa che porta il suo nome, è unanimemente considerata un capolavoro assoluto della storia della Scienza. Newton usò la parola latina “gravitas” (peso) per la determinazione analitica della forza che sarebbe stata conosciuta come gravità, e definì la legge della gravitazione universale. In questa opera Newton derivava le tre leggi di Keplero presupponendo l’esistenza di una forza attrattiva che agisce con intensità proporzionale all’inverso del quadrato della distanza.

La descrizione newtoniana del sistema solare eredita quindi le caratteristiche cinematiche di quella kepleriana (le tre leggi di Keplero) ed introduce, con la forza di gravitazione universale, la causa che spiega la dinamica planetaria. Con essa non si cerca infatti, come nel caso dell’astronomia matematica medievale, di trovare modelli matematici *ad hoc* per spiegare in maniera artificiosa le caratteristiche dei fenomeni fisici. La teoria di Newton invece rivela tutte le sue innovative potenzialità nella capacità predittiva nel descrivere nuovi fenomeni, caratteristica fondamentale nei modelli fisici (Sez. (I.1.2)).

Nel 1781 fu scoperto il pianeta Urano, inizialmente scambiato per una cometa, da William Herschel. Nel 1846 Urbain Le Verrier^[3] pubblicò i suoi calcoli, basati sulle perturbazioni dell’orbita di Urano, che suggerivano la presenza di un nuovo pianeta e Nettuno fu effettivamente osservato nella posizione prevista, confermando la capacità predittiva della legge di gravitazione universale.

VI.2 Le Leggi di Keplero

In questa sessione vedremo le leggi di Keplero, qui riguardanti pianeti appartenenti al Sistema Solare. Ovviamente le leggi valgono per qualsiasi altro sistema planetario o satelliti attorno ad un pianeta o altro corpo dotato di massa adeguata. Prima però vediamo le approssimazioni che stanno dietro al modello:

- Il Sole e i pianeti sono schematizzati come punti materiali, cioè con diametri molto più piccoli delle distanze reciproche^[4]
- Il Sistema di Riferimento in cui il Sole è in quiete è considerato un sistema di riferimento inerziale^[5]
- L’unica forza che agisce sui pianeti è la forza gravitazionale dovuta al Sole, si trascurano cioè le interazioni di un pianeta con gli altri pianeti^[6]

^[3]Anche l’inglese John Couch Adams aveva indipendentemente trovato risultati di precisione simile.

^[4]Un effetto secondario della forza di gravità sono le *forze di marea*, dovute al fatto che l’attrazione gravitazionale subita da un corpo può variare tra due punti diametralmente opposti.

^[5]Il Sole orbita attorno al centro della Via Lattea, distante $2.6 \cdot 10^4$ anni luce con un periodo di circa 250 milioni di anni. La Via Lattea a sua volta è in moto assieme alle altre Galassie.

^[6]L’interazione gravitazionale tra i pianeti può essere trattata come un effetto perturbativo sull’orbita. Come visto in Sez. (VI.1) nel caso della scoperta di Nettuno, queste interazioni possono essere trattate come perturbazioni dell’orbita intorno al Sole. A lungo termine queste interazioni possono portare a modificare profondamente un’orbita.

VI.2.1 Prima Legge di Keplero

La *prima legge di Keplero* è anche detta *legge delle orbite* e afferma:

I° Legge di Keplero

Tutti i pianeti si muovono su orbite ellittiche, di cui il Sole occupa uno dei fuochi.

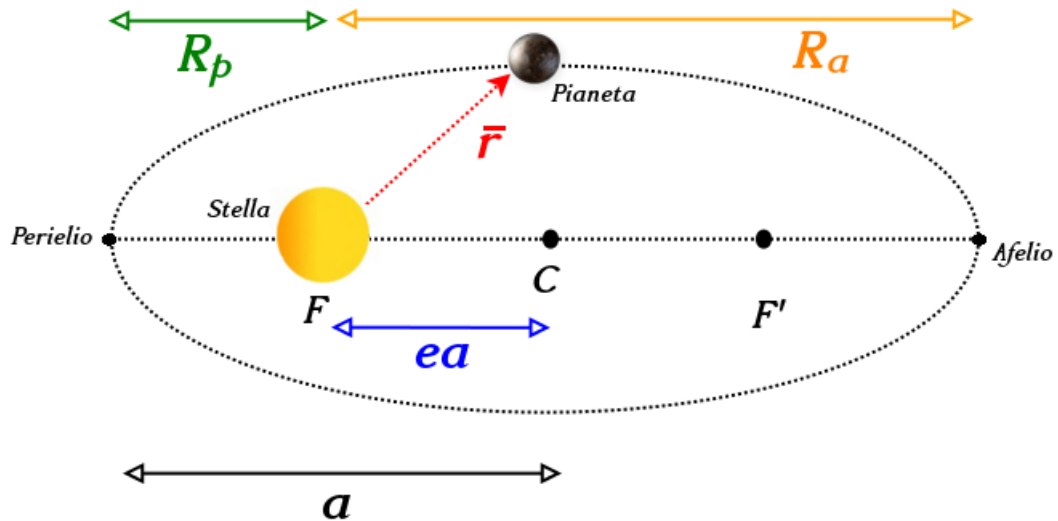


Figura VI.3: Parametri orbitali per un pianeta che ruota attorno al Sole.

In Fig. (VI.3) sono rappresentati i parametri orbitali di un pianeta che ruota attorno al Sole. Un'orbita risulta specificata dall'eccentricità e compresa tra 0 e 1 e dal semiasse maggiore dell'orbita a . L'*afelio* è il punto di massima distanza (R_a) di un pianeta dal Sole e il *perielio* è il punto di minima distanza (R_p). Nel caso di eccentricità dell'orbita molto piccole (nel caso della Terra è $e=0.0167$), le orbite possono essere approssimate a circolari. Se $e = 0$ (orbita circolare), il semiasse maggiore a , R_p e R_e vanno tutti a coincidere con il raggio dell'orbita r .

VI.2.2 Seconda Legge di Keplero

La *seconda legge di Keplero* stabilisce che:

II° Legge di Keplero

Il raggio vettore che congiunge il centro del Sole col centro di ogni pianeta spazza aree proporzionali ai tempi impiegati a descriverle.

Come si vede in Fig. (VI.4), l'area spazzata dal vettore che congiunge il Sole al pianeta spazza aree uguali in tempi uguali (*velocità areolare costante*). Come conseguenza pratica il pianeta si muove più lentamente quando è lontano dal Sole e più rapidamente quando è vicino

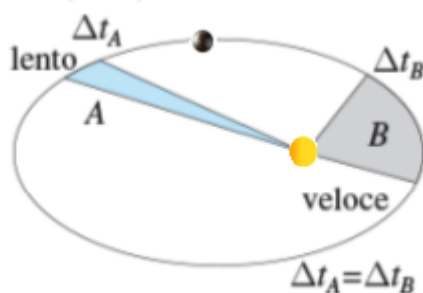


Figura VI.4: Seconda legge di Keplero.

al Sole. Questa legge empirica è una conseguenza della conservazione del momento angolare, una proprietà che verrà trattata nel Sez. (VII.2.5)^[7].

VI.2.3 Terza Legge di Keplero

La seconda legge di Keplero afferma che:

III° Legge di Keplero

Il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore della sua orbita.

Considerando un pianeta che ruota attorno al Sole, abbiamo quindi la seguente relazione tra il periodo di rivoluzione T e il semiasse maggiore dell'orbita a :

$$T^2 \propto a^3 \quad (\text{VI.1})$$

VI.3 Legge di Gravitazione Universale

VI.3.1 Forza Gravitazionale

Nei capitoli precedenti abbiamo già considerato la forza gravitazionale che la Terra esercita su un corpo, considerandola una forza peso $\vec{F}_g = m\vec{g}$ in cui \vec{g} è un vettore costante. Come accennato in Sez. (IV.2.1), questa è in realtà un'approssimazione, valida quando si possano considerare distanze e quote molto più piccole del raggio di curvatura terrestre. Prima di Newton si pensava che tale forza fosse caratteristica della Terra; nel 1665 un ventitreenne Newton intuì che la forza che attira al suolo gli oggetti era la stessa che è responsabile del moto della Luna attorno alla Terra. Si tratta di una forza molto piccola, se confrontata con le altre forze fondamentali, ma che diventa considerevole quando le masse in gioco sono elevate.

^[7]Il sistema Sole-pianeta può essere in prima approssimazione considerato come isolato e quindi la costanza della velocità areolare è una conseguenza della conservazione del momento angolare.

Supponiamo di avere due masse m_1 e m_2 (punti materiali); la forza con la quale si attraggono ha modulo:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (\text{VI.2})$$

la costante G (*costante gravitazionale*), se espressa con 3 cifre significative, ha valore:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (\text{VI.3})$$

L'orientazione è quella che congiunge i due corpi. Consideriamo le due masse in Fig. (VI.5):

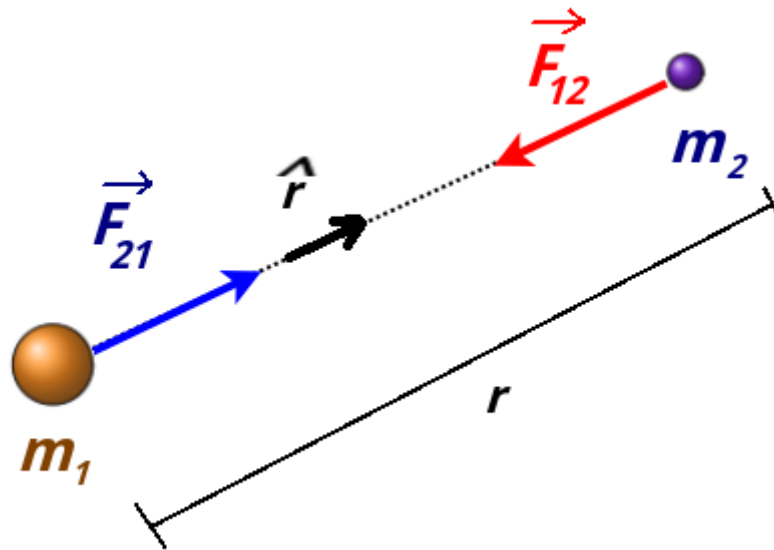


Figura VI.5: Seconda legge di Keplero.

la linea tratteggiata è la congiungente tra i due corpi distanti r e consideriamo il versore \hat{r} quello che congiunge m_1 verso m_2 . La forza \vec{F}_{21} che il corpo 1 risente per l'attrazione gravitazionale del corpo 2 è:

$$\vec{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (\text{VI.4})$$

Per la terza legge di Newton avremo che la forza che il corpo 2 risente per via del corpo 1:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (\text{VI.5})$$

Se i due corpi hanno simmetria sferica^[8] si comportano comunque come se tutta la massa fosse localizzata nel centro.

Se abbiamo più corpi che si attraggono, la forza di attrazione gravitazionale su uno di questi sarà data dalla somma vettoriale delle forze di attrazione esercitate da tutti gli altri corpi. Consideriamo una massa m_1 : forza applicata sul corpo per via di altre n masse disposte nello spazio

^[8]Considerando anche che i diametri siamo molto più piccoli delle distanze, evitando quindi l'inclusione di effetti mareali.

sarà (*principio di sovrapposizione*):

$$\vec{F} = \sum_{i=2}^n \vec{F}_{i1} \quad (\text{VI.6})$$

In prossimità della superficie terrestre, con le approssimazioni già viste in Sez. (III.2.1) e Sez. (IV.2.1) per un oggetto di massa m , indicando con $M_T = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg la massa della Terra e $R_T = 6.37 \cdot 10^6$ m il suo raggio:

$$|\vec{F}_g| = G \frac{M_T m}{R_T^2} = G \underbrace{\frac{M_T}{R_T^2}}_g m \quad (\text{VI.7})$$

Si trova quindi il valore di g , cioè il modulo dell'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre:

$$|g| = G \frac{M_T}{R_T^2} \quad (\text{VI.8})$$

Tutti i corpi in caduta libera in prossimità della superficie terrestre hanno la stessa accelerazione che dipende dalle proprietà della Terra (M_T , R_T), oltre che dalla costante G , e non del corpo che cade.

VI.3.2 Energia Potenziale Gravitazionale

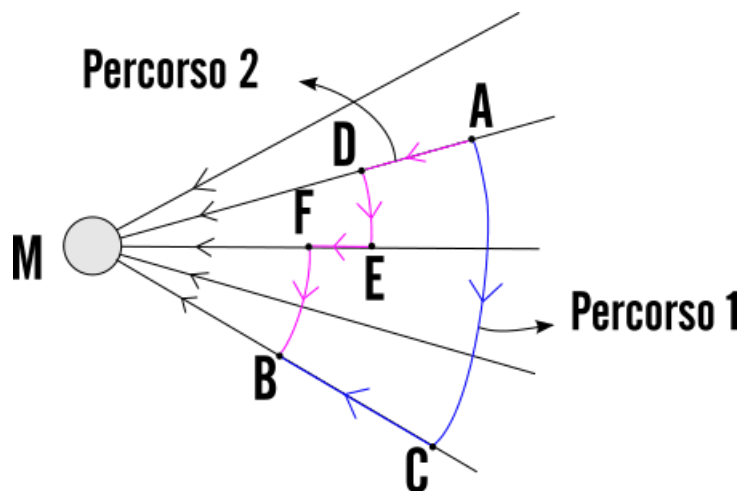


Figura VI.6: Lavoro della forza Gravitazionale.

La forza di gravità è una *forza centrale*, cioè che è sempre diretta verso il centro di attrazione. Indicando con \hat{r} la direzione dell'attrazione gravitazionale dovuta alla presenza di una massa:

$$\vec{F}_g = F_g(r) \hat{r} \quad (\text{VI.9})$$

dove r è la distanza dal corpo. Consideriamo la Fig. (VI.6), il cui calcoliamo il lavoro della forza gravitazionale spostando una massa dal punto A al punto B seguendo due differenti percorsi, formati da segmenti radiali e archi di circonferenza. Lungo gli archi la forza di gravità è sempre perpendicolare allo spostamento, quindi il lavoro sugli spostamenti non radiali è nullo. Si dimostra quindi che le forze centrali, come la forza gravitazionale, sono forze conservative, dato che il lavoro dipende su un percorso dipende solo dal punto di inizio e il punto di arrivo e non dal percorso (vedere Sez. (IV.2.2)).

Il lavoro infinitesimo fatto dalla forza di gravità esercitata da una massa M su una massa che si allontana uno spostamento radiale infinitesimo dr :

$$\partial L_g = F(r)dr = -G \frac{Mm}{r^2} dr \quad (\text{VI.10})$$

Il lavoro fatto dalla forza gravitazionale durante lo spostamento della massa m da un punto distante R ad uno molto lontano:

$$L = \int_r^\infty -G \frac{Mm}{r'^2} dr' = -G \frac{Mm}{r} \quad (\text{VI.11})$$

L è quindi il lavoro richiesto per spostare una massa m ad un punto lontanissimo sotto l'influenza della forza di gravità esercitata da M , che si può riscrivere come:

$$\Delta U = U_\infty - U(r) = -L \quad (\text{VI.12})$$

L'energia potenziale all'infinito U_∞ vale 0, quindi l'energia potenziale gravitazionale per un corpo di massa m distante r da un corpo M vale:

$$U = -G \frac{Mm}{r} \quad (\text{VI.13})$$

L'energia potenziale è negativa per ogni distanza e tende a zero allontanandosi da M . Il fatto che questa grandezza sia negativa può essere spiegato perché essa corrisponde al lavoro della forza gravitazionale per allontanare due masse m ed M a distanza infinita, e tale lavoro è negativo, in quanto la forza ha verso opposto a quello dello spostamento. In generale, l'energia potenziale è una proprietà del sistema dei due corpi, ma se $M \gg m$ è lecito parlare di energia potenziale di m alla distanza r .

Supponiamo di avere una massa m che ha una velocità v e una energia potenziale gravitazionale per via della presenza di una massa M . La sua energia meccanica sarà:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{r} \quad (\text{VI.14})$$

Possiamo chiederci quale deve essere la sua velocità per sfuggire dall'attrazione del corpo di massa M . La sua velocità minima v_F , detta *velocità di fuga* sarà quella che le consente di raggiungere una distanza infinita da M con velocità nulla. L'energia E dovrà essere quindi nulla all'infinito e quindi, per la conservazione dell'energia meccanica (ci sono solo forze conservative), sarà nulla anche alla distanza r iniziale:

$$E = \frac{1}{2}mv_F^2 - G \frac{Mm}{r} = 0 \quad (\text{VI.15})$$

da questa espressione si ricava la velocità di fuga v_F :

$$v_F = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (\text{VI.16})$$

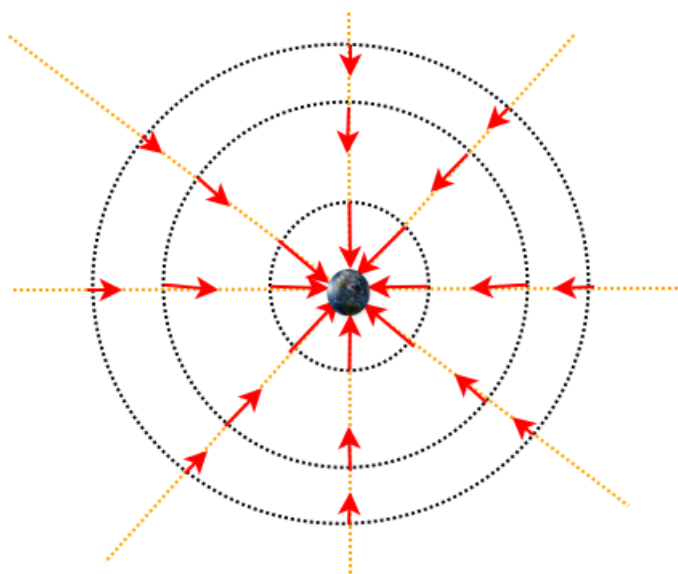


Figura VI.7: Schematizzazione del campo gravitazionale di un pianeta. I cerchi tratteggiati sono la sezione delle superfici equipotenziali. La direzione radiale è data dalle rette gialle tratteggiate. Il campo gravitazionale, diretto in direzione radiale verso il pianeta, aumenta in intensità all'aumentare della distanza.

VI.3.3 Campo Gravitazionale

In Sez. (IV.2.1) avevamo trattato il caso in cui il campo gravitazionale poteva essere considerato come costante se considerato uno volume con dimensioni lineari trascurabili rispetto alla curvatura terrestre. In quel caso il campo gravitazionale \vec{g} era diretto verticalmente e puntante verso il basso. I piani paralleli al suolo erano superficie equipotenziali; infatti in ogni punto di uno di quei piani a distanza h dal suolo un corpo di massa m possiede una energia potenziale costante $U(h) = mgh$.

Quando questa approssimazione non è più valida, poiché le distanze diventano comparabili o maggiori del raggio di curvatura di un pianeta. Con riferimento alla Fig. (VI.7), nello spazio circostante il pianeta di massa M , per via della presenza della sua massa, risulta presente un campo di forza gravitazionale. In un punto a distanza r dal pianeta la forza che una massa m risente per via della presenza del campo è ^[9]:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \quad (\text{VI.17})$$

Le superfici sferiche concentriche con il pianeta sono superficie equipotenziali, poiché su una superficie di raggio r l'energia potenziale è:

$$U(r) = -G \frac{Mm}{r} \quad (\text{VI.18})$$

^[9]Risulta equivalente scrivere (dalla definizione di versore):

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}$$

Utilizzando una massa m di prova immersa nel il campo gravitazionale, il valore $\vec{g}(r)$ di quest'ultimo in un punto a distanza r dalla massa M è dato dal rapporto tra la forza subita da m e la massa stessa:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r} \quad (\text{VI.19})$$

Come già visto nella Fig. (VI.8), il suo valore calcolato sulla superficie terrestre va a coincidere il \vec{g} considerato costante nella trattazione della forza peso (Sez. (III.2.1)).

VI.3.4 Moto dei Satelliti

Energia Meccanica del Satellite

Durante il moto di un satellite di massa m attorno ad un pianeta di massa M in orbita ellittica, anche se l'energia cinetica e l'energia potenziale oscillano periodicamente, l'energia meccanica si mantiene costante, dato che la forza gravitazionale è conservativa.

Per semplicità, consideriamo il caso di un'orbita circolare di raggio r . Scriviamo le seconda legge di Newton per il moto del satellite, dove l'accelerazione è centripeta:

$$F = ma_c \quad (\text{VI.20})$$

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (\text{VI.21})$$

Da questa relazione si ricava il prodotto mv^2 :

$$mv^2 = G \frac{Mm}{r} \quad (\text{VI.22})$$

che utilizziamo per riscrivere l'energia cinetica K :

$$K = \frac{1}{2} (mv^2) = G \frac{Mm}{2r} \quad (\text{VI.23})$$

L'energia meccanica quindi è:

$$E = K + U = \underbrace{G \frac{Mm}{2r}}_K - \underbrace{G \frac{Mm}{r}}_U = -G \frac{Mm}{2r} \quad (\text{VI.24})$$

Nel caso di orbita ellittica, si sostituisce al raggio r il semiasse maggiore a nella Fig. (VI.25):

$$E = -G \frac{Mm}{2a} \quad (\text{VI.25})$$

Legge dei Periodi

Consideriamo ancora un satellite di massa m in orbita circolare di raggio r attorno ad un pianeta di massa M . Riscriviamo la Fig. (VI.21):

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r \quad (\text{VI.26})$$

Sostituendo l'espressione a ω l'espressione $\frac{2\pi}{T}$, per far comparire il periodo T , abbiamo:

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{4\pi^2}{T^2} r \quad (\text{VI.27})$$

dalla quale si ricava il periodo:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) r^3 \quad (\text{VI.28})$$

Nel caso di orbita ellittica, l'espressione è equivalente se si sostituisce al raggio r il semiasse maggiore a :

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) a^3 \quad (\text{VI.29})$$

Questa espressione, chiamata anche *legge dei periodi*, non è altro che la terza legge di Keplero, ritrovata attraverso la dinamica Newtoniana. Il termine tra parentesi è la costante di proporzionalità che dipende dalla massa M del corpo attorno al quale ruota il satellite (il Sole nel caso delle leggi di Keplero).

Riepilogo formule

- *Forza tra due masse puntiformi m_1 e m_2 , applicata su m_1 e con \hat{r} che va da m_1 a m_2 . Modulo:*

$$|\vec{F}_{12}| = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (\text{VI.30})$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Vettorialmente:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (\text{VI.31})$$

dove \vec{F}_{12} è applicata sulla massa 2 e \vec{r} è il vettore posizione della particella 2 rispetto alla particella 1. Per la terza di legge di Newton, sulla massa 1 è applicata una forza \vec{F}_{21} di stesso modulo e direzione e verso opposto.

- *Energia potenziale gravitazionale:*

$$U = -G \frac{Mm}{r} \quad (\text{VI.32})$$

- *Campo gravitazionale:*

$$\vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r} \quad (\text{VI.33})$$

- *Velocità di Fuga:*

$$v_F = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (\text{VI.34})$$

- *Energia Meccanica di un Satellite:*

$$E = -G \frac{Mm}{2a} \quad (\text{VI.35})$$

- *Legge dei Periodi (Terza Legge di Keplero):*

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) a^3 \quad (\text{VI.36})$$

In Appendice B si trovano diversi dati astronomici da consultare.

**** Esercizio 106**

La cometa di Halley ha un periodo T di 76 anni e nel 1986 si trovava al perielio dell'orbita ($R_p = 8.9 \cdot 10^{10}$ m), cioè tra le orbite di Marte e Venere. Si trovi la distanza R_a dell'afelio dal Sole in unità astronomiche (1 au = distanza media Terra-Sole, vedere Appendice B) e l'eccentricità dell'orbita.

******* Esercizio 107**

Una navetta spaziale di massa $m = 5.00 \cdot 10^3$ kg si trova in orbita circolare, con raggio $r = 8.00 \cdot 10^6$ m e periodo $T_0 = 7.119 \cdot 10^3$ s, attorno alla Terra. Ad un certo punto vengono accesi i razzi anteriori, riducendo la velocità del 5%. In virtù di ciò la navetta si immetterà in una nuova orbita ellittica. Quale sarà il periodo di questa nuova orbita?

*** Esercizio 108**

Con riferimento alla figura VI.8, abbiamo 3 masse identiche ($m=5.00$ kg). Le distanze d_1 e d_2 sono rispettivamente 0.300 e 0.400 m. Trovare \vec{F} della forza gravitazionale esercitata sulla sfera 1 dalle altre due sfere.

**** Esercizio 109**

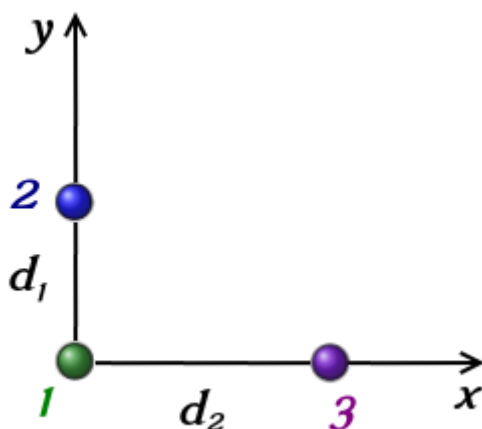


Figura VI.8

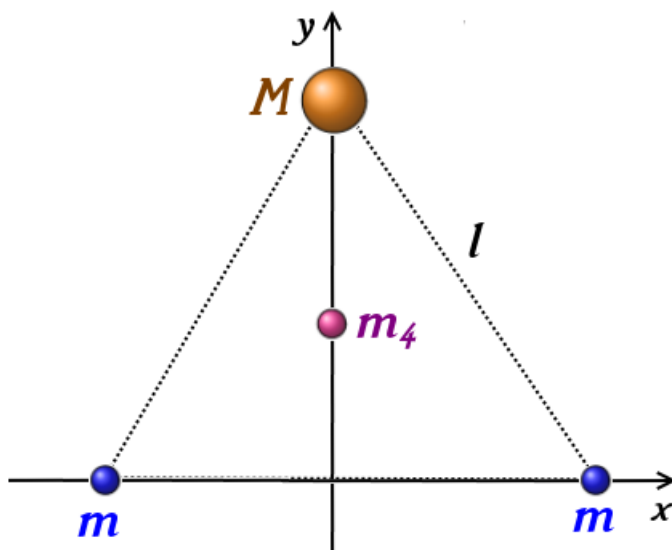


Figura VI.9

4 masse sono disposte come in figura VI.9. Le masse M e m sono poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato l , mentre la massa m_4 si trova nel baricentro dello stesso triangolo. Scrivere l'espressione per la forza che viene esercitata su m_4 dalle altre masse.

* Esercizio 110

A quale altitudine h sopra la superficie terrestre il campo gravitazionale è di 5.00 m/s^2 .

* Esercizio 111

Trovare il modulo del campo gravitazionale (in multipli di g terrestre) sulla superficie di Marte, di Mercurio e delle stelle degeneri Sirio B (nana bianca dalla massa simile a quella del Sole ma dimensioni paragonabili alla Terra) e la pulsar PSR B1257+12 (una stella di neutroni

dalla massa superiore a quella del Sole, ma diametro di soli circa 20 km). Per i dati consultare l'Appendice B.

* Esercizio 112

Trovare l'energia di legame del pianeta chiamato *Poltergeist*, una superterra (massa di $4.3 M_T$) che orbita attorno alla pulsar PSR B1257+12 con un semiasse maggiore dell'orbita di 0.36 au. Confrontarla con quella della Terra nel sistema Terra-Sole. Per i dati consultare l'Appendice B.

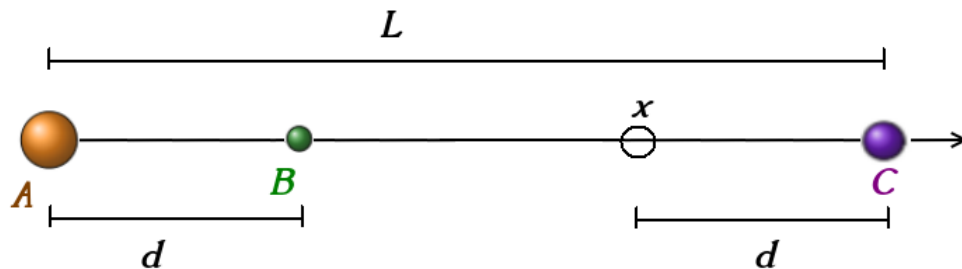


Figura VI.10

** Esercizio 113

In figura VI.10 è riportato un sistema di 3 masse (m_A , m_B e m_C di valore rispettivamente 8.0, 1.0 e 2.0 kg). L è 12 m, mentre d è 4 m. Quanto lavoro deve essere fatto per spostare la massa B dal suo punto di origine al punto contrassegnato con x (le velocità iniziale e finale di B è nulla)?

*** Esercizio 114

Trovare il raggio dell'orbita e l'energia di legame di un satellite geostazionario (periodo di rivoluzione attorno alla Terra ($M_T = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg) uguale al periodo di rotazione terrestre). La massa m del satellite è $1.00 \cdot 10^3$ kg.

**** Esercizio 115

Un satellite di massa m 400 kg è in orbita circolare ($r = 8.00 \cdot 10^6$ m e $T = 8.64 \cdot 10^3$ s) attorno ad un pianeta di massa sconosciuta. Trovare il raggio R del pianeta sapendo che l'accelerazione di gravità a_g sulla sua superficie è di 8.0 m/s².

*** Esercizio 116

Nel 2016 è stata confermata la scoperta di un pianeta extrasolare di massa $1.27 M_T$ che orbita attorno alla stella più vicina al Sole, Proxima Centauri. Conoscendo la massa di Proxima Centauri (Appendice B), l'eccentricità $e = 0.35$ e il periodo $T=11.2$ d, trovare la distanza del perielio dell'orbita.

*** Esercizio 117

Una particella si stacca dalla superficie di Plutone, del quale conosciamo il raggio R di 1200 km e l'accelerazione di gravità a_g sulla superficie di 0.063 g.

- a) Quale è la velocità di fuga che dovrebbe avere la particella per abbandonare il pianeta nano?
 b) A che distanza h può arrivare dalla superficie se la sua velocità radiale è di v_1 120 m/s? c) Quale velocità di impatto v_3 avrà un oggetto lasciato cadere liberamente da $h_2 = 1200$ km dalla superficie e con velocità v_2 di 110 m/s diretta verso il pianeta?

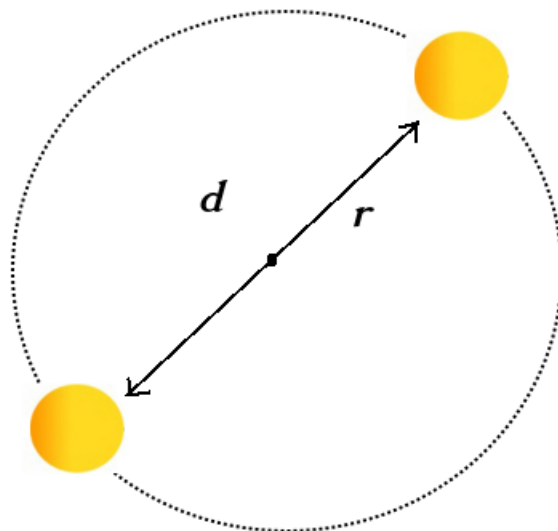


Figura VI.11

*** Esercizio 118

Un sistema binario di stelle dall'identica massa di $0.80 M_{\odot}$ (masse solari) girano intorno ad un comune centro (figura VI.11). La distanza che separa le due stelle è 2.0 au. Quale è il periodo in anni terrestri?

**** Esercizio 119

Si trovi la minima velocità per lasciare il sistema solare partendo dall'orbita terrestre. La sonda *Voyager 1* raggiunse una velocità di $125 \cdot 10^3$ km/h nel suo viaggio verso Giove. A partire da quale distanza dal Sole questa velocità è sufficiente per lasciare per sempre il sistema solare? (Dati in Appendice B).

**** Esercizio 120

Sia dato un satellite terrestre di massa $m = 1.0 \cdot 10^3$ kg che si muove su un'orbita circolare di raggio $r = \frac{3}{2}R_T$ ($G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm²kg⁻², $M_T = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg e $R_T = 6.37 \cdot 10^6$ m). Si calcoli:

- a) l'energia totale del satellite;
 b) di quale fattore dovrebbe aumentare la velocità del satellite per raggiungere la velocità di fuga dalla sua quota orbitale.

Capitolo VII

Statica e Dinamica dei Corpi Rigidi

In questo capitolo verrà trattata la Statica e la Dinamica dei Corpi Rigidi. Verranno quindi introdotte fondamentali grandezze fisiche, quali il momento torcente, il momento angolare e il momento di inerzia.

Concetti Fondamentali

- densità
- momento torcente
- statica del corpo rigido
- variabili angolari
- momento d'inerzia
- teorema di Huygens-Steiner
- momento angolare e proiezione lungo l'asse di rotazione z
- seconda equazione cardinale della dinamica proiettata lungo l'asse z di rotazione
- conservazione del momento angolare

Per la comprensione di questo capitolo è di fondamentale importanza la padronanza del prodotto vettoriale.

VII.1 Statica del Corpo Rigido

VII.1.1 Corpi Rigidi

Si definisce *corpi rigido* un corpo composto da punti materiali vincolati a mantenere inalterate le reciproche distanze.

Generalmente i corpi rigidi possono essere trattati come corpi estesi continui di materia. Riprendendo la definizione di centro di massa ((V.11)), immaginiamo di suddividere il sistema in porzioni discrete di massa:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n \Delta m_i} \quad (\text{VII.1})$$

Sfruttando il concetto di limite, portando le porzioni di massa a quantità infinitesime ($\Delta m_i \rightarrow 0$ e quindi $N \rightarrow \infty$) ^[1]:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad (\text{VII.2})$$

dove $M = \int dm$ è la massa totale del sistema. Anche in questo caso, ogni coordinata di $\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k}$ è:

$$x_{cm} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int x dm \quad (\text{VII.3})$$

$$y_{cm} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int y dm \quad (\text{VII.4})$$

$$z_{cm} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int z dm \quad (\text{VII.5})$$

Data una massa Δm in un volume ΔV si definisce la *densità volumica media*:

$$\rho_m = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (\text{VII.6})$$

Dimensionalmente:

$$[\rho_m] = [L^{-3} M^1 T^0] \quad (\text{VII.7})$$

In SI si misura in kg/m^3 . Localmente, facendo tendere il volume a 0 ($\Delta V \rightarrow 0$), si definisce la *densità volumica di massa*:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (\text{VII.8})$$

^[1]Il passaggio al limite fisico ha un significato diverso da quello matematico: i volumi ΔV i che contengono le masse Δm i devono diventare sufficientemente piccoli però continuando a contenere un numero non trascurabile di atomi e molecole.

Dimensionalmente, è uguale alla densità volumica media.

Se un oggetto ha una dimensione trascurabile rispetto alle altre, è utile definire una *densità superficiale di massa*; immaginiamo che ogni porzione di superficie ΔS sia caratterizzato da una massa Δm :

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{dm}{dS} \quad (\text{VII.9})$$

Dimensionalmente:

$$[\sigma] = [L^{-2}M^1T^0] \quad (\text{VII.10})$$

In SI: kg/m².

Analogamente, si definisce una *densità lineare di massa*:

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{dm}{dl} \quad (\text{VII.11})$$

Dimensionalmente:

$$[\lambda] = [L^{-1}M^1T^0] \quad (\text{VII.12})$$

In SI: kg/m.

Si possono quindi trovare i relativi elementi infinitesimi di massa:

$$dm = \rho dV \quad dm = \sigma dS \quad dm = \lambda dl \quad (\text{VII.13})$$

e quindi sostituiti nella (VII.2):

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int_V \vec{r} \rho(x, y, z) dV}{\int_V \rho(x, y, z) dV} \quad (\text{VII.14})$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int_S \vec{r} \sigma(x, y) dS}{\int_S \sigma(x, y) dS} \quad (\text{VII.15})$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int_L \vec{r} \lambda(x) dl}{\int_L \lambda(x) dl} \quad (\text{VII.16})$$

Il vantaggio è quello di fare un integrale di volume, di superficie e di linea. Se i corpi sono *omogenei*, ρ , σ e λ assumono lo stesso valore in ogni punto del corpo e quindi possono essere portati fuori dagli integrali:

$$dm = \rho dV \quad dm = \sigma dS \quad dm = \lambda dl \quad (\text{VII.17})$$

e quindi sostituiti nella (VII.2):

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\rho \int_V \vec{r} dV}{\rho \int_V dV} = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV \quad (\text{VII.18})$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\oint \int_S \vec{r} dS}{\oint \int_S dS} = \frac{1}{S} \int_S \vec{r} dS \quad (\text{VII.19})$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int_L \vec{r} dl}{\int_L dl} = \frac{1}{L} \int_L \vec{r} dl \quad (\text{VII.20})$$

dove V , S e L sono rispettivamente il volume, la superficie e la lunghezza totali nei vari casi.

Supponiamo di avere un filo di densità lineare omogenea λ e di lunghezza totale L . Mettiamo l'origine dell'asse x in corrispondenza di un estremo del filo e usiamo la (VII.20):

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^L \lambda x dx = \frac{\lambda}{\lambda L} \left. \frac{1}{2} x^2 \right|_0^L = \frac{L}{2} \quad (\text{VII.21})$$

cioè il centro di massa si trova al centro del filo, come da attesa.

VII.1.2 Moto di un Corpo Rigido

I parametri necessari e sufficienti per descrivere lo stato di qualsiasi sistema vengono chiamati *gradi di libertà*, come abbiamo già visto in Sez. (III.2.3). Nel caso di un punto materiale che si può muovere in uno spazio 3D, i gradi di libertà sono 3 (a meno che non intervenga un vincolo). Date le caratteristiche di indeformabilità, la posizione nello spazio di un punto qualsiasi del corpo rigido è nota se si conoscono le posizioni di tre punti del corpo fra loro non allineati.

Un corpo rigido compie un *moto traslatorio* quando ogni punto del corpo effettua il medesimo spostamento nello stesso intervallo di tempo. In questo caso si osserva che:

- in un dato istante di tempo, la velocità di ogni punto del corpo è la stessa
- per descrivere il moto del corpo è sufficiente conoscere un solo vettore: la velocità di uno dei suoi punti (ad esempio, il vettore velocità relativo al proprio centro di massa)
- per descrivere il moto traslatorio di un corpo rigido in uno spazio 3D sono sufficienti 3 parametri (le 3 componenti del vettore velocità), come se fosse un punto

Un corpo rigido compie un *moto rotatorio* attorno a un asse quando ogni punto del corpo (eccetto quelli sull'asse di rotazione) si muove lungo una circonferenza con centro sull'asse di rotazione. Si osserva in questo caso che:

- l'*asse di rotazione* è una retta formata dai centri delle traiettorie circolari dei vari punti
- per un corpo rigido, qualsiasi segmento perpendicolare all'asse di rotazione descrive lo stesso angolo in un dato intervallo di tempo

Un corpo rigido compie un *moto rototraslatorio* se si muove combinando traslazioni e rotazioni attorno ad assi che possono cambiare direzioni durante il moto. Ad esempio, pensiamo al moto della ruota di un'automobile rispetto ad un sistema solidale con la Terra: l'asse di rotazione della ruota si muove di solo moto traslatorio, gli altri punti, ruotando attorno a tale asse,

combinano un moto traslatorio e rotatorio. Ad un qualsiasi istante di tempo, la velocità di ogni punto del corpo rigido può essere espressa come la somma di una velocità di traslazione e di una velocità di rotazione attorno ad un asse opportuno. Riprenderemo questi concetti a partire dalla Sez. (VII.2). Nella prossima sezione quello che ci interesserà sarà trattare le condizioni di equilibrio di un corpo rigido, cioè le condizioni per le quali un moto rototraslatorio risulta nullo in presenza di forze esterne applicate su esso.

VII.1.3 Momento Torcente

L'esperienza comune ci dice che l'efficienza di una forza nel far ruotare un corpo dipende dal suo punto di applicazione. Un esempio intuitivo è che risulta meno faticoso spingere una porta agendo lontano dai cardini piuttosto che vicino ad essi.

Consideriamo una forza \vec{F} applicata in un punto di posizione \vec{P} e consideriamo un ulteriore punto \vec{O} , detto *centro di riduzione* o *polo*. Si chiama *momento torcente* della forza \vec{F} applicata in \vec{C} rispetto a \vec{O} il prodotto vettoriale:

$$\vec{\tau} = (\overrightarrow{P - O}) \wedge \vec{F} \quad (\text{VII.22})$$

Quindi, $\vec{\tau}$ ha le seguenti caratteristiche, che discendono dalle proprietà del prodotto vettoriale (Sez. (I.2.5)):

- ha modulo $\tau = rF \sin \theta$, dove r è il modulo di $(\overrightarrow{P - O})$ e θ è l'angolo minimo tra i vettori $(\overrightarrow{P - O})$ e \vec{F}
- direzione perpendicolare al piano individuato da i vettori $(\overrightarrow{P - O})$ e \vec{F}
- verso dato dalla regola della mano destra

Se l'origine del sistema di riferimento è posta in O , $\overrightarrow{P - O}$ coincide con \vec{P} . Quindi, nel caso di origine del sistema di riferimento posta nel centro di riduzione:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (\text{VII.23})$$

dove \vec{r} è la posizione del punto di applicazione. È importante fare attenzione al verso del vettore posizione del punto di applicazione rispetto al polo; questo infatti va dal polo verso il punto di applicazione. Una scelta errata porterebbe a sbagliare il verso del momento.

Dimensionalmente, il momento torcente è:

$$[\tau] = [L^2 M^1 T^{-2}] \quad (\text{VII.24})$$

In SI si misura in N·m; sebbene dimensionalmente siano equivalenti, è sbagliato misurare il modulo dei momenti torcenti in J, che deve essere usato soltanto per le grandezze fisiche che risultano essere delle forme di energia. In Fig. (VII.3), da un punto di vista geometrico se chiamiamo retta d'azione della forza la retta passante per P parallela a \vec{F} , individuiamo il piano passante per essa e il centro di riduzione O , il momento della forza è diretto perpendicolarmente al piano e vale in modulo:

$$|\tau| = |F|b \quad (\text{VII.25})$$

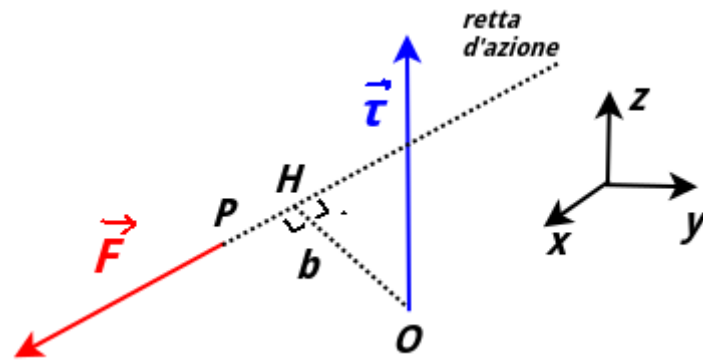


Figura VII.1: Rappresentazione grafica del calcolo del momento di una forza.

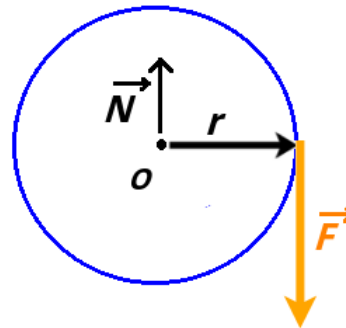


Figura VII.2: Avviamento di una falciatrice.

dove b è il cosiddetto *braccio* della forza, ossia la distanza \overline{OH} fra O e la retta d'azione.

Facciamo l'esempio dell'avvio di una falciatrice (Fig. (VII.2)); la corda di avviamento del motore è avvolta attorno ad un volante di raggio r che supponiamo pari a 6.00 cm, viene tirata con una forza, di modulo F 75.0 N e diretta come in figura, per avviare il motore. Vogliamo quindi calcolare il valore del momento che la corda applica al volante. Il polo O è il centro del volante, rispetto al quale si calcolano i momenti. Dato che il volante viene tenuto fermo durante l'avviamento, schematizziamo questo effetto come la presenza di una reazione vincolare \vec{N} applicata in O , di modulo pari a F , stessa direzione e verso opposto. Quindi le forze esterne al sistema danno risultante nulla. Il momento $\vec{\tau}_N$ è nullo perché il braccio è nullo. Il momento $\vec{\tau}_F$ ha modulo $\tau_F = rF = 4.5$ Nm. La direzione di $\vec{\tau}_F$ è perpendicolare al piano, mentre il suo verso è dato dalla regola della mano destra: ponendo l'indice su \vec{r} e il medio su \vec{F} si trova che $\vec{\tau}$ è diretto nel verso entrante nel foglio e induce quindi una rotazione in senso orario.

Se più momenti sono applicati in punti diversi rispetto ad uno stesso centro di riduzione, il momento risultante sarà dato dalla somma vettoriale di tutti i momenti delle forze applicate:

$$\vec{\tau}_{ris} = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i = \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{P-O}) \wedge \vec{F}_i \quad (\text{VII.26})$$

Il momento di una forza tende a produrre un cambiamento di moto di rotazione di un corpo rigido, nel senso indicato da $\vec{\tau}$. Prendiamo come riferimento un asse z parallelo alla direzione di $\vec{\tau}$ e puntante nel verso uscente dal foglio. Se il verso di $\vec{\tau}$ è \hat{k} (cioè lo stesso di z), la rotazione indotta è antioraria. Se $\vec{\tau} = -\tau\hat{k}$, la rotazione indotta è in senso orario.

Si può dimostrare che al cambiare del centro di riduzione da O a O' il momento risultante cambia di una quantità pari al prodotto vettoriale del vettore spostamento dal nuovo al vecchio centro di riduzione per la risultante delle forze considerate:

$$\sum_{i=1}^n (\overrightarrow{P-O'}) \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{P-O}) \wedge \vec{F}_i + \overrightarrow{P-O'} \wedge \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}_{\vec{F}_{ris}} \quad (\text{VII.27})$$

Questo risultato ha una importante conseguenza: *se un sistema di forze ha risultante nulla il suo momento risultante non cambia al cambiare del centro di riduzione*, dato che nella (VII.27) il termine $(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i)$ risulta nullo. Questa proprietà risulta utile nel caso in cui dobbiamo studiare la statica di un corpo rigido. Vediamo il caso di due forze con stesso modulo F , stessa direzione

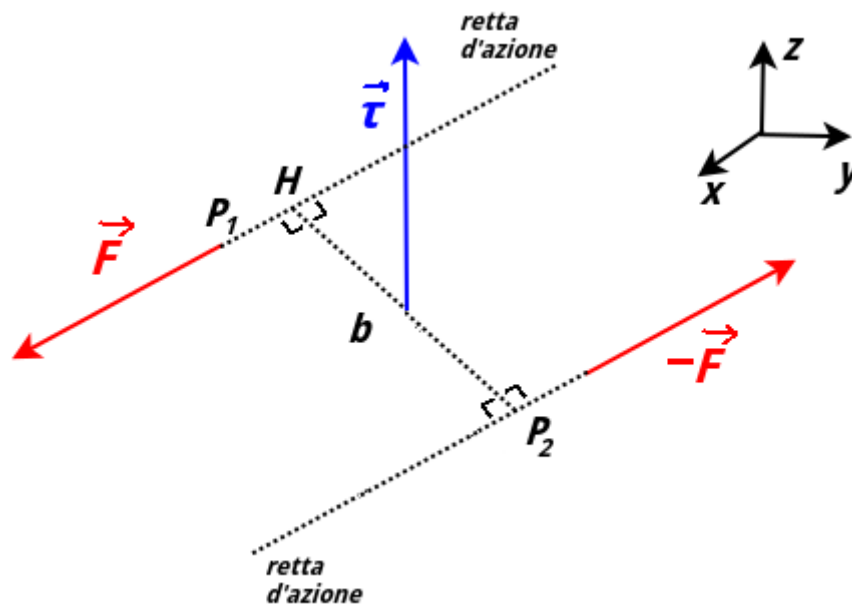


Figura VII.3: Una coppia di forze.

e verso opposto, ma applicate in punti diversi. La seconda legge di Newton ci dice che la forza risultante è nulla. Non risulta tuttavia nullo il momento risultante $\vec{\tau}$ se le forze risultano applicate in punti diversi P_1 e P_2 (Fig. (VII.3)). Questo sistema di forze si chiama *coppia*. Dato che il momento risultante della coppia non dipende dal centro di riduzione, si può calcolare usando come tale uno dei due punti a cui le forze sono applicate, ad esempio P_2 . In questo modo basta calcolare il momento relativo a solo una forza (poiché una forza ha distanza nulla dal centro di riduzione). In tal modo risulta che:

$$|\tau| = Fb \quad (\text{VII.28})$$

dove b in questo caso si chiama *braccio della coppia*, è la distanza fra le due rette di applicazione. Quindi il momento di una coppia delle forze con risultante nulla può essere nullo solo se i punti di applicazione delle forze sono gli stessi.

VII.1.4 Equilibrio Statico

L'equilibrio statico di un corpo rigido richiede la condizione di *equilibrio traslatorio* e quella di *equilibrio rotatorio*. La prima condizione, già vista, richiede l'assenza di accelerazione indotta da un insieme di forze. La seconda è che il momento risultante delle forze esterne sia nullo. Le forze interne soddisfano automaticamente queste condizioni per il principio di azione e reazione. Abbiamo già visto nel precedente capitolo che le forze interne soddisfano la prima condizione. Anche la seconda condizione è soddisfatta, essendo le forze interne presenti a coppie sulla stessa retta di azione e quindi formano coppie a braccio nullo. Conta quindi solo il contributo delle forze esterne. Riassumendo:

- *equilibrio traslatorio*

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e = \vec{0} \quad (\text{VII.29})$$

- *equilibrio rotatorio*

$$\sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i^e = \vec{0} \quad (\text{VII.30})$$

In genere abbiamo a che fare con problemi in cui le forze giacciono tutte su un piano, ad esempio il piano x, y (e quindi i momenti lungo l'asse z). Quindi le condizioni, considerando le proiezioni delle forze e i momenti sugli assi in cui possono avere proiezione non nulla si riducono a:

$$\left(\sum_{i=1}^n F_i^e \right)_x = 0 \quad (\text{VII.31})$$

$$\left(\sum_{i=1}^n F_i^e \right)_y = 0 \quad (\text{VII.32})$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \tau_i^e \right)_z = 0 \quad (\text{VII.33})$$

Per risolvere un problema di statica in caso di forze complanari si può seguire il seguente procedimento:

- 1) costruire un diagramma di corpo libero, rappresentando le forze esterne, specificando questa volta i punti di applicazione
- 2) scegliere un sistema di assi coordinati per la scomposizione delle forze
- 3) scegliere un asse rispetto al quale calcolare i momenti (è conveniente sceglierlo in modo che passi per l'intersezione delle rette d'azione di qualche forza, in modo da annullare i bracci relativi)

4) scrivere le condizioni di equilibrio statico

Per quanto riguarda la presenza della forza peso, con ottima approssimazione il centro di massa coincide con il *centro di gravità*, ossia con il punto in cui si può considerare applicato il peso del corpo.

Esempi di Equilibrio Statico

Consideriamo l'asta omogenea lunga L e massa m in equilibrio in Fig. (VII.4) su due supporti. Essendo l'asta omogenea, il suo centro coinciderà con il suo centro di massa. Il questo

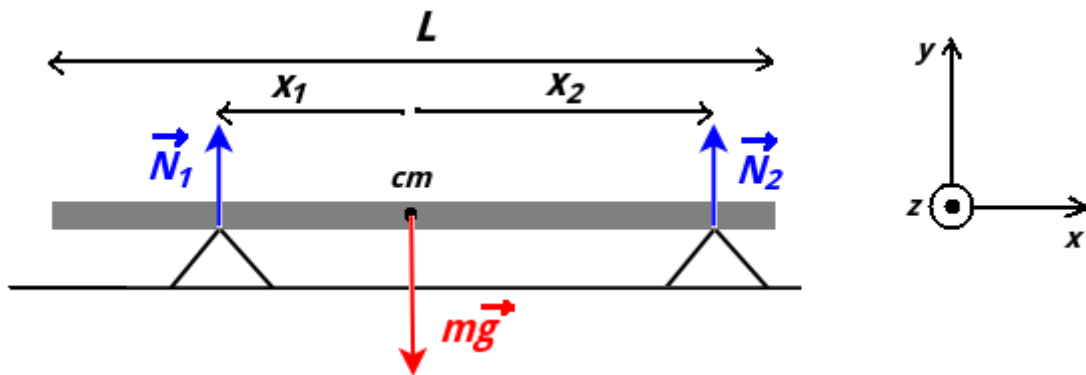


Figura VII.4: Asta in equilibrio su due supporti.

punto quindi, distante $L/2$ dagli estremi, si schematizza l'applicazione della forza peso $m\vec{g}$. Se i due supporti sono a distanze diverse dal centro della sbarra, possiamo intuire che essi debbano esercitare forze diverse. Queste forze sono schematizzabili come reazioni vincolari \vec{N}_1 e \vec{N}_2 , mentre x_1 e x_2 sono le distanze dei supporti dal centro. Vogliamo trovare i moduli N_1 e N_2 . Per l'equilibrio, la (VII.29), proiettando le forze sull'asse verticale y (verso positivo verso l'alto):

$$N_1 + N_2 - mg = 0 \quad (\text{VII.34})$$

La (VII.33) proiettata sull'asse z perpendicolare al foglio e con verso positivo uscente e scegliendo come polo il cm (ciò evita di calcolare il momento \vec{r}_g relativo alla forza peso):

$$N_2 x_2 - N_1 x_1 = 0 \quad (\text{VII.35})$$

Mettendo a sistema le due equazioni si ottiene:

$$N_1 = \frac{x_2}{x_1 + x_2} mg \quad (\text{VII.36})$$

$$N_2 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} mg \quad (\text{VII.37})$$

Nel caso in cui $x_1 = x_2$, si ha anche $N_1 = N_2 = mg/2$, come da attesa.

Vediamo ora l'esempio in Fig. (VII.5) di una scala di massa m e lunghezza l poggiata con un estremo A su una parete priva di attrito e l'estremo B sul pavimento, nel quale c'è attrito (con coefficiente di attrito statico μ_s). La scala forma con il pavimento un angolo θ . Il vincolo in A è

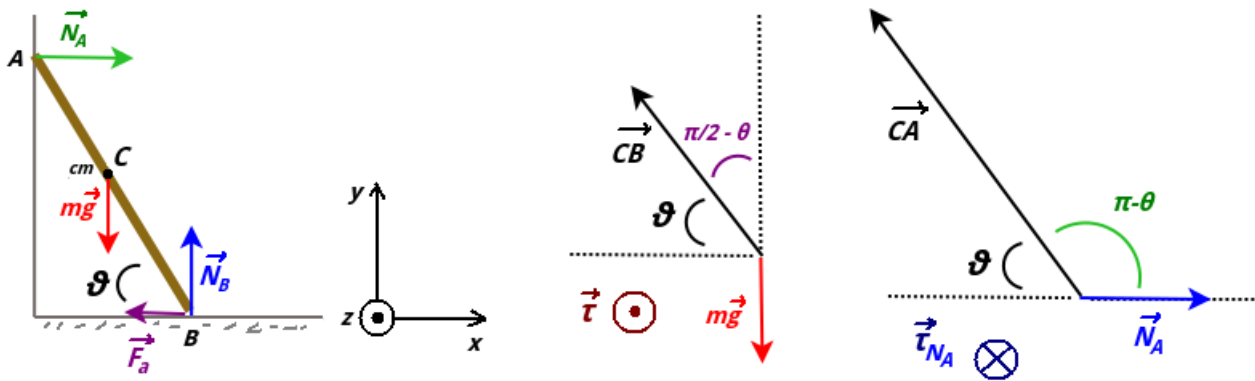


Figura VII.5: Equilibrio di una scala su piano su attrito.

liscio e quindi \vec{N}_A è normale al muro. Il B , oltre a \vec{N}_B normale al pavimento, c'è anche la forza di attrito statico \vec{F}_a parallela al pavimento, con verso tale da opporsi allo scivolamento della scala verso destra. Proiettando le forze e i momenti sui vari assi, per avere equilibrio traslatorio:

$$\begin{cases} x: & N_A - F_a = 0 \\ y: & N_B - mg = 0 \end{cases} \quad (\text{VII.38})$$

Dalla seconda si trova che $N_B = mg$ e, dato che $F_a = \mu_s N_B$:

$$N_A = F_a = \mu_s mg \quad (\text{VII.39})$$

Per i momenti, scegliamo B come polo, in modo da evitare di introdurre tutte le forze applicate in B nei calcoli. Per l'equilibrio rotatorio, la somma dei momenti deve essere nulla. Quindi:

$$\vec{BC} \wedge m\vec{g} + \vec{BC} \wedge \vec{N}_A = \vec{0} \quad (\text{VII.40})$$

$$\vec{\tau}_g + \vec{\tau}_{N_A} = \vec{0} \quad (\text{VII.41})$$

Dato che la scala si trova sul piano x, y , i momenti saranno lungo l'asse z perpendicolare al foglio. Per trovare con la mano destra bisogna usare la proiezione di un vettore sulla retta perpendicolare dell'altro. Così troviamo:

$$\vec{\tau}_g = \tau_g \hat{k} \quad (\text{VII.42})$$

$$\vec{\tau}_{N_A} = -\tau_{N_A} \hat{k} \quad (\text{VII.43})$$

Infatti si poteva intuire come la prima inducesse rotazioni antiorarie ^[2], mentre l'attrito tende ad opporsi a questa rotazione. In assenza di attrito del pavimento, non ci sarebbe modo di evitare la rotazione e, quindi, la caduta della scala. Per quanto riguarda il calcolo dei moduli in Fig. (VII.5) a destra sono riportati i vettori in gioco. L'angolo tra i due vettori nel primo caso è $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ e $(\pi - \theta)$. Utilizzando anche la (VII.39):

$$|\vec{\tau}_g| = \frac{l}{2} mg \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{l}{2} mg \cos \theta \quad (\text{VII.44})$$

$$|\vec{\tau}_{N_A}| = l \mu_s mg \sin(\pi - \theta) = l \mu_s mg \sin \theta \quad (\text{VII.45})$$

^[2]Basta pensare ad una scala appoggiata al muro che cade poggiata ad un muro alla nostra sinistra: durante la caduta essa ruota in senso antiorario. Se fosse stata appoggiata ad un muro alla nostra destra, si trova in quel caso che $\vec{\tau}_g = -\tau_g \hat{k}$ e durante la caduta ruota in senso orario.

VII.2 Dinamica del Corpo Rigido

VII.2.1 Variabili Angolari

In Sez. (II.2.2) e in Sez. (III.3.1) abbiamo già introdotto diverse variabili angolari. Supponiamo di avere un corpo puntiforme che si muove su una circonferenza di raggio r . Lo spostamento angolare del corpo sarà:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i \quad (\text{VII.46})$$

Descrivendo un certo spostamento angolare $\Delta\theta$ ^[3], il corpo percorrerà un arco s dato da:

$$s = r\Delta\theta \quad (\text{VII.47})$$

Derivando rispetto al tempo (con r costate):

$$v = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega \quad (\text{VII.48})$$

derivando ancora:

$$a_t = r \frac{d^2\theta}{dt^2} = r\alpha \quad (\text{VII.49})$$

dove α è l'*accelerazione angolare* e a_t è la componente tangenziale dell'accelerazione. La componente normale è l'accelerazione centripeta, che ha modulo:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (\text{VII.50})$$

Tra θ , ω e α sussistono delle relazioni che sono analoghe a quelle cinematiche tra r , v e a :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (\text{VII.51})$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (\text{VII.52})$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta \quad (\text{VII.53})$$

Come abbiamo visto in Sez. (II.2.2), alla velocità angolare ω e anche all'accelerazione angolare α possiamo associare dei vettori $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$ che descrivono le rotazioni attorno ad un asse fisso. Gli spostamenti angolari, invece, non possono essere trattati come vettori a meno che non siano infinitesimi. Infatti, se trattassimo questi come vettori ci accorgeremmo che invertire l'ordine delle rotazioni da applicare ad un oggetto esteso porterebbe a configurazioni finali diverse. Quindi tale tipo di vettore non obbedirebbe alla proprietà commutativa per la somma di vettori.

In un corpo rigido in rotazione, tutti i punti, eccetto quelli sull'asse di rotazione, descrivono una circonferenza: i valori $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$. Quindi si può parlare di $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$ di un corpo. La cinematica

^[3] $\Delta\theta$ deve essere espresso in radianti.

di un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso è analoga, dal punto di vista matematico, a quella di un punto materiale che si muove in linea retta:

$$(\theta, \omega_z, \alpha_z) \longrightarrow (x, v_x, a_x) \quad (\text{VII.54})$$

Si osserva che entrambi i sistemi hanno un solo grado di libertà (θ e x). Nel rotazione del corpo rigido, punti a distanza diverse dall'asse di rotazione hanno quindi stessi $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$, ma differenti velocità \vec{v} e accelerazioni lineari \vec{a} . Se z è l'asse di rotazione, il piano x, y è il piano del moto di un punto P del corpo, che descrive come traiettoria una circonferenza di raggio R pari alla distanza tra P e l'asse di rotazione. Il modulo della velocità tangenziale di P sarà quindi:

$$v_t = R\omega_z \quad (\text{VII.55})$$

Per ogni punto P si può definire la (II.60) vista nella Sez. (II.2.2) (Fig. (VII.6)):

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{R} \quad (\text{VII.56})$$

Per quanto riguarda l'accelerazione, sappiamo che anch'essa può avere una componente tan-

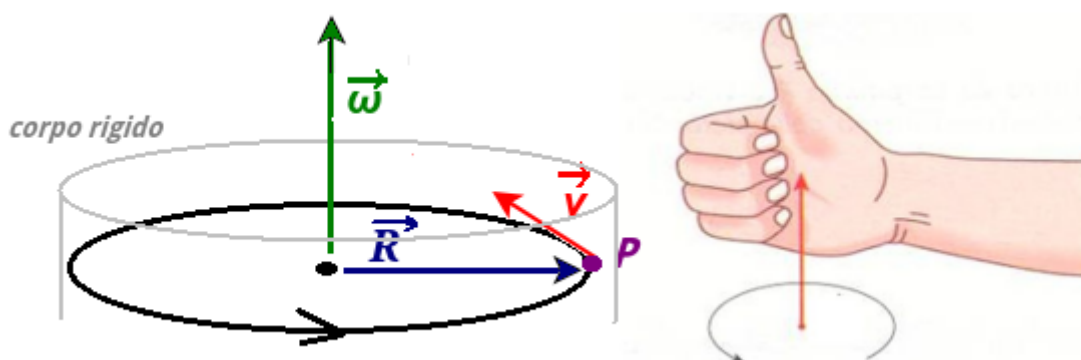


Figura VII.6: Il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$.

genziale e normale alla traiettoria. Nel moto circolare uniforme, la componente tangenziale abbiamo visto che è nulla e che vi è solo la componente normale, che è l'accelerazione centripeta. In un moto rotatorio, l'accelerazione tangenziale è legata all'accelerazione angolare:

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = \frac{d(R\omega_z)}{dt} = R \frac{d\omega_z}{dt} = R\alpha_z \quad (\text{VII.57})$$

Il moto di un corpo rigido può essere descritto dalla combinazione di un moto traslatorio e di un moto rotatorio e la conoscenza di due vettori, velocità di traslazione e velocità angolare, consente una descrizione completa del moto di un corpo rigido. I gradi di libertà sono 6, che sono le componenti dei due vettori nello spazio 3D.

VII.2.2 Energia Cinetica Rotazionale e Momento di Inerzia

Supponiamo di avere un punto materiale che ruota attorno ad un asse fisso; a questa rotazione possiamo associare una energia cinetica, usando la (VII.48):

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 \quad (\text{VII.58})$$

la quantità:

$$I = mr^2 \quad (\text{VII.59})$$

si chiama *momento d'inerzia*, in questo caso relativo ad un punto materiale che ruota attorno ad asse fisso con una velocità angolare di modulo ω .

Dimensionalmente:

$$[I] = [L^2 M^1 T^0] \quad (\text{VII.60})$$

In SI si misura in $\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Se il sistema è formato da n punti, ognuno con una propria distanza dall'asse di rotazione:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (\text{VII.61})$$

Ad esempio, in Fig. (VII.7) a sinistra il momento di inerzia del sistema, composto da due

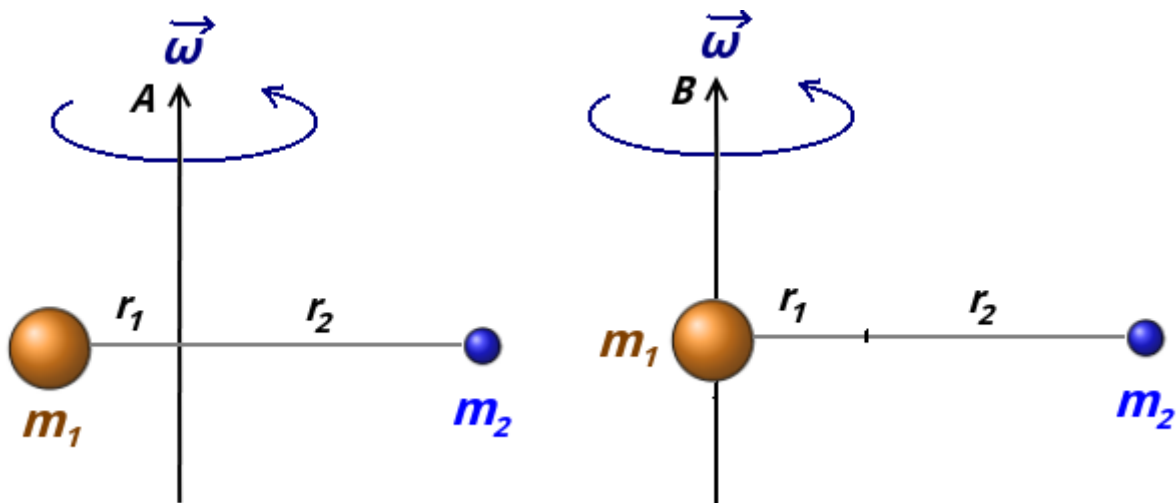


Figura VII.7: Momento d'inerzia rispetto a degli assi di rotazione di un sistema formato da due masse schematizzabili come punti materiali.

sfere schematizzabili da punti materiali, rispetto l'asse di rotazione A è $I_A = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$. Il momento d'inerzia dipende dalla distribuzione della massa e dall'asse rispetto a cui è calcolato: non è dunque una proprietà intrinseca del sistema, ma dipende da quale asse viene scelto per il calcolo. Nel caso in Fig. (VII.7) a destra, se calcoliamo il momento di inerzia rispetto all'asse B passante per la massa m_1 , questo diventa $I_B = m_2 (r_1 + r_2)^2$.

Nel caso di corpo continuo, nel limite di $\Delta m \rightarrow 0$:

$$I = \int r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV \quad (\text{VII.62})$$

Se il corpo è omogeneo:

$$I = \rho \int_V r^2 dV \quad (\text{VII.63})$$

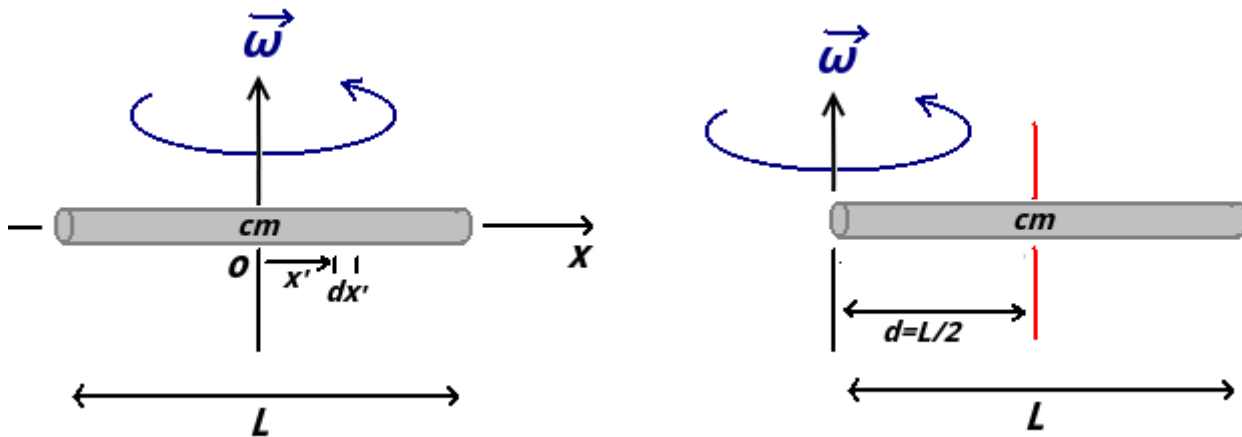


Figura VII.8: Momento d'inerzia di una sbarretta omogenea rispetto all'asse perpendicolare ad essa e passante per il centro di massa.

Il calcolo del momento di inerzia dipende quindi dalla geometria del corpo e dall'asse considerato. Ad esempio in Fig. (VII.8) a sinistra abbiamo una sbarretta omogenea di lunghezza L e massa M e vogliamo calcolare il momento d'inerzia rispetto al suo centro di massa. Un elemento infinitesimo a distanza x' dall'asse ha massa $dm = \lambda dx'$. Quindi, usando la (VII.63), sapendo che $\lambda = M/L$:

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x'^2 \frac{M}{L} dx' = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x'^2 dx' = \frac{M}{L} \left[\frac{x'^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} ML^2 \quad (\text{VII.64})$$

Calcolare momenti di inerzia di varie figure 2D e 3D va oltre gli scopi del corso. In Appendice C sono tabulati i momenti di inerzia di volumi e superfici omogenei rispetto a diversi assi passanti per il centro di massa.

Se vogliamo calcolare il momento di inerzia rispetto ad un asse non passante per il centro di massa, possiamo utilizzare il *teorema di Huygens-Steiner* (detto anche *teorema degli assi paralleli*) che stabilisce che: *il momento di inerzia I_P rispetto ad un asse passante per un punto arbitrario P si può scrivere come la somma di due termini:*

1. il momento di inerzia I_{cm} , calcolato rispetto alla retta parallela alla prima e passante per il centro di massa del corpo o sistema
2. il prodotto della massa totale M del corpo o sistema e il quadrato della distanza d fra i due assi

$$I_P = I_{cm} + Md^2 \quad (\text{VII.65})$$

Ad esempio, in Fig. (VII.8) a destra, potremo sfruttare il risultato della (VII.64) per calcolare il momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo a quello precedente e passante per un estremo della sbarretta. La distanza dal cm dell'estremo è $d = L/2$, quindi possiamo usare la (VII.66):

$$I_P = \frac{1}{12} ML^2 + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ML^2 \quad (\text{VII.66})$$

Tornando all'energia, la (VII.58), relativa ad un moto di sola rotazione per un corpo, si può quindi riscrivere come:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (\text{VII.67})$$

VII.2.3 Rotolamento

Nei moti rototraslatori, la velocità lineare di un punto del corpo che rotola può essere considerata come una combinazione di una velocità lineare che è uguale a quella dell'asse (traslazione pura) e di una velocità lineare dovuta alla rotazione del punto attorno all'asse (rotazione pura). Per un corpo che rotola possiamo individuare la condizione di *rotolamento puro*. È ad esempio il caso di una ruota di raggio R che rotola senza strisciare su un piano. In questo caso il modulo della velocità lineare v del centro della ruota sarà uguale a:

$$v = R\omega \quad (\text{VII.68})$$

dove ω è il modulo della velocità angolare. Il caso di rotolamento puro può avvenire solo quando sul piano è presente una forma di attrito chiamato *attrito radente*. Questo è un attrito statico responsabile del fatto che il punto di contatto della ruota sul pavimento è istantaneamente fermo ^[4].



Figura VII.9: Fotografia a esposizione prolungata di due punti luminosi posti su una ruota che rotola. Un punto luminoso si trova sull'asse e l'altro sulla circonferenza.

In Fig. (VII.9) si vede che durante il rotolamento il centro della ruota compie una traiettoria rettilinea, mentre un punto sul bordo ne descrive una fatta ad archi di cicloide. Si osserva che:

- il punto sulla circonferenza cambia direzione nell'istante in cui viene a contatto col suolo ed è in quiete in tale istante
- l'asse di rotazione del corpo passa istantaneamente per tale punto

Oltre a essere descritto come una rotazione attorno al centro della ruota combinata con una traslazione dello stesso, il rotolamento della ruota può essere visto come una rotazione attorno al punto di contatto P (variabile) con la superficie di appoggio. Questo punto di contatto P , essendo solidale con il suolo, è sempre istantaneamente in quiete. La velocità di ogni altro punto è perpendicolare al segmento che congiunge il punto considerato con il punto P ed è proporzionale alla lunghezza del segmento che lo congiunge con P . Se quindi la velocità del centro ha modulo v , quella dell'estremo più alto è $2v$ (Fig. (VII.10)). In Fig. (VII.11) ci sono

^[4]L'attrito responsabile del rallentamento di una ruota è invece l'*attrito volvente* ed è dovuto al fatto che il punto di contatto non è mai un punto geometrico, ma una superficie. Ciò induce un momento esterno che riduce la velocità angolare di una ruota; è per questo che un pneumatico sgonfio subisce un rallentamento maggiore.

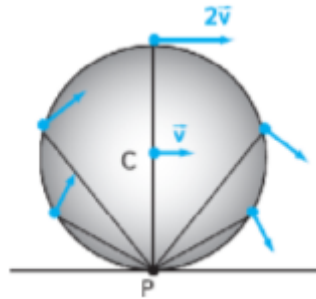
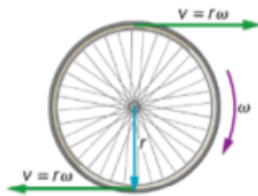
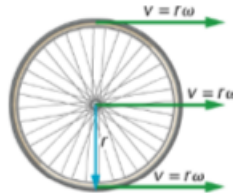


Figura VII.10: Velocità istantanea dei punti d un corpo in rotolamento puro.

Moto di pura rotazione
attorno al CM



Moto di pura traslazione



Moto di rotolamento senza
strisciamento

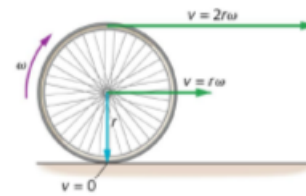


Figura VII.11: Velocità istantanea dei punti d un corpo in rotolamento puro.

tre possibili casi di moto per una ruota. Nel caso di moto di rotolamento, essendo il punto di contatto P il punto istantaneo di rotazione, utilizzando la (VII.67) e utilizzando la (VII.66) e la (VII.68):

$$K = \frac{1}{2}I_P\omega^2 = \frac{1}{2}(I_{cm} + MR^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 \quad (\text{VII.69})$$

Quindi, l'energia cinetica di un corpo in moto di rotolamento è (*Teorema di König*):

$$K = \underbrace{\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2}_{\text{rotol.}} + \underbrace{\frac{1}{2}Mv_{cm}^2}_{\text{trasl.}} \quad (\text{VII.70})$$

L'energia cinetica totale di un corpo è data dalla somma di un termine di energia di traslazione, come se tutta la massa fosse concentrata nel centro di massa, con uno dovuto alla rotazione attorno al centro di massa e il secondo dovuto alla traslazione di quest'ultimo.

Ad esempio, se poggiamo una sfera e un disco di uguale raggio R fermi sulla sommità di un piano inclinato di altezza h e assumiamo che il seguente moto sarà di rotolamento puro, possiamo chiederci chi per primo raggiunge la fine della rampa (Fig. (VII.12)). L'attrito radente non compie lavoro perché il punto di contatto P dei corpi con la rampa è istantaneamente solo. Quindi, essendo soltanto la forza peso che compie lavoro, l'energia meccanica si conserva per entrambi i corpi. Prendendo la fine della rampa come riferimento per il calcolo dell'energia potenziale gravitazionale, inizialmente in cima alla rampa tutta l'energia meccanica dei corpi è sotto forma di energia potenziale gravitazionale:

$$E_i = U_{gi} = mgh \quad (\text{VII.71})$$

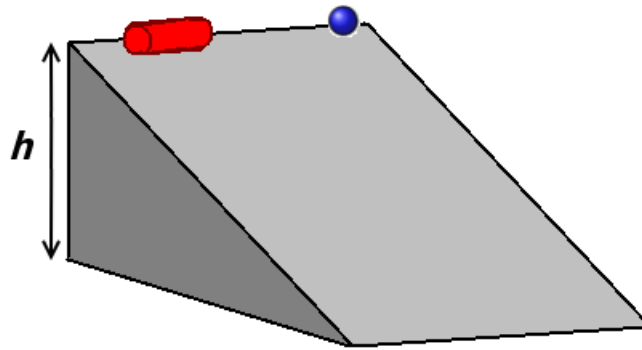


Figura VII.12: “Gara di velocità” tra un cilindro e una sfera di uguale raggio su un piano inclinato in cui è presente l’attrito.

Alla fine della rampa tutta questa energia si sarà trasformata in energia cinetica, data dalla (VII.70), poiché non stiamo più trattando i corpi come punti materiali, bensì come corpi estesi che posseggono anche un’energia di rotazione:

$$E_f = K_f = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv^2 \quad (\text{VII.72})$$

dove si è sostituito a $\omega = v/R$. Uguagliando la (VII.72) alla (VII.71) per la conservazione dell’energia meccanica, si trova il modulo della velocità:

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I}{R^2}}} \quad (\text{VII.73})$$

dato che i momenti d’inerzia relativi al cm dei due corpi sono:

$$I_{disco} = \frac{1}{2}mR^2 \quad (\text{VII.74})$$

$$I_{sfera} = \frac{2}{5}mR^2 \quad (\text{VII.75})$$

si trovano le velocità finali:

$$v_{disco} = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \quad (\text{VII.76})$$

$$v_{sfera} = \sqrt{\frac{10}{7}gh} \quad (\text{VII.77})$$

Quindi la sfera raggiungerà per prima la fine della rampa. Se sulla rampa non si fosse stato attrito e i corpi fossero semplicemente scivolati, la dinamica dei due corpi sarebbe stata quella relativa ai punti materiali, trovando in entrambi i casi il risultato:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{VII.78})$$

$$v_{disco} = v_{sfera} = \sqrt{2gh} \quad (\text{VII.79})$$

La geometria del corpo non viene presa quindi in considerazione in questo caso, perché, in assenza di attrito radente, i corpi non possono rotolare.

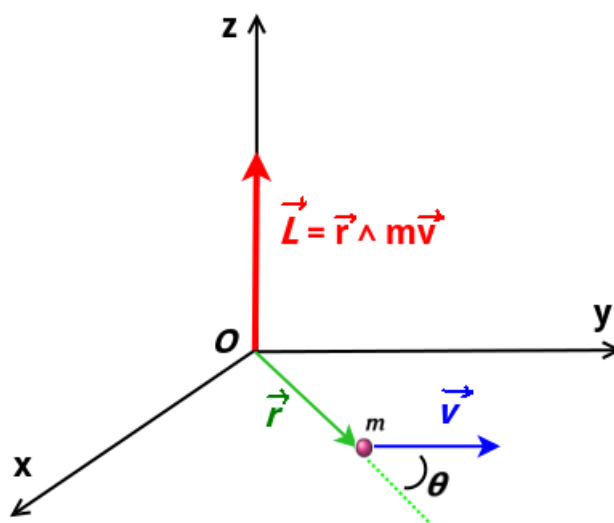


Figura VII.13: Tre casi di moti per una ruota.

VII.2.4 Momento Angolare

Consideriamo un punto materiale in moto e un asse passante per l'origine O di un sistema di riferimento. Come nel caso del momento torcente, il punto O è il polo o centro di riduzione. In un certo istante, la posizione della particella è descritta dal vettore \vec{r} . Si definisce come *momento angolare* (o *momento della quantità di moto*) $\vec{\ell}^{[5]}$ di una punto materiale avente quantità di moto \vec{q} rispetto ad O (Fig. (VII.13)):

$$\vec{\ell} = \vec{r} \wedge \vec{q} = m\vec{r} \wedge \vec{v} \quad (\text{VII.80})$$

si tratta quindi di un vettore perpendicolare al piano su cui giacciono \vec{r} e \vec{v} . Il momento angolare è quindi una quantità vettoriale che assume un significato solo quando è riferita ad un punto ed è particolarmente importante quando abbiamo a che fare con moti rotatori. Dimensionalmente abbiamo:

$$[\ell] = [L^2 M^1] T^{-1} \quad (\text{VII.81})$$

In SI si misura in $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

Per un sistema di punti materiali di posizioni \vec{r}_i , il momento angolare rispetto ad un polo Ω di posizione \vec{r}_Ω diventa:

$$\vec{\ell}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \wedge \vec{q}_i = m\vec{r} \wedge \vec{v} = \sum_{i=1}^n \vec{\ell}_{i\Omega} \quad (\text{VII.82})$$

dove $\vec{r} = \vec{r}_i - \vec{r}_\Omega$. Per un sistema continuo:

$$\vec{\ell} = \int \vec{r} \wedge d\vec{q} \quad (\text{VII.83})$$

^[5]Il simbolo può risultare diverso in molti testi.

dove $d\vec{q} = \vec{v}dm$ è la quantità di moto dell'elemento infinitesimo di massa. Il momento angolare è quindi una grandezza estensiva: dipende dalle dimensioni del sistema.

Nel caso di un punto materiale, se si deriva la (VII.80) rispetto al tempo si ottiene:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m \left(\vec{r} \wedge \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}} + \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \wedge \vec{v} \right) = m \left(\vec{r} \wedge \vec{a} + \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{v}}_0 \right) = \quad (\text{VII.84})$$

$$= \vec{r} \wedge m\vec{a} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{\tau} \quad (\text{VII.85})$$

poiché il prodotto vettoriale tra lo stesso vettore è nullo.

Se abbiamo un sistema di n particelle e calcoliamo i momenti torcenti e i momenti angolari rispetto al centro di massa ^[6]:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i^{in}}_0 + \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i^e \quad (\text{VII.87})$$

La somma dei momenti delle forze esterne è nulla perché queste formano coppie dal braccio nullo (hanno la solita retta di azione). Quindi abbiamo la *seconda equazione della dinamica dei sistemi*:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{\tau}^e \quad (\text{VII.88})$$

Si trova quindi che il moto rototraslatorio di un corpo rigido governato di quantità di moto complessiva \vec{Q} dalle *equazioni cardinali della meccanica*: $\vec{r}_{cm} \wedge \vec{v}_{cm}$:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e = \frac{d\vec{Q}}{dt} = M\vec{a}_{cm} \quad (\text{VII.89})$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{\tau}_{i\Omega}^e = \frac{d\vec{\ell}_\Omega}{dt} \quad (\text{VII.90})$$

Queste equazioni consentono di determinare la dinamica di un corpo rigido, dato che le due equazioni vettoriali danno in uno spazio 3D 6 equazioni scalari, una per grado di libertà del sistema.

^[6]Se la calcoliamo rispetto ad un altro polo O , otterremo:

$$\frac{d\vec{\ell}_\Omega}{dt} = \vec{\tau}_\Omega^e - \vec{v}_O \wedge \vec{Q} \quad (\text{VII.86})$$

dove \vec{v}_O è la velocità del polo e Q la quantità di moto complessiva del sistema. Se questa velocità è nulla o parallela alla velocità del centro di massa (e quindi di \vec{Q}), la (VII.86) si riduce nuovamente alla VII.88.

Se abbiamo un asse di rotazione, possiamo trovare l'espressione del momento angolare del corpo rigido in funzione del momento di inerzia rispetto a quell'asse. Se l'asse di rotazione è lungo l'asse z , ogni punto m_i del sistema percorre una circonferenza intorno all'asse di rotazione. Il raggio r_i di questa traiettoria è per definizione perpendicolare alla velocità e quindi attorno a questo asse il modulo momento angolare L_{zi} di ogni m_i è:

$$\ell_{zi} = r_i m_i v_i \quad (\text{VII.91})$$

Il momento angolare totale sarà:

$$\ell_z = \sum_{i=1}^n L_{zi} = \sum_{i=1}^n r_i m_i v_i \quad (\text{VII.92})$$

Dato che le traiettorie sono circolari, si può sostituire:

$$v_i = \omega r_i \quad (\text{VII.93})$$

con ω che è uguale per tutti i punti. Quindi la (VII.92) diventa:

$$\ell_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega \quad (\text{VII.94})$$

Sostituendo la definizione di momento d'inerzia rispetto all'asse z :

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (\text{VII.95})$$

Si ottiene infine:

$$\ell_z = I_z \omega \quad (\text{VII.96})$$

Se il momento risultante delle forze esterne si trova lungo questo asse z , la seconda cardinale diventa:

$$\sum_{i=1}^n \tau_{i,z}^e = \tau_z^e = I_z \alpha_z \quad (\text{VII.97})$$

dove τ_z^e è la risultante lungo z dei momenti delle forze esterne. Il momento di inerzia è quindi la misura della resistenza che un corpo oppone alla variazione della propria velocità angolare, in modo analogo al ruolo svolto dalla massa inerziale per l'opposizione alla velocità traslazionale.

Riprendiamo il caso del disco di raggio R che rotola sul piano inclinato con attrito (Fig. (VII.14)). Disegnando il diagramma di corpo libero, essendo questa volta un corpo rigido, dobbiamo inserire le forze nei punti di applicazione. La forza peso e la forza normale agiscono lungo la direzione passante per il centro di massa, quindi il loro momento ha braccio nullo e quindi i momenti. La forza di attrito \vec{F}_a , applicata nel punto di contatto e direzione perpendicolare a

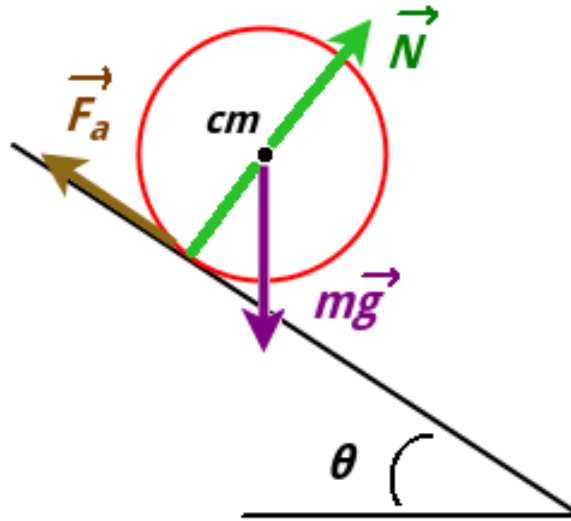


Figura VII.14: Disco che rotola su un piano inclinato con attrito.

quella passante per il centro di massa, ha momento torcente non nullo e di modulo $F_a R$ rispetto al polo cm . Le cardinali della dinamica, proiettate sugli assi, sono:

$$\begin{cases} x : & mg \sin \theta - F_a = ma_{cm} \\ y : & mg \cos \theta - N = 0 \\ z : & -F_a R = I\alpha_z \end{cases} \quad (\text{VII.98})$$

dove abbiamo anche che, nel caso di rotolamento puro:

$$a_{cm} = \alpha_z R \quad (\text{VII.99})$$

VII.2.5 Conservazione del Momento Angolare

Nel Cap. (V) avevamo trovato che per sistemi isolati, dato che la risultante delle forze esterne è zero. Dall'analisi della (VII.90) si trova che se il sistema è isolato, anche la risultante dei momenti delle forze esterne sarà nulla. Quindi, *per sistemi isolati*:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e = \frac{d\vec{Q}}{dt} = M\vec{a}_{cm} = \vec{0} \quad (\text{VII.100})$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{\tau}_{i\Omega}^e = \frac{d\vec{\ell}_\Omega}{dt} = \vec{0} \quad (\text{VII.101})$$

Ne deriva che *per sistemi isolati la quantità di moto e il momento angolare totale si conservano*. Come esempio possiamo fare quello della pattinatrice, che durante la rotazione può essere in

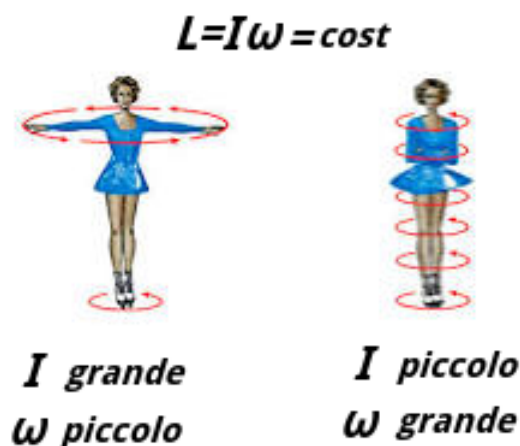


Figura VII.15: Nel caso di una pattinatrice la differenza nella velocità di rotazione si ottiene cambiando il momento d'inerzia.

approssimazione considerato un sistema nel quale il momento risultante delle forze esterne è nulla e quindi il momento angolare si conserva (Fig. (VII.15)). Mentre la pattinatrice avvicina le braccia al corpo, il suo momento d'inerzia diminuisce e quindi, dato che il prodotto $\ell = I\omega$ deve conservarsi, aumenterà la velocità angolare.

Il momento angolare si conserva nel caso in cui le forze in gioco siano centrali e nel caso di un urto nel quale non ci siano forze esterne impulsive tali da indurre un momento torcente non nullo.

Riepilogo formule

- *Centro di Massa di un Corpo Rigido*

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

- *Momento torcente di una forza applicata in P rispetto ad un polo O*

$$\vec{\tau} = (\overrightarrow{P-O}) \wedge \vec{F}$$

- *Equazioni della Statica*

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i^e = \vec{0}$$

- *Spostamento Angolare*

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

- *Arco descritto*

$$s = r\Delta\theta$$

- *Modulo velocità tangenziale in traiettoria circolare*

$$v = r \frac{d\theta}{dt} = \omega r$$

- *Vettore velocità tangenziale*

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

- *Accelerazione tangenziale in traiettoria circolare*

$$a_t = r \frac{d^2\theta}{dt^2} = r\alpha$$

- *Cinematica del moto circolare*

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$$

- *Momento d'Inerzia di un punto materiale rispetto un asse distante r*

$$I = mr^2$$

- *Momento d'Inerzia di insieme di punti materiali rispetto un asse*

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

- *Momento d'Inerzia corpo continuo*

$$I = \rho \int_V r^2 dV$$

- *Teorema di Huygens-Steiner*

$$I_P = I_{cm} + Md^2$$

- *Condizione di rotolamento puro*

$$v = R\omega$$

- *Teorema di König*

$$K = \underbrace{\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2}_{rotol.} + \underbrace{\frac{1}{2}Mv_{cm}^2}_{trasl.}$$

- *Momento angolare*

$$\vec{\ell} = \vec{r} \wedge \vec{q} = m\vec{r} \wedge \vec{v}$$

- *Momento angolare e Momento d'Inerzia rispetto a stesso asse*

$$\ell_z = I_z\omega$$

In assenza di momenti di forze esterne questa quantità si conserva (*Conservazione del Momento angolare*)

- *Equazioni cardinali della Dinamica*

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e = M\vec{a}_{cm}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{\tau}_{i\Omega}^e = \frac{d\vec{\ell}_\Omega}{dt}$$

Esercizi

*** Esercizio 121

Una barretta sottile lunga l ha una densità lineare che varia con la coordinata x lungo la lunghezza con la legge:

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{\alpha x}{l} \right)$$

dove α è una costante adimensionale e λ_0 la sua densità lineare alla coordinata $x = 0$. Trovare la coordinata del cm in funzione di α .

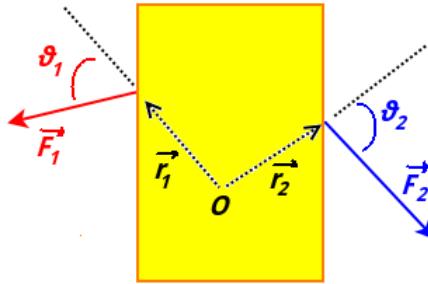


Figura VII.16

* Esercizio 122

Ad il corpo rigido in Fig. (VII.16), vincolato a ruotare attorno ad un asse passante per O sono applicate due forze. I moduli delle grandezze in gioco sono: $F_1 = 4.20$ N, $F_2 = 4.90$ N, $r_1 = 1.30$ m, $r_2 = 2.15$ m, $\theta_1 = 75.0^\circ$ e $\theta_2 = 60.0^\circ$. Si trovi \vec{r} risultante.

* Esercizio 123

Due bambini si trovano su un tronco di legno omogeneo appoggiato su un supporto in corrispondenza del suo centro di massa. I bambini (schematizzabili come punti materiali) si trovano ciascuno da una parte del supporto. I bambini hanno massa $m_1 = 35.0$ kg e $m_2 = 25.0$ kg. La massa del tronco è di 100 kg. Nell'istante iniziale l'asta è orizzontale.

- si disegni il diagramma di corpo libero del sistema sapendo che il primo bambino si trova ad una distanza x_1 dal supporto e l'altro ad una distanza x_2 dalla parte opposta.
- Se $x_1 = 1.00$ m, quale deve essere la distanza x_2 perché l'asta rimanga orizzontale?

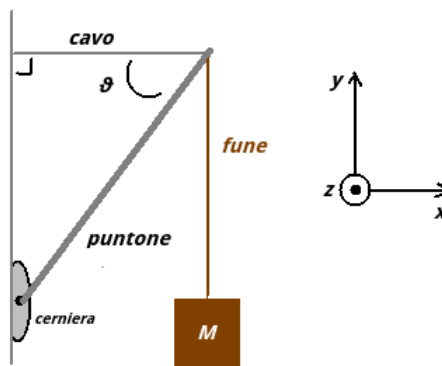


Figura VII.17

** Esercizio 124

Un puntone in figura VII.17 di massa $m = 60.0$ kg e lungo $l = 2.00$ m sorregge una massa M di 0.300 tonnellate attraverso una fune ideale. E' collegato al muro tramite una cerniera e una

cavo metallico di massa trascurabile. Il cavo e il puntone formano un angolo $\theta \pi/3$. Si trovi la tensione \vec{T}_c del cavo per l'equilibrio del sistema.

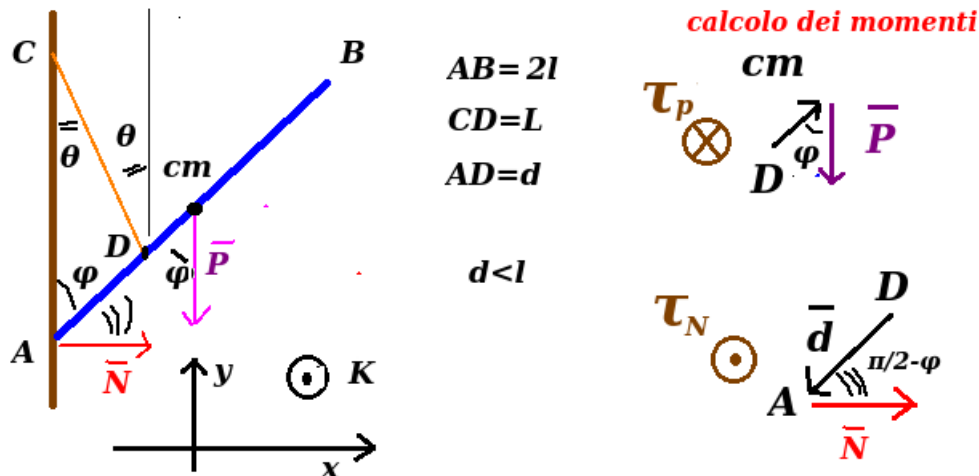


Figura VII.18

**** Esercizio 125

Un'asta omogenea rigida AB di lunghezza $2l$ e peso \vec{P} , ha l'estremo A appoggiato ad una parete verticale (figura VII.18). Da un punto C della parete è legato attraverso una corda lunga L inestensibile ad un punto D dell'asta che dista d da A. Trascurando l'attrito, trovare la condizione di equilibrio (oltre a quella in cui l'asta è verticale) e calcolare la corrispondente tensione della corda. ($l = 2.5$ m, $P = 833$ N, $L = 3.7$ m, $d = 2.0$ m).

** Esercizio 126

Una stella molto più grande del Sole nel suo stadio finale può collassare gravitazionalmente formando una stella di neutroni pulsar. Considerando un raggio iniziale della stella r_i di $7.00 \cdot 10^5$ km e un periodo di rotazione su sé stessa di 30 giorni. Se la stella di neutroni avrà un raggio r_f di 15 km, si trovi la velocità angolare della pulsar e il numero n_p di giri che compie su sé stessa in 1 secondo.

** Esercizio 127

Un volano ha momento di inerzia $I = 63.6$ kg m² e ruota con una velocità angolare costante ω' di 31.4 rad/s. Si trovi il modulo del momento frenante, supposto costante, che deve essere applicato per fermare il volano in $t' = 20$ s. Come si applica questo momento?

** Esercizio 128

Una piattaforma orizzontale a disco di massa pari a $M = 100$ kg e raggio R ruota alla velocità ω_i di 10 giri al minuto intorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Un uomo di massa $m = 60.0$ kg (schematizzabile come un punto materiale) si trova in piedi sul bordo della piattaforma. A quale velocità angolare ruoterà la piattaforma se l'uomo si muove dal bordo fino al centro?

*** Esercizio 129

Una forza costante F di modulo 20 N viene applicata tangenzialmente al bordo di un disco di massa m 5.0 kg, inizialmente fermo e vincolato a ruotare intorno ad un asse passante per il suo centro e perpendicolare ad esso. Trovare l'energia cinetica del disco dopo un intervallo di tempo t' 5.0 s dall'istante iniziale in cui la forza comincia ad agire.

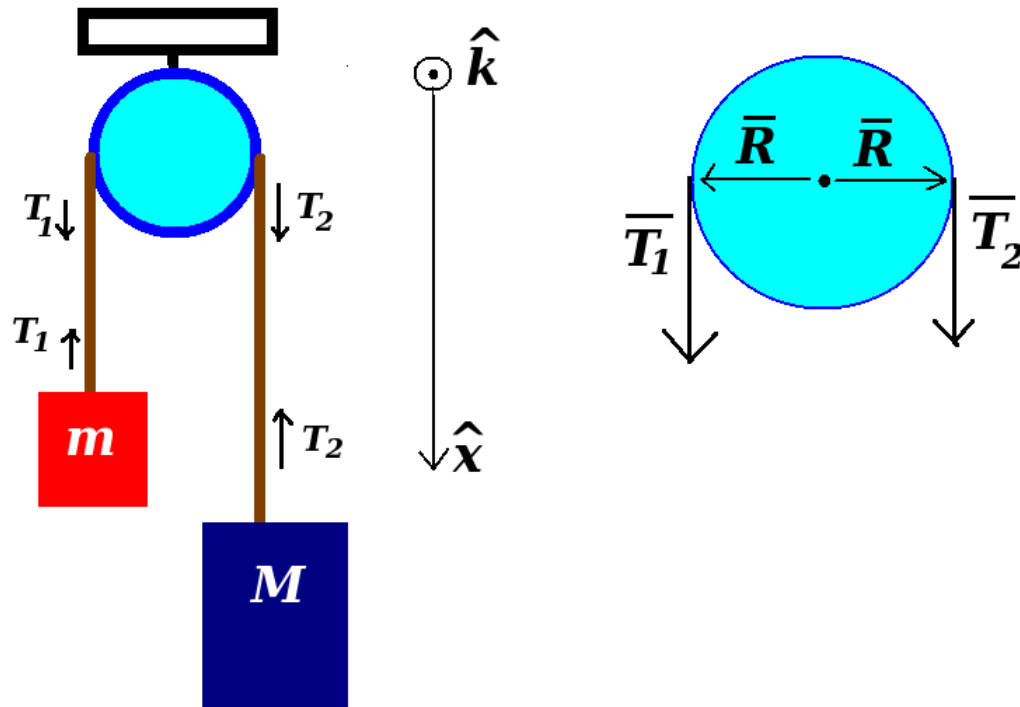


Figura VII.19

*** Esercizio 130

La macchina in figura VII.19 (*macchina di Atwood*) è composta da una puleggia verticale, una corda inestensibile ed una corda. Un blocco ha massa M 0.500 kg e l'altro m 0.460 kg. La puleggia ha raggio 5.00 cm. Lasciati liberi, il blocco più pesante cala di h 75.0 cm in t 5.00 s. Si trovi:

- l'accelerazione di ciascun blocco
- la tensione dei fili che trattiene ciascun blocco
- accelerazione angolare della puleggia
- momento d'inerzia della puleggia

Esercizio 131

Un bambino di massa m_b 30 kg sta sul bordo di una giostra a forma di disco, ferma e libera di ruotare intorno al proprio asse di massa M 100 kg e raggio R 2.0 m. Il bambino afferra al volo una palla di massa m_p 1.0 kg che gli giunge con velocità di modulo v 12 m/s e angolo ϕ 37° rispetto alla tangente passante per il punto esterno della giostra. Calcolare la velocità angolare che assume la giostra.

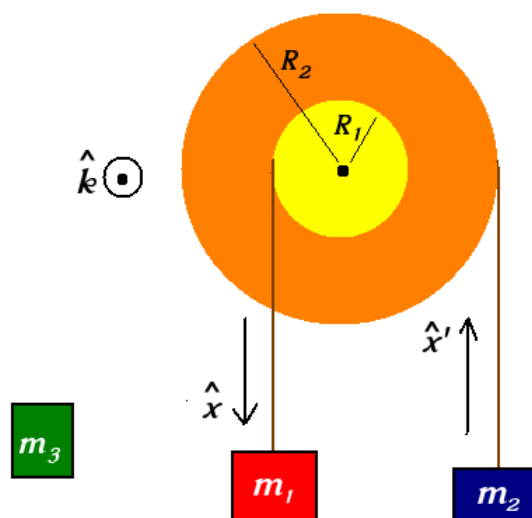


Figura VII.20

**** Esercizio 132

Due masse sono appese mediante fili ideali di massa trascurabile a due pulegge (figura VII.20) solidali al centro e girevoli attorno ad un asse comune. Il momento di inerzia complessivo I delle pulegge è 40 kg m^2 e i raggi R_1 0.4 m e R_2 1.2 m . La massa m_1 è di 24 kg . Si trovi m_2 perché il sistema si trovi in equilibrio e fermo. Attaccando un'altra massa m_3 di 12 kg a m_1 si trovi l'accelerazione angolare delle pulegge e le tensioni dei fili.

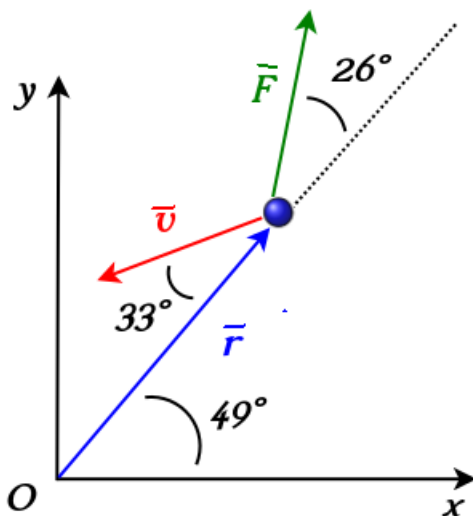


Figura VII.21

** Esercizio 133

Un punto materiale di 2.13 kg in un istante si trova ad una posizione \vec{r} rispetto ad un sistema di riferimento, si muove a velocità \vec{v} ed è sottoposto ad una forza \vec{F} , con riferimento alla figura

VII.21. Si calcoli, rispetto all'origine O , il momento angolare \vec{p} e il momento torcente τ ($r=2.91$ m, $v=4.18$ m/s, $F=1.88$ N).

** Esercizio 134

Una ragazza di massa m_r 50.6 kg si trova sul bordo di una giostra di massa m_g 827 kg e raggio R 3.72 m. All'istante iniziale la giostra è ferma. La ragazza scaglia in direzione orizzontale tangente al bordo della giostra un sasso di massa m_s 1.13 kg alla velocità v_s 7.82 m/s rispetto al suolo. Si trovi:

- velocità angolare della giostra dopo il lancio
- velocità lineare della ragazza

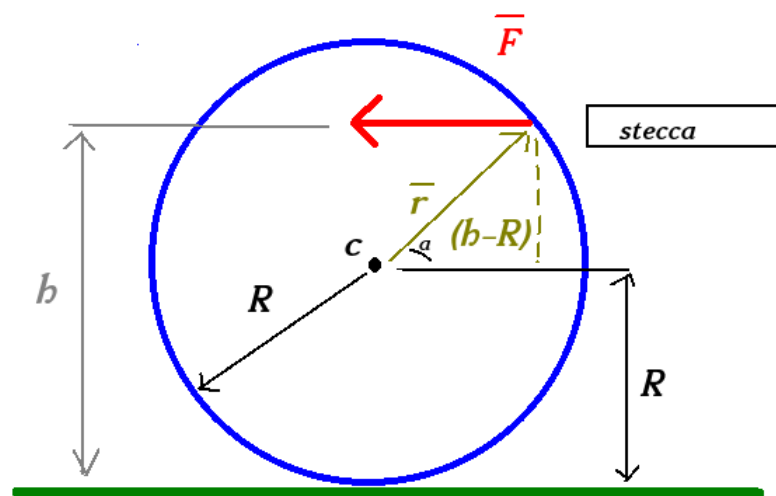


Figura VII.22

***** Esercizio 135

Trovare a che altezza (in funzione del raggio R della palla) rispetto al suolo va colpita una palla da biliardo (con la stecca parallela al tavolo) per indurre un moto in rotolamento puro (figura VII.22).

*** Esercizio 136

Due pattinatrici di massa $m = 51.2$ kg ciascuna si muovono l'una verso l'altra ($v = 1.38$ m/s) lungo traiettorie rettilinee parallele e distanti $d=2.92$ m (Fig. (VII.23)). La prima pattinatrice regge un'asta lunga d su una estremità, mentre l'estremità opposta viene afferrata dall'altra pattinatrice. Si assuma l'assenza di attrito e si trascuri la massa dell'asta. Si descriva:

- si descriva il moto delle pattinatrici una volta che la seconda ha afferrato l'asta.
- Tirando l'asta le pattinatrici riducono la distanza di $d_2=0.940$ m. Si trovi la nuova velocità angolare del sistema.

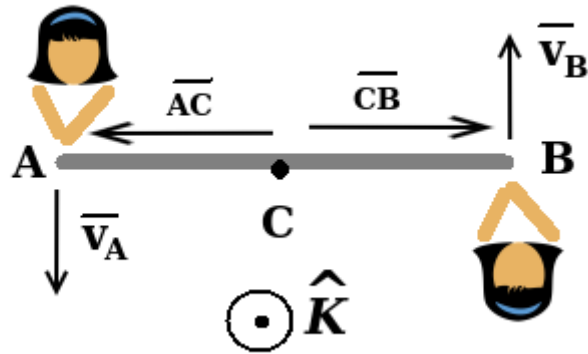


Figura VII.23

Capitolo VIII

Fluidi

In questo capitolo verranno trattati i fluidi, cioè corpi che si trovano nello stato liquido o aeriforme. Questa è una categoria di corpi che possono deformarsi indefinitamente sotto l'azione di forze di taglio.

Concetti Fondamentali

- pressione
- legge di Stevino e principio di Pascal
- torchio idraulico
- pressione relativa
- legge di Archimede
- equazione di continuità
- equazione di Bernoulli

VIII.1 Statica dei Fluidi

VIII.1.1 Definizione di Fluido

La materia viene abitualmente considerata in uno dei tre stati: solido, liquido e gassoso. Molte sostanze possono trovarsi in tutti gli stati, in modo dipendente dalla temperatura e dalla pressione. Non sempre l'esperienza quotidiana aiuta ad identificare correttamente gli stati degli oggetti che possiamo osservare. Ad esempio, l'asfalto e il vetro, comunemente considerati solidi, su periodi molto lunghi tendono a scorrere come liquidi. Il *fluido* è costituito da un insieme di molecole che sono disposte in modo casuale e vengono tenute insieme da deboli forze di coesione e da forze esercitate dal contenitore che le contiene.

Per descrivere lo stato di fluido in modo operativo, immaginiamo di applicare una forza sulla superficie di un oggetto. Nel primo caso consideriamo un oggetto, come un libro, fermo sul tavolo e applichiamo una forza perpendicolare alla superficie superiore. Questa forza può indurre una deformazione, come un appiattimento, in modo dipendente dalla rigidità del corpo. Se invece applichiamo al libro una forza parallela alla copertina, vedremo che il libro inizierà a distorcersi, con delle pagine che si sposteranno orizzontalmente, in moto tale che la sezione orizzontale del libro diventi da un rettangolo ad un parallelogramma. Questa tipologia di forza si chiama *forza di taglio*.

Se assumiamo di avere dei fluidi privi di *viscosità*, cioè privi di attrito tra strati diversi, abbiamo a che fare quindi con sistemi che si deformano continuamente se sottoposti all'azione di una forza tangenziale, che tende a fare scorrere uno stato del sistema sull'altro, indipendentemente dalla sua intensità. I fluidi non viscosi ed in quiete non sostengono le forze di taglio: se proviamo ad esercitare con una mano su un volume d'acqua una forza parallela alla superficie, la mano semplicemente scivola sull'acqua e non è possibile distorcere il liquido come fatto con il libro. Tale comportamento non si manifesta infatti nei solidi, che invece subiscono una deformazione che non cresce indefinitamente.

Generalmente i fluidi si trovano in fase liquida o gassosa, la cui caratteristica principale consiste nel non avere una forma propria, cioè nell'adattarsi al recipiente che li contiene. Nei fluidi le interazioni tra le molecole sono più deboli che nei solidi, e nella fase gassosa più deboli che nella fase liquida. I liquidi hanno un volume proprio e le variazioni di volume sono molto più piccole di quelle che si hanno nel caso dei gas. I gas, a differenza dei liquidi, si adattano non solo alla forma del recipiente, ma anche alle sue dimensioni, occupando l'intero volume disponibile.

Se volessimo trattare i fluidi allo stesso modo dei solidi, dovremmo considerare un numero di gradi di libertà immenso, cioè uguale a $3n$, dove n è il numero totale di molecole. Quindi fornirebbero un numero di equazioni impossibile da gestire. Tuttavia, applicando le equazioni della meccanica a porzioni di fluido piuttosto che alle singole molecole, il problema si semplifica notevolmente. Le grandezze fondamentali per questa descrizione saranno quindi la *densità* e la *pressione*. La densità è già stata introdotta nella Sez. (VII.1.1):

$$\text{densità volumica media} \quad \rho_m = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (\text{VIII.1})$$

$$\text{densità volumica (locale) di massa} \quad \rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (\text{VIII.2})$$

Tale definizioni di densità sono casi di *densità assoluta*. Spesso si utilizza anche la *densità relativa* all'acqua. Questa è definita come il rapporto tra la massa Δm di un dato volume di fluido ΔV del fluido e la massa Δm_a di un ugual volume di acqua distillata a pressione atmosferica e alla temperatura di 3.8° C:

$$\rho_r = \frac{\Delta m}{\Delta m_a} \quad (\text{VIII.3})$$

La densità relativa, essendo un rapporto tra masse, è un numero adimensionale. dividendo la (VIII.3) per il ΔV si ottiene:

$$\rho_r = \underbrace{\frac{\Delta m}{\Delta V}}_{\rho} \underbrace{\frac{\Delta V}{\Delta m_a}}_{1/\rho_a} \quad (\text{VIII.4})$$

da cui si deduce che la densità assoluta è uguale al prodotto della densità relativa per la densità assoluta dell'acqua:

$$\rho = \rho_r \cdot \rho_a \quad (\text{VIII.5})$$

dove ρ_a è la densità assoluta dell'acqua alla pressione atmosferica e alla temperatura di 3.8° C. In SI, tale valore è:

$$\rho_a = 1000 \text{ kg/m}^3 \quad (1 \text{ g/cm}^3) \quad (\text{VIII.6})$$

La densità dei liquidi e dei solidi varia con la temperatura e, in modo minore, con la pressione. L'acqua presenta un massimo relativo della densità proprio a 3.8°C. Quella dei gas è estremamente sensibile anche alle variazioni di pressione.

VIII.1.2 Pressione in un Fluido

Dato che, se applichiamo una forza di taglio, le molecole del fluido sono indotte a scivolare l'una sull'altra, l'unico tipo di forza che può esistere all'interno del fluido è perpendicolare alla superficie. Quindi immergendo un oggetto in un fluido, la forza che si manifesta è sempre perpendicolare alla superficie dell'oggetto (Fig. (VIII.1)-a)). La forza che il fluido esercita sull'oggetto immerso è una manifestazione macroscopica dell'effetto complessivo indotto dalle molecole del fluido che urtano sulla superficie durante il loro moto casuale. Ciascuna di queste collisione causa una inversione della componente della velocità perpendicolare alla superficie. Dal teorema dell'impulso (Sez. (V.3.2) e dalla terza legge di Newton, ciascuna collisione produce una forza sulla superficie.

Immaginiamo quindi di costruire un sensore di pressione, costituito da un pistone con all'interno il vuoto e una molla, da immergere all'interno di un fluido (Fig. (VIII.1)-b)). Una scala graduata permette la lettura della compressione della molla, risalendo quindi all'intensità della forza \vec{F}_n uniforme che agisce sul pistone. Se l'area del pistone è A , la *pressione* P del fluido al livello a cui lo strumento è stato immerso è definita dal rapporto tra forza e area:

$$P = \frac{F_n}{A} \quad (\text{VIII.7})$$

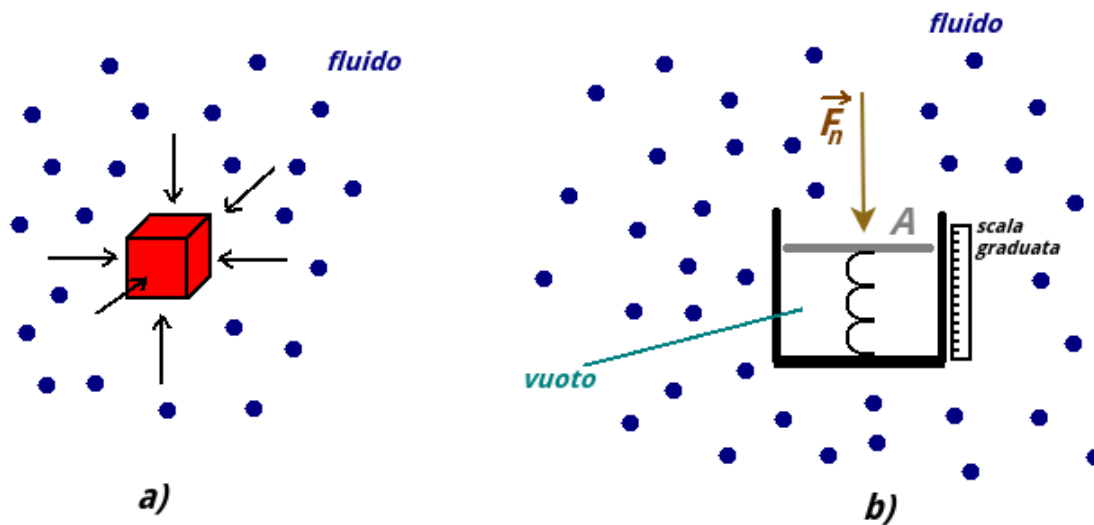


Figura VIII.1: Pistone per la misura della pressione all'interno di un fluido.

Si ricorda che \vec{F}_n è una forza perpendicolare alla superficie e che è uniforme sulla superficie del pistone. Il valore della pressione misurata dal sensore in un dato punto del fluido risulta indipendente dall'orientazione del sensore. La pressione, non avendo proprietà direzionali, è una grandezza scalare. Dimensionalmente:

$$[P] = [M^1 L^{-1} T^{-2}] \quad (\text{VIII.8})$$

In SI, la pressione si misura in pascal (Pa), che equivale ad 1 N su 1 m². Il pascal può essere convertito ad altre unità di misura non SI come il bar:

$$10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar} \quad (\text{VIII.9})$$

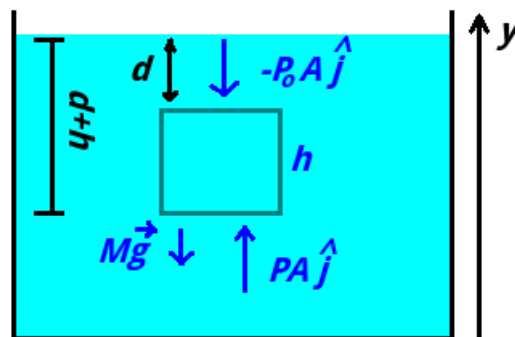


Figura VIII.2: La forza risultante all'interno di un campione di liquido.

Consideriamo un liquido di densità ρ costante a riposo. Nel caso dei liquidi, che normalmente vengono schematizzati come incompressibili, è ragionevole assumere che la densità ρ abbia lo stesso valore in ogni punto. Individuiamo all'interno un campione di liquido contenuto all'interno di un immaginario volume di forma cilindrica di area A , altezza h e la cui superficie superiore si trova ad una profondità d . Essendo in quiete, la forza risultante su questo campione deve essere nulla. Il liquido al di fuori del campione esercita forze su tutti i punti della

superficie del campione, perpendicolarmente ad essa. Sulla superficie laterale del campione le forze dovute alla pressione agiscono orizzontalmente e si cancellano a coppie diametralmente opposte, producendo una forza risultante nulla. La pressione sulla superficie superiore è P_0 (per d piccolo, questa pressione è praticamente coincidente con quella atmosferica), mentre quella sulla superficie inferiore è P . Le forze corrispondenti sono quindi rispettivamente $-P_0 A \hat{j}$ e $PA \hat{j}$. Inoltre è presente anche la forza peso $M\vec{g}$ che agisce sul campione. La risultante delle forze, tutte lungo l'asse y :

$$PA - P_0 A - Mg = 0 \quad (\text{VIII.10})$$

La massa del campione di liquido è $M = \rho Ah$ e quindi il modulo della forza peso è $Mg = \rho g Ah$. Quindi, dividendo per A :

$$P = P_0 + \rho gh \quad (\text{VIII.11})$$

Questa relazione prende il nome di *legge di Stevino* e il termine ρgh è detto *pressione idro-*

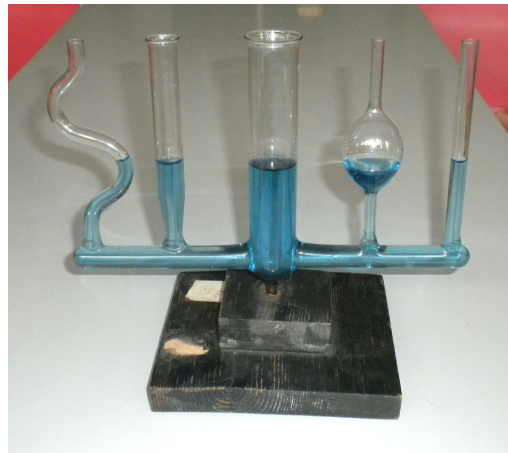


Figura VIII.3: Il principio dei vasi comunicanti.

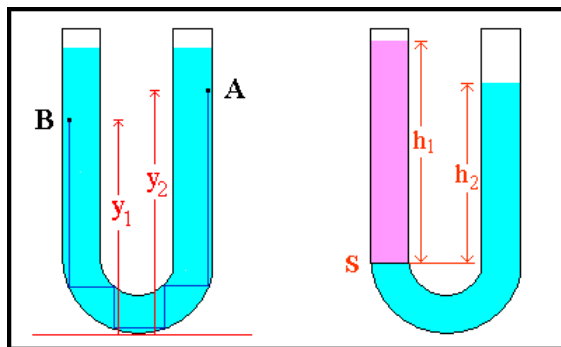


Figura VIII.4: Vasi comunicanti nel caso dello stesso liquido e in presenza di due liquidi non miscibili.

statica. La differenza di pressione tra due punti del liquido dipende solo dalla loro differenza di profondità. In base a questa legge se in un punto del fluido viene incrementata la pressione, questo l'incremento di pressione si propaga in tutto il liquido (*Principio di Pascal*).

Il fenomeno che si osserva nei vasi comunicanti (Fig. (VIII.3)) si basa su questo principio: un liquido contenuto in vasi comunicanti tra loro raggiunge lo stesso equilibrio in presenza della gravità ed è una conseguenza immediata della legge di Stevino. Se avessimo due liquidi non miscibili (Fig. (VIII.4)) di densità ρ_1 e ρ_2 e indicando con P_0 la pressione atmosferica:

$$\rho_1 g h_1 + P_0 = \rho_2 g h_2 + P_0 \quad (\text{VIII.12})$$

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \quad (\text{VIII.13})$$

Se il liquido è lo stesso, l'equazione si riduce a $h_1 = h_2$.

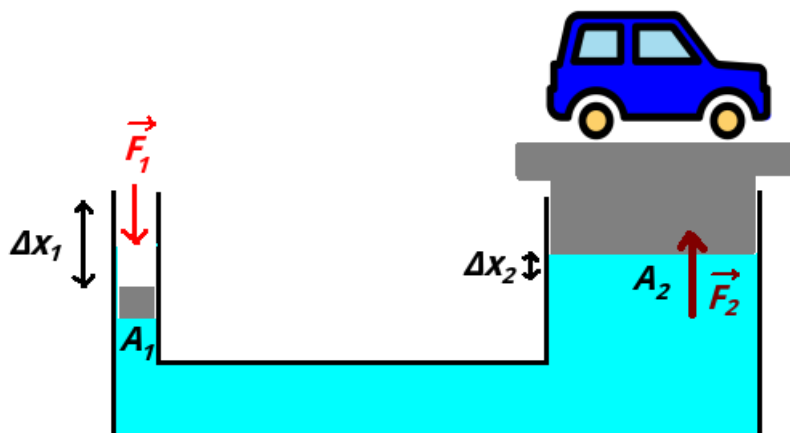


Figura VIII.5: Il torchio idraulico.

VIII.1.3 Il torchio idraulico

Una importante applicazione del principio di Pascal è il *torchio idraulico* (Fig. (VIII.5)), costituito da due cilindri di sezione differente ($A_1 < A_2$), tra loro comunicanti contenenti olio (o altro liquido incompressibile) e chiusi da due pistoni. Se si esercita una forza di modulo F_1 in direzione normale al pistone di area più piccola, la pressione dell'olio subisce un incremento pari a $P = F_1/A_1$ che si propaga inalterata in tutti i punti interni al sistema. Sul pistone più grande, ciò produrrà una forza di modulo:

$$F_2 = PA_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1} \quad (\text{VIII.14})$$

Dato che $A_1 < A_2$, il sistema si comporta come un moltiplicatore di forza, che può essere usata per sollevare un oggetto pesante. Questo guadagno di forza deve essere pagato ad un prezzo: la corsa Δx_1 del pistone di area piccola è maggiore di quella Δx_2 del pistone ad area grande. Infatti, a causa dell'incompressibilità del liquido, durante lo spostamento dei pistoni ad un volume $\Delta V = A_1 \Delta x_1$ deve corrispondere un uguale volume $A_2 \Delta x_2$. Trascurando l'attrito, il lavoro fatto dalla forza F_1 , cioè $L_1 = F_1 \Delta x_1$, viene trasformato in lavoro fatto dalla forza F_2 :

$$L_2 = F_2 \Delta x_2 = \underbrace{F_1 \frac{A_2}{A_1}}_{F_2} \underbrace{\frac{A_1}{A_2} \Delta x_1}_{\Delta x_2} = F_1 \Delta x_1 = L_1 \quad (\text{VIII.15})$$

Questa uguaglianza conferma la conservazione dell'energia meccanica durante il processo. Tale tipo di dispositivo è in uso anche per il comando dei freni nelle autovetture.

VIII.1.4 Misura della Pressione

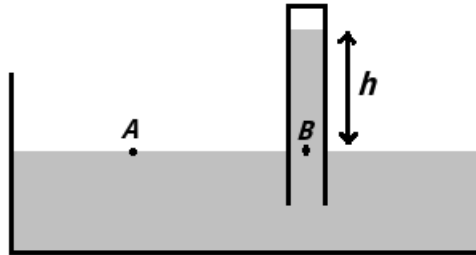


Figura VIII.6: Schema del barometro di Torricelli.

Con l'invenzione del *barometro* (strumento per la misura della pressione atmosferica), Evangelista Torricelli (Roma 1608 - Firenze 1647) misurò per primo il valore della pressione atmosferica. Torricelli utilizzò un tubo di vetro sufficientemente lungo, chiuso ad una delle estremità, lo riempì di mercurio e, tappandone l'estremità aperta (per imprimere la fuoruscita del liquido), lo capovolsse in una vaschetta contenente mercurio (Fig. (VIII.6)). Osservò che il livello di mercurio nel tubo di vetro superava di una distanza $h = 760$ mm quello del liquido della vaschetta. L'interpretazione dell'esperimento è la seguente: tenuto conto che allo stesso livello, nella vaschetta, la pressione deve essere la stessa in ogni posizione (per esempio nei punti A e B nella figura), la pressione esercitata dall'atmosfera sul liquido è uguale a quella idrostatica esercitata alla propria base da una colonna di mercurio di altezza pari a 760 m. Quest'ultima è data dalla (VIII.11), trascurando la pressione dei vapori di mercurio (*tensione di vapore*) che si formano nella parte vuota in cima al tubo. Questo valore fu chiamato *atmosfera*, che corrisponde a 760 torr e $1.013 \cdot 10^5$ Pa. Questo è comunque un valore indicativo, perché il valore della pressione atmosferica varia con la quota e la composizione.

Un dispositivo in grado di misurare una *pressione relativa* di un fluido rispetto alla pressione atmosferica si chiama *manometro* ^[1] Un esempio, in Fig. (VIII.7), è il *manometro a tubo aperto*, che misura la pressione relativa p_r di un gas rispetto alla pressione atmosferica. Il gas è contenuto in un serbatoio a cui è collegato il manometro, che consiste in un tubo a U con all'interno un liquido. L'altra estremità è aperta alla libera atmosfera. Si può misurare direttamente la differenza Δh dei livelli del liquido che si instaurano dalle parti opposte del tubo. Le due estremità sono infatti a diverse pressioni P (la pressione assoluta del gas) e P_0 (la pressione atmosferica). Se ρ è la densità volumica nota del liquido:

$$P_r = P - P_0 = \rho g \Delta h \quad (\text{VIII.16})$$

La pressione relativa può essere negativa o positiva, se la pressione del gas è minore o maggiore della pressione atmosferica. Ad esempio, per i pneumatici gonfi e nel sistema cardiocircolatorio, la pressione assoluta, è maggiore di quella atmosferica e quindi p_r è positiva. Nell'aspirare il liquido da una cannucchia (aumentando il volume dei polmoni), la pressione relativa dei polmoni è negativa.

^[1]Per pressioni molto piccole, la pressione relativa è rispetto al vuoto e lo strumento si chiama *vacuometro*.

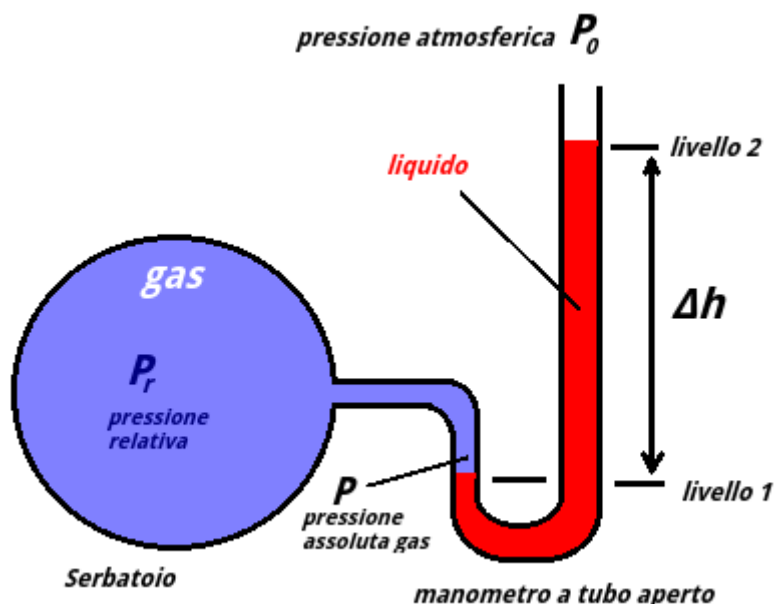


Figura VIII.7: Schema di un manometro a tubo.

VIII.1.5 Legge di Archimede

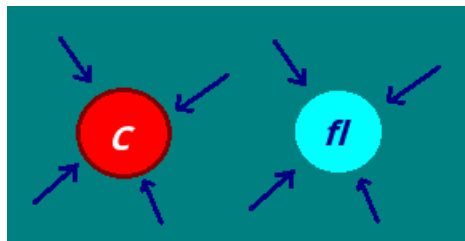


Figura VIII.8: Forze che agiscono su un corpo immerso nel fluido.

La legge di Archimede afferma che ogni corpo immerso in un fluido riceve da questo una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del volume di fluido spostato. Con “fluido spostato” si indica una quantità di fluido avente volume uguale a quello della parte del corpo immersa. Questa forza avviene per via della presenza del campo gravitazionale ed è giustificabile sulla base del confronto fra due situazioni, una in cui è presente il corpo e una nella quale il corpo è assente (Fig. (VIII.8)). Nel secondo caso, consideriamo una superficie identica a quella che delimita il volume del corpo immerso. In questo caso l'equilibrio del fluido fl contenuto nel volume è determinato dall'azione del peso e dal fluido esterno. Queste forze devono avere risultate nulla. Tale azione delle forze dovute al fluido deve essere presente anche nel caso in cui è presente il corpo. Se C è completamente immerso nel fluido, su di esso agiscono la forza peso $m\vec{g} = \rho_c V\vec{g}$ e la spinta di Archimede $-\rho_f V\vec{g}$, dove ρ_c e ρ_f sono rispettivamente le densità del corpo e del fluido. Se $\rho_f > \rho_c$, la forza risultante è diretta verso l'alto e il corpo viene spinto fino all'affioramento. In condizione di galleggiamento, il corpo mantiene immersa quella parte di volume necessaria per avere una spinta di Archimede che uguaglia in modulo la forza peso.

VIII.2 Dinamica dei Fluidi

VIII.2.1 Fluidi ideali in movimento

Lo studio della dinamica dei fluidi richiede la preliminare introduzione del concetto di *linea di flusso*. Nota in un certo istante la velocità del fluido in ogni punto si definiscono come linee di flusso le linee caratterizzate dalla proprietà che in ogni loro punto, la velocità è tangente alla linea. Le linee di flusso godono della proprietà di non intersecarsi, dato che le velocità delle particelle non possono avere contemporaneamente due velocità di diversa direzione. Dall'osservazione delle linee di flusso possiamo dedurre solo l'orientamento del vettore velocità e la presenza di eventuali gradienti all'interno del campo di moto (dove si infittiscono le linee di flusso aumenta il modulo del vettore velocità).

Per semplificare il problema del moto dei fluidi dobbiamo definire le caratteristiche di un fluido ideale:

- *moto laminare*
la velocità \vec{v} del fluido in ogni punto è fissata e non cambia nel tempo (*moto stazionario*). Quando la condizione di moto laminare non è soddisfatta, il fluido si trova in *moto turbolento*. Un fluido reale può passare da un regime all'altro.
- *fluido incomprimibile*
la sua densità volumica ha un valore costante ed uniforme. Questa proprietà è in buona approssimazione soddisfatta dai liquidi, ma non dai gas.
- *flusso non viscoso*
La viscosità si manifesta attraverso la presenza di forze di taglio ed è in pratica la manifestazione dell'attrito interno di un fluido. Un oggetto che si muova attraverso un fluido con viscosità nulla non incontrerebbe alcuna resistenza.
- *flusso irrotazionale*
Si tratta di una proprietà della velocità che, nei casi di fluido rotazionale, si manifesta con la presenza di vortici.

Se il moto è stazionario le linee di flusso godono della proprietà di essere costanti nel tempo e coincidono con le traiettorie delle particelle. In questo caso si può quindi anche definire un *tubo di flusso* come la superficie che si ottiene partendo da una linea chiusa Γ e costruendo le linee di flusso che passano in per ogni punto di Γ . Il tubo di flusso è quindi una superficie geometrica che permette di separare il volume del fluido in movimento in due parti, quella interna e quella esterna. Le particelle all'interno del tubo di flusso non possono quindi passare all'esterno e viceversa (altrimenti in un punto dovrebbero esserci due linee di flusso che si intersecano). Un tubo di flusso può essere un tubo materiale vero e proprio, ma anche una superficie virtuale che consente di individuare una ben determinata porzione di fluido e di studiare gli effetti su di essa dovuti al resto del fluido.

VIII.2.2 Equazione di continuità

Trattando il caso di fluido ideale e considerando un tubo di flusso, vogliamo trovare la relazione che lega la velocità v normale ad una sezione A del tubo di flusso. Con riferimento

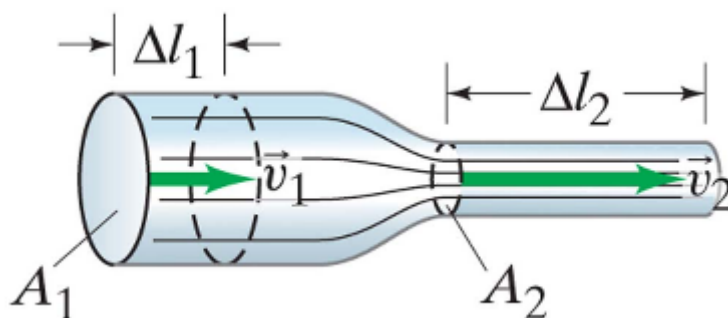


Figura VIII.9: Un fluido ideale scorre con portata costante all'interno di un tubo di flusso.

alla Fig. (VIII.9), abbiamo un fluido che scorre da sinistra verso destra. Le aree delle sezioni sono A_1 a sinistra e A_2 a destra. Supponiamo che in un tempo Δt entri da sinistra nel tubo un volume ΔV . Di conseguenza, dato che il fluido ideale è incomprimibile, un uguale volume deve uscire dalla parte destra nello stesso tempo. Se nella parte a sinistra il fluido ha velocità di modulo v_1 , in un intervallo Δt un elemento di volume percorre una distanza $\Delta l_1 = v_1 \Delta t$. Essendo il volume uguale:

$$\Delta V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t \quad (\text{VIII.17})$$

quindi (dato che Δt è lo stesso):

$$\Delta V = A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (\text{VIII.18})$$

Questa equazione, che lega la velocità normale ad una sezione del tubo di flusso e la superficie della sezione, è detta *equazione di continuità* per un fluido ideale. Quindi, all'interno di un tubo di flusso, al diminuire della sezione, la velocità aumenta, come suggerisce l'addensarsi delle linee di flusso della parte destra della Fig. (VIII.9). Definendo la *portata volumica*:

$$R_v = Av \quad (\text{VIII.19})$$

la (VIII.18) significa che la portata volumica all'interno di un tubo di flusso per un fluido ideale deve mantenersi costante. Moltiplicando per la densità si può ottenere anche la *portata massica*:

$$R_m = \rho Av \quad (\text{VIII.20})$$

Quindi, per un fluido con densità costante, la massa che entra nell'unità di tempo all'interno di un tubo di flusso è uguale alla massa che esce.

VIII.2.3 Equazione di Bernoulli

Con riferimento alla Fig. (VIII.10), in un intervallo Δt un volume di fluido ideale ΔV , colorato in viola, entra nell'estremità sinistra (ingresso) e un identico volume, colorato in blu scuro, esce dall'estremità di destra (uscita). Il volume uscente ed entrante deve essere uguale per via dell'equazione di continuità.

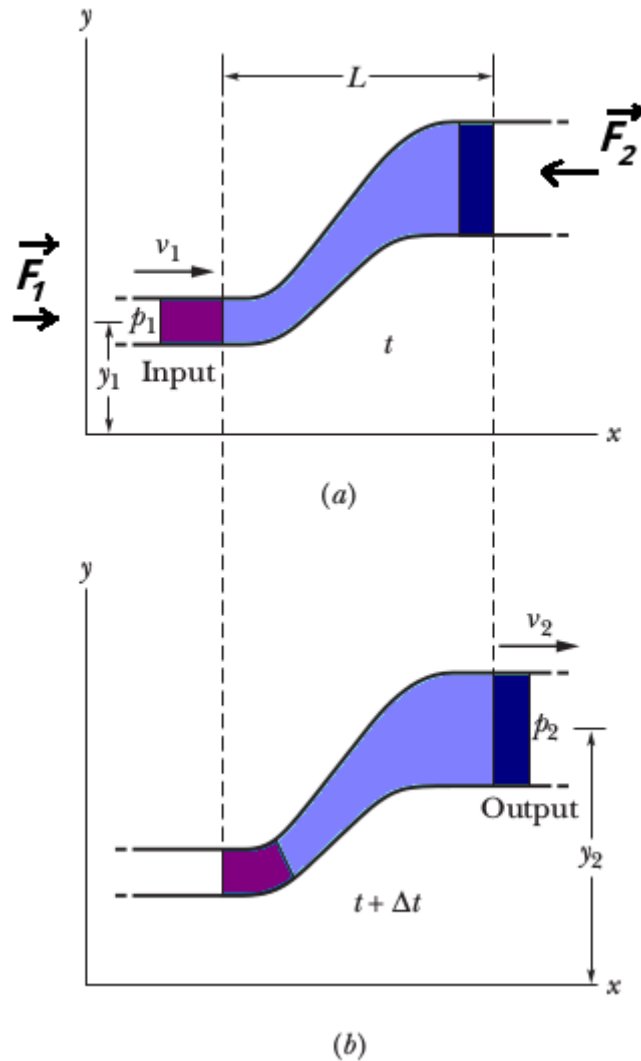


Figura VIII.10: Un fluido ideale scorre in un tubo entrando a sinistra e uscendo a destra. In a) è raffigurato nell'istante t e in b) all'istante $t + \Delta t$. Da sinistra passa una quantità di fluido colorata in viola uguale a quella colorata in blu scuro che fluisce all'uscita.

Il tubo di flusso si sviluppa in altezza, con la sezione di ingresso del tubo ad una quota y_1 e quella di uscita ad una quota y_2 . Siano v_1 e P_1 rispettivamente la velocità e la pressione del fluido quando entra nella sezione di ingresso e v_2 e P_2 i corrispondenti valori in quella di uscita.

Sul fluido agiscono forze dovute alla pressione esercitata dal fluido circostante $\vec{F}_1 = P_1 A_1 \hat{i}$ e $\vec{F}_2 = -P_2 A_2 \hat{i}$, perpendicolari alle sezioni. In un tempo Δt i corrispondenti lavori saranno:

$$L_1 = \underbrace{P_1 A_1}_{F_1} v_1 \Delta t \quad (\text{VIII.21})$$

$$L_2 = \underbrace{-P_2 A_2}_{F_2} v_2 \Delta t \quad (\text{VIII.22})$$

Il prodotto tra la velocità e Δt dà il tratto dello spostamento. Il loro lavoro complessivo L è:

$$L = P_1 A_1 v_1 \Delta t - P_2 A_2 v_2 \Delta t = (P_1 - P_2) \frac{\Delta m}{\rho} \quad (\text{VIII.23})$$

essendo $\Delta m = \rho A v \Delta t$ la massa (uguale, dato che ρ è costante e $\Delta V = A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t$) contenuta nei due volumi.

L'altra forza che compie lavoro (negativo in questo caso) è la gravità (L_g), quindi, per il teorema delle forze vive, il lavoro complessivo deve essere uguale alla variazione dell'energia cinetica:

$$\underbrace{(P_1 - P_2) \frac{\Delta m}{\rho}}_L - \underbrace{\Delta m g (h_2 - h_1)}_{L_g} = \underbrace{\frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2}_{\Delta K} \quad (\text{VIII.24})$$

Dividendo entrambi i membri dell'equazione per Δm e spostando da una parte all'altra i termini con lo stesso indice:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 + g h_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 + g h_2 \quad (\text{VIII.25})$$

Il risultato in (VIII.25) dimostra il *teorema di Bernoulli* per un fluido ideale, che afferma che lungo un linea di flusso:

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{costante} \quad (\text{VIII.26})$$

L'equazione di Bernoulli vale rigorosamente solo per il fluido ideale, poiché in presenza di viscosità, l'energia viene anche trasformata in energia termica per via dell'attrito.

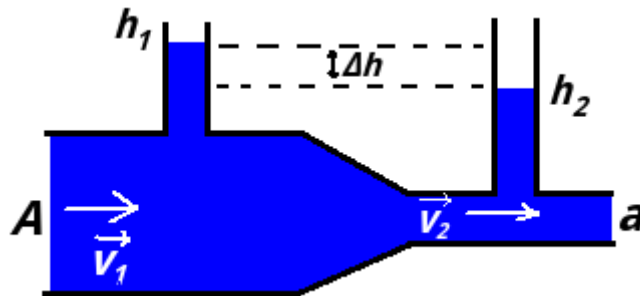


Figura VIII.11: Schema di un tubo di Venturi.

VIII.2.4 Effetto Venturi

Se si pone uguale a zero la variazione di quota, l'equazione di Bernoulli diventa l'equazione dell'*effetto Venturi*:

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{costante} \quad (\text{VIII.27})$$

Se, lungo una linea di flusso orizzontale, aumenta la velocità del fluido, deve diminuire la sua pressione, e viceversa. Questo effetto si può immaginare pensando ad una particella di fluido che si avvicina ad una strettoia; la maggior pressione a monte determinerà una accelerazione che ne aumenterà la velocità. Quando invece si avvicina ad una sezione più ampia, la maggior pressione che trova davanti a sé la rallenta, facendone diminuire la velocità.

Un *tubo di Venturi* o *venturimetro* (Fig. (VIII.11)) è alla base di uno strumento che permette di misurare la velocità media dei fluidi (incompressibili e di densità ρ) in una condotta. Esso consiste in un tubo con una sezione di ingresso di area A che si restringe fino ad un valore a . Vogliamo trovare un modo per misurare il modulo della velocità v_1 . La differenza di altezza nei due tubi verticali (che può essere misurata direttamente, insieme alle sezioni A e a) è legata alla differenza di pressione nei due punti:

$$P_1 = \rho gh_1 \quad (\text{VIII.28})$$

$$P_2 = \rho gh_2 \quad (\text{VIII.29})$$

$$(\text{VIII.30})$$

Sostituendo nella (VIII.27):

$$\rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (\text{VIII.31})$$

Semplificando ρ e ricordando che dall'equazione di continuità abbiamo:

$$v_1 = \frac{a}{A}v_2 \quad (\text{VIII.32})$$

si ottiene:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}} \quad (\text{VIII.33})$$

VIII.2.5 Fenomeni superficiali e di capillarità

L'esperienza mostra che la superficie libera dei liquidi presenta delle proprietà particolari. Essa si comporta infatti come se fosse una sorta di membrana elastica, cosicché una massa liquida tende sempre ad assumere la minore superficie possibile, compatibilmente con la geometria e con le forze che le sono applicate. Questo comportamento trova una semplice spiegazione se si pensa all'esistenza di *forze di coesione*, aventi piccolo raggio di azione, che agiscono tra molecola e molecola. Le molecole che si trovano al pelo libero del liquido risentono delle forze di coesione dovute alle molecole appartenenti ad un sottile strato sottostante e sono quindi continuamente soggette ad una forza che è diretta verso l'interno del liquido stesso.

L'analogia con la membrana elastica è solo parzialmente corretta; mentre infatti in una membrana elastica le forze dipendono dalla deformazione, le forze presenti alla superficie di un liquido sono sempre le stesse (a parità di altri parametri come la temperatura). Sono proprio queste forze provocare i fenomeni tipici che sono noti, dal punto di vista macroscopico, come fenomeni di *tensione superficiale*.

Tutti questi fenomeni possono essere descritti dal punto di vista quantitativo pensando che per aumentare di una quantità dS la superficie libera del liquido sia necessario compiere un lavoro ∂L , dato da:

$$\partial L = \tau_s dS \quad (\text{VIII.34})$$

La quantità τ_s , che ha le dimensioni di una energia diviso una superficie (o forza diviso una lunghezza), è la tensione superficiale. Sperimentalmente, si osserva che è molto sensibile alla temperatura e alla presenza di impurezze. Ad esempio, il sapone e i detergenti liquidi, diminuiscono considerevolmente la tensione superficiale dell'acqua ("tensioattive"). Per questo l'acqua si manifesta come "più scivolosa". Sono dovuti a fenomeni di tensione superficiale la forma sferica delle gocce, la coalescenza delle gocce che si scontrano scivolando su un vetro (si riduce la superficie totale ed è quindi vantaggioso energeticamente), la possibilità che hanno certi insetti (come l'idrometra in Fig. (VIII.12)) di camminare sull'acqua.



Figura VIII.12: L'idrometra è un insetto che riesce a camminare sull'acqua grazie alla tensione superficiale del liquido.

Oltre che a queste forze di coesione esistono anche le *forze di adesione*, dovute agli strati di liquido prossimi alle pareti del recipiente che lo contiene. La diversa forma per liquidi diversi (convesso o concavo) è connessa al bilanciamento tra le forze di adesione e di coesione (Fig. (VIII.13)). Per l'acqua in un capillare Fig. (VIII.13), le forze di adesione provocano una parziale salita lungo le pareti e il profilo della superficie è concava. Per il mercurio, a prevalere sono le forze di coesione ed il menisco è convesso.

Se un liquido ha sufficienti forze di adesione ad un contenitore di sezione molto stretta (*capillare*), l'innalzamento del liquido dentro il capillare può raggiungere valori molto elevati. La capillarità è alla base di numerosi fenomeni della vita di tutti i giorni, come le spugne, la carta assorbente, le infiltrazioni di umidità nei muri. Inoltre, a livello biologico è fondamentale per il trasporto di nutrienti all'interno degli organismi.

VIII.2.6 Fluidi reali

Nel fluidi reali, non ideali, le molecole del fluido interagiscono tra loro e con quelle dell'ambiente in cui sono collocate, creando una sorta di frizione rispetto al moto del fluido stesso. La proprietà di un fluido reale di opporsi al moto viene chiamata viscosità ed usualmente indicata

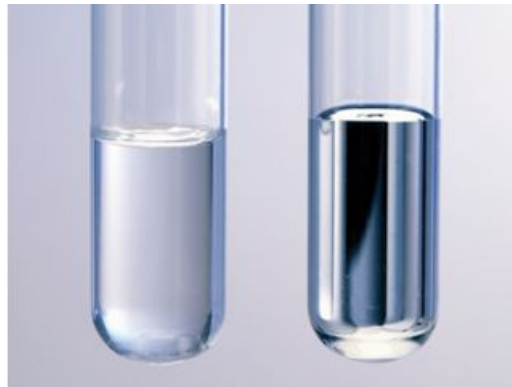


Figura VIII.13: A sinistra l'acqua in una provetta e a destra il mercurio. Per l'acqua è concavo, per il mercurio convesso.

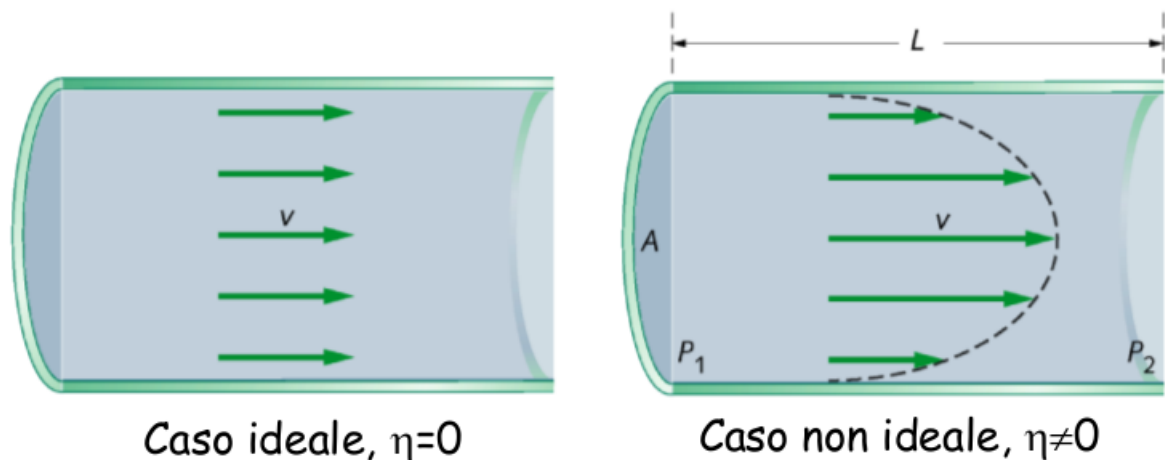


Figura VIII.14: Fluido ideale che scorre in un tubo (a sinistra) e il caso di un fluido reale (a destra).

con η . Nel caso di un fluido ideale che scorre lungo un tubo, la velocità delle particelle è costante in ogni punto di una sezione trasversale al moto. Nei fluidi reali, l'effetto dell'interazione tra le molecole fa sì che le velocità delle stesse tendano ad eguagliarsi. Di conseguenza, le molecole che scorrono in prossimità delle pareti del tubo tendono a essere frenate (Fig. (VIII.14)). La distribuzione risultante delle velocità è tale che la velocità massima si raggiunge al centro del tubo, come mostrato nelle figure seguenti.

Porzioni adiacenti di fluido scorrono le une sulle altre con velocità in modulo diverse. Per mantenere il fluido in movimento, occorre esercitare una forza. Inoltre, per effetto della viscosità esiste comunque una differenza di pressione lungo il percorso del fluido.

Sperimentalmente si ottiene che per un fluido che scorre a velocità v in un tubo di sezione A , la differenza tra le pressioni P_1 e P_2 in due punti distanti L è data da (*legge di Poiseuille*):

$$P_1 - P_2 = 8\pi\eta \frac{vL}{A} \quad (\text{VIII.35})$$

La misura della viscosità in SI è in Ns/m^2 . Ad esempio, per la glicerina è 1.5 Ns/m^2 e per l'acqua $3 \cdot 10^{-4} \text{ Ns/m}^2$.

Riepilogo formule

- *densità volumica media*

$$\rho_m = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

- *densità volumica (locale) di massa*

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

- *pressione*

$$P = \frac{F_n}{A}$$

- *Legge di Stevino*

$$P = P_0 + \rho gh$$

- *Spinta di Archimede*

$$\vec{F}_A = -\rho_{fl} V \vec{g}$$

- *portata volumica*

$$R_v = Av$$

- *portata massica*

$$R_v = \rho Av$$

- *Equazione di Continuità*

In un tubo di flusso, $R_v = \text{costante}$.

- *Equazione di Bernoulli*

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{costante}$$

- *Effetto Venturi*

Per un tubo orizzontale:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}$$

Esercizi

* Esercizio 137

Una bottiglia di sezione circolare di massa $m=0.1500$ kg e della capacità di 0.7500 l viene riempita di acqua. Sapendo che il diametro della bottiglia è $D=8.000$ cm, dire che pressione esercita la bottiglia sul piano d'appoggio.

Si devono calcolare le pressioni generate dal solo peso della bottiglia P_b e dal liquido contenuto nella bottiglia P_l e poi sommarle. Detta M la massa del liquido nella bottiglia, V volume del liquido e d densità del liquido si ottiene Formule senza numero

* Esercizio 138

Un pallone da calcio è gonfiato con una pressione relativa di 0.56 atmosfere. Quanto vale la pressione dell'aria all'interno del pallone?

Si devono calcolare la pressione esterna della atmosfera P_a con quella del gas interno al pallone P_i tenendo conto che 1 atmosfera= 101325 Pascal Formule senza numero

** Esercizio 139

Due vasi comunicanti sono riempiti uno con mercurio e l'altro con acqua. Considerato che dalla parte dell'acqua l'altezza del liquido è di 4,2m calcolare l'altezza a cui si trova il mercurio nell'altro capo del recipiente ($d_{Hg}= 13579$ kg/m³).

LA pressione generata della colonna d'acqua è equivalente a quella generata dalla pressione del mercurio. Le pressioni possono essere scritte nel seguente modo Formule senza numero

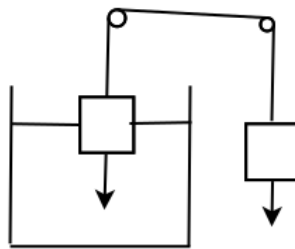


Figura VIII.15

*** Esercizio 140

Il sistema in figura VIII.15

Nel dispositivo schematizzato in figura A e B sono due corpi di forma e volume ugual ma di sostanze diverse; la densità d_A di A è 4 volte quella dell'acqua, quella d_B di B è 3.5 volte quella dell'acqua. Il sistema si trova all'equilibrio quando il corpo A è immerso in parte in acqua: si calcoli il rapporto tra la parte immersa di A e il suo volume totale.

*** Esercizio 141

Un torchio idraulico è costituito da due vasi comunicanti contenenti acqua di sezioni $S_a= 5$ dm² e $S_b= 50$ dm², rispettivamente. Dentro i vasi possono scorrere a tenuta e con attrito nullo

due pistoni A e B di massa $M_a = 15$ kg e $M_b = 250$ kg. Si calcoli: a) la differenza H tra i livelli del liquido nei due vasi; b) la massa del carico m che si deve porre su A per ottenere un livello uguale.

**** Esercizio 142

Un corpo di polistirene $d_0 = 1050$ kg/m³ del volume $V = 0.2$ m³ viene immerso in acqua $d = 1000$ kg/m³. Si dica se esso galleggia, rimane in equilibrio o affonda e in quest'ultimo caso dire il suo peso in acqua.

** Esercizio 143

Da un rubinetto sta cadendo un flusso continuo di acqua. La sezione dell'apertura del rubinetto è $A_0 = 1.20$ cm² mentre la sezione del flusso d'acqua dopo una caduta h di 45.0 mm è $A = 0.350$ cm². Quale è la velocità dell'acqua all'uscita del rubinetto?

** Esercizio 144

Un serbatoio cilindrico di sezione A ha un foro laterale di sezione a dal quale fuoriesce un flusso d'acqua. Il foro si trova ad una distanza verticale h dal pelo libero dell'acqua. Si trovi la velocità v_0 dell'acqua sullo strato superficiale del serbatoio. E si trovi anche la sua espressione nel limite di $A \gg a$.

** Esercizio 145

Un liquido di densità $\rho = 0.96$ g/cm³ scorre in un condotto a sezione variabile e alla fine esce a pressione atmosferica ad una quota di $h = 2.8$ m superiore a quella dell'inizio del condotto. L'area della sezione normale finale è $A = 3.0$ cm² e quella della sezione iniziale è doppia $2A$.

- a) Quale pressione aggiuntiva Δp , oltre alla pressione atmosferica bisogna esercitare all'inizio del condotto affinché la portata totale risulti $P = 12$ dm³/min.
b) come cambierebbe la portata se si raddoppiasse questa pressione aggiuntiva.

**** Esercizio 146

Una tubatura di un acquedotto con portata $U = 0.1$ m³/s e pressione $P = 2.5 \cdot 10^4$ Pa ha inizialmente una sezione $S = 400$ cm² mentre poi cambia mantenendosi orizzontale. Quale sezione S_f dovrà avere la nuova tubatura se si suppone di mantenere costante la portata, per avere velocità del liquido dimezzata, e quale sarà la pressione del liquido? (densità dell'acqua $d = 1000$ kg/m³)

Inizialmente troviamo la velocità iniziale del liquido $v = U/S = 0.1/0.04 = 2.5$ m/s
Per risolvere il problema si deve applicare l'equazione di Bernoulli e la legge di continuità:

** Esercizio 147

Un tubo di sezione $A = 200$ cm² e lunghezza $L = 25$ m posto in orizzontale viene riempito di un liquido. a) Calcolare la differenza di pressione DP agli estremi dovuta alla viscosità del liquido se la velocità del liquido nel tubo è 2 m/s nel caso dell'acqua $\eta = 3 \cdot 10^{-4}$ Ns/m² e della glicerina $\eta = 1.5$ Ns/m².

Capitolo IX

Termodinamica

La termodinamica è la branca della fisica che studia le trasformazioni termodinamiche indotte dal calore e dal lavoro in un sistema termodinamico, in seguito a processi che coinvolgono cambiamenti delle variabili di stato.

Concetti Fondamentali

Questo argomento è uno dei principali del corso e viene sempre chiesto durante ogni esame orale.

- equilibrio termico
- calore specifico
- calore latente
- equazione di stato per un gas perfetto
- dipendenza della temperatura dell'energia interna per un gas perfetto
- diagramma di Claperyon e disegno delle trasformazioni termodinamiche
- lavoro in una trasformazione termodinamica
- Primo Principio della Termodinamica
- lavoro, calore ed espressione del primo principio per la trasformazione isoterma, isobara, isocora e adiabatica
- equazione di Poisson
- Secondo Principio della Termodinamica
- rendimento di una macchina termica e rendimento della macchina di Carnot

- definizione di entropia

Per quanto riguarda il Primo Principio, risulta fondamentale saper descrivere quali siano le grandezze fisiche in gioco e la convenzione sui loro segni.

IX.1 Calore e Temperatura

IX.1.1 Sistema termodinamico

Supponiamo di avere un recipiente contenente una certa quantità di gas. Una descrizione microscopica attraverso le leggi di Newton applicata ad ogni molecola del gas porterebbe (*dinamica molecolare*) porterebbe ad un problema tremendamente complesso anche per piccole quantità di gas. Il problema può essere trattato invece dal punto di vista macroscopico, prendendo in considerazione grandezze che si manifestano su scale molto più grandi di quelle molecolari. La *termodinamica* è appunto la descrizione macroscopica dell'interazione di un sistema con l'ambiente esterno ad esso.

Le *variabili termodinamiche* (o *coordinate termodinamiche*) sono grandezze fisiche macroscopiche che si riferiscono ad un sistema e sono direttamente misurabili senza conoscere la struttura microscopica della materia.

Le variabili termodinamiche possono essere classificate come grandezze *estensive*, che dipendono dalle dimensioni del sistema (come la massa, il volume) e sono additive o come grandezze *intensive*, che sono proprietà locali o comuni al tutto il sistema (come la densità, la concentrazione). Il numero di variabili termodinamiche necessario per descrivere il sistema non è fissato a priori, ma dipende dalle caratteristiche del sistema stesso. Spesso si può considerare una variabile di stato intensiva, come la pressione, con il medesimo valore in tutto il sistema; in quel caso la variabile di stato descrive tutto il sistema.

La quantità di gas può essere specificata, invece che dal numero di particelle, dal numero di *moli* n . Il numero di moli ha come unità mol, che corrisponde ad una nuova dimensione fondamentale (quantità di materia, simbolo dimensionale $[N]$), che va aggiungersi alla lunghezza, la massa e il tempo. Una mole di una sostanza è la quantità di tale sostanza che contiene un numero di entità elementari (atomi, molecole) pari al *numero di Avogadro* (espresso con 3 cifre significative) $N_A = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Tale numero risulta dall'aver definito che una mole di atomo di carbonio 12 abbia esattamente una massa di 12 g.

Un *sistema termodinamico* è una porzione di spazio materiale, separata dal resto dell'universo termodinamico (ovvero dall'ambiente esterno) mediante una superficie con certe caratteristiche. Un sistema termodinamico può essere sede di trasformazioni interne e scambi di materia e/o di energia con l'ambiente esterno (ovvero tutto ciò di esterno al sistema che interagisce con esso) e con un altro sistema. Lo *stato termodinamico* di un sistema è descritto dalle variabili termodinamiche. Uno stato termodinamico è detto di equilibrio quando le variabili termodinamiche sono stazionarie, cioè non variano nel tempo; in questo caso le variabili sono anche dette *variabili di stato*. L'*equilibrio termodinamico* necessita di tre condizioni di equilibrio:

- *equilibrio meccanico*
risultante nulla di forze e momenti di forze esterni
- *equilibrio chimico*
non avvengono reazioni chimiche
- *equilibrio termico*
la *temperatura* è la stessa ovunque

Vedremo la temperatura nella Sez. (IX.1.2). In uno stato di equilibrio esiste una precisa e definita relazione tra le variabili termodinamiche che si chiama *equazione di stato*.

Quando le variabili di stato invece cambiano, si dice che il sistema è andato incontro ad una *trasformazione* e il sistema va incontro ad un passaggio da una equazione di stato ad un'altra, arrivando ad una nuova condizione di equilibrio. Gli stadi intermedi del sistema durante la sua evoluzione in genere sono di non equilibrio. Allo scopo del calcolo, spesso è possibile definire questa evoluzione, che si suppone molto lenta, in una serie di stati che differiscono tra loro per quantità infinitesime delle variabili di stato. In questo caso l'evoluzione del sistema può essere considerato come una successione di stati di equilibrio. Una trasformazione di questo tipo è una *trasformazione quasi statica*.

IX.1.2 Temperatura ed equilibrio termico

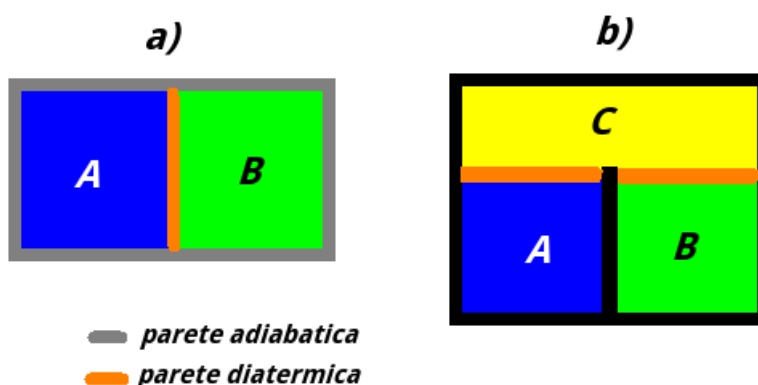


Figura IX.1: a) Due sistemi isolati dall'ambiente e connessi da parete diatermica, b) i due sistemi sono connessi ad un terzo sistema.

Supponiamo di avere due sistemi posti a contatto e separati da una parete che impedisce lo scambio di materia tra di loro. Se la parete è *adiabatica* (ad esempio una parete composta da materiale isolante) i due sistemi sono isolati e non vi può essere né scambio di materia né di energia tra i due sistemi, che quindi non si influenzano. Viceversa, una parete *diatermica* (come ad esempio un sottile strato di metallo) permette lo scambio di energia tra i due sistemi. Supponiamo di avere due sistemi *A* e *B* connessi da una parete diatermica che hanno la restante superficie coperta da una parete adiabatica (Fig. (IX.1)-a)); in questo modo i due sistemi possono interagire tra loro, ma sono isolati dall'ambiente esterno. Si dice che i due sistemi sono in *equilibrio termico* se, quando vengono posti a contatto con una parete diatermica le loro variabili di stato non cambiano nel tempo.

Due sistemi possono essere in equilibrio anche quando non sono posti in contatto diretto con parete diatermica, ma attraverso un terzo sistema *C* (Fig. (IX.1)-b)). Una volta fatto ciò, dopo un certo tempo le loro variabili di stato non muteranno più. Il *principio 0 della termodinamica* afferma che *se due sistemi sono in equilibrio termico con un terzo sistema, allora sono anche in equilibrio termico tra loro*. Questo è un principio base della Natura.

Il concetto di equilibrio termico è profondamente connesso alla grandezza fisica chiamata *temperatura*, che rappresenta un'altra dimensione fondamentale (simbolo dimensionale $[\Theta]$);

infatti la temperatura si può definire come *quella grandezza fisica che stabilisce se due sistemi sono in equilibrio termico*: se ciò avviene, i due sistemi hanno la stessa temperatura. Dal punto di vista microscopico, *la temperatura è legata all'energia cinetica media delle entità elementari che compongono il sistema*.

È importante sottolineare che *la temperatura può essere definita e misurata univocamente solo in sistemi in equilibrio termodinamico*. In questo tipo di sistema la temperatura non può dipendere dal tipo di termometro usato e dal suo posizionamento nel sistema. Usando il concetto di termometro, ovvero un dispositivo che può essere considerato un sistema termodinamico a sé, in grado di effettuare una misura della temperatura, è possibile analizzare le conseguenze del principio zero della termodinamica. Supponiamo che i due sistemi *A* e *B* prima visti in Fig. (IX.1)-b) siano due termometri in equilibrio termico con un sistema *C*. Se risulta che le temperature segnate dai due termometri non sono uguali, dato che il principio zero della termodinamica non può essere violato, ciò può avere solo due conseguenze: o uno dei due termometri non è in equilibrio termico con *C* oppure che le misure siano buone e, essendo la temperatura una grandezza che non può dipendere dallo strumento di misura, che è il sistema *C* a non essere in uno stato di equilibrio termodinamico. In quest'ultimo caso è il concetto di temperatura stessa a perdere di significato.

Per dare una definizione operativa di temperatura, e individuare anche le caratteristiche di un termometro, bisogna soddisfare due condizioni:

- trovare una grandezza fisica *X*, che caratterizza un fenomeno fisico che varia in modo riproducibile con la temperatura, alla base del funzionamento di un termometro
- individuare un sistema in uno stato di equilibrio termodinamico a cui viene attribuito un valore arbitrario di temperatura (*punto fisso*)

Se ad esempio abbiamo un termometro a gas, la grandezza fisica *X* sarà la pressione del gas.

Come deciso dal 1954 per convenzione, questo punto triplo è il *punto triplo dell'acqua*, ovvero un particolare stato dell'acqua, individuabile a delle precise condizioni ambientali, in cui lo stato solido, vapore saturo e liquido dell'elemento sono in equilibrio. A questo punto triplo, individuabile attraverso una pressione di vapore di 610 Pa, è stato attribuito una temperatura di 273.16°K, dove °K sta per gradi Kelvin. Se chiamiamo con X_{pt} il valore che la grandezza fisica su cui si basa il termometro assume in equilibrio termico con il punto triplo dell'acqua, il valore della temperatura di un sistema in equilibrio termodinamico sarà:

$$T_e = 273.16 \frac{X}{X_{pt}} \text{ °K} \quad (\text{IX.1})$$

Questa si chiama *temperatura empirica* perché la sua lettura si osserva sperimentalmente che la sua lettura dipende, anche se in modo molto piccolo, dal tipo di termometro usato. Se ad esempio abbiamo un termometro a gas, troveremo che la relazione IX.13 è:

$$T_e = 273.16 \frac{P}{P_{pt}} \text{ °K} \quad (\text{IX.2})$$

Se usiamo diversi gas, l'andamento della IX.2 dipende dalle caratteristiche del gas. Se però usiamo un gas in uno stato di estrema rarefazione in equilibrio con il punto triplo ($\lim_{P_{pt} \rightarrow 0}$):

$$T_a = \lim_{P_{pt} \rightarrow 0} 273.16 \frac{P}{P_{pt}} \text{ °K} \quad (\text{IX.3})$$

abbiamo una temperatura che non dipende dal tipo di gas usato. Tale gas prende il nome di *gas perfetto* (o *ideale*). La temperatura, misurata con un termometro a gas perfetto è chiamata *temperatura assoluta*. Nella realtà, nessun gas può essere usato per misurare temperature eccessivamente piccole, ma gas estremamente rarefatti approssimano i gas perfetti. In queste condizioni di rarefazione estrema, gas diversi che occupano il medesimo volume presentano la stessa dipendenza della pressione dalla temperatura.

Notiamo inoltre dalla (IX.13) che se $X \rightarrow 0$, allora la temperatura $T \rightarrow 0$. Quindi possiamo definire un punto (sperimentalmente irraggiungibile esattamente) in cui la temperatura è 0. Questo punto è lo *zero assoluto di temperatura*.

Oltre alla scala Kelvin, un'altra scala molto importante è la scala *Celsius*. La scala Celsius basava la misura ponendo il termometro in equilibrio con l'acqua nel punto di fusione (0°C) e in ebollizione (100°C) alla pressione di 1 atm. La scala veniva tarata indicando come 1°C la centesima parte dell'escursione di X tra questi due punti. La differenza ΔT_C in gradi Celsius è identica ad una escursione ΔT_K di 1°K in gradi Kelvin. Il punto triplo dell'acqua in scala Celsius si trova a 0.01°C . La conversione tra gradi Kelvin a Celsius è quindi:

$$t_C \text{ in } ^\circ\text{C} = T - 273.15^\circ\text{K} \quad (\text{IX.4})$$

Un'altra scala diffusa è la scala *Fahrenheit*; la conversione da $^\circ\text{C}$ a $^\circ\text{F}$ è:

$$t_F = \frac{9}{5}t_C + 32^\circ\text{F} \quad (\text{IX.5})$$

viceversa:

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32^\circ\text{F}) \quad (\text{IX.6})$$

In un termometro che si basa sulla *dilatazione termica* ^[1], la grandezza X che varia con la temperatura sarà una lunghezza (o lunghezza al cubo). In modo dipendente dal tipo di materiale, la dilatazione lineare di un solido dipende dal *coefficiente di dilatazione lineare* α :

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \quad (\text{IX.7})$$

dove L_0 era la sua lunghezza originaria. Benché α in realtà dipenda dalla temperatura T e dall'intervallo di temperatura ΔT stessa, questa variazione è piccola per ΔT piccoli. Inoltre, α non dipende da L_0 . Nei liquidi, ma anche nei solidi, è conveniente riferirsi alla *dilatazione termica volumica*:

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T \quad (\text{IX.8})$$

dove β è il *coefficiente di dilatazione cubica*.

^[1]A livello microscopico, nei solidi l'aumento delle dimensioni è legato all'aumento della distanza media tra le molecole del materiale.

IX.1.3 Trasmissione del calore

Nella sezione precedente abbiamo visto che può esserci uno scambio di energia tra due sistemi. Il *calore* è una forma di energia che viene scambiata tra due sistemi o di un sistema con l'ambiente esclusivamente a causa di una differenza di temperatura. Il riferimento alla temperatura è indispensabile per definire il calore, in quanto l'energia tra il sistema e l'esterno può essere scambiata in modi diversi. Si usa il simbolo Q per indicare la quantità di calore scambiata ^[2]. Prendendo in considerazione un sistema che scambia calore con l'ambiente esterno, $Q > 0$ quando il sistema assorbe calore, $Q < 0$ quando il sistema lo cede.

Tra due sistemi il calore può essere scambiato per *conduzione*, *convezione* ed *irraggiamento*.

Nella conduzione due sistemi scambiano calore per via di un mezzo interposto che li mette in comunicazione. In questo materiale interposto, l'energia viene trasferita mediante gli urti tra le molecole del materiale. Le molecole più prossime al sistema a temperatura più alte acquistano energia che cederanno tramite urti a molecole più lente, fino ad arrivare ad un trasporto di energia fino al sistema a temperatura più bassa.

Nella convezione, il calore viene trasferito dal movimento macroscopico della materia, formando correnti di convezione. Queste correnti possono formarsi spontaneamente nei fluidi la cui densità varia con la temperatura. Nell'atmosfera, ad esempio, a causa del campo gravitazionale terrestre si generano correnti di convezione quando aria di temperatura più elevata, e quindi di minore densità, sale e aria a temperatura più bassa, con maggiore densità scende.

L'irraggiamento è un meccanismo di trasmissione di calore che chiama in causa l'esistenza di onde elettromagnetiche. Tutti i corpi, emettono e assorbono onde elettromagnetiche, perdendo o acquisendo energia. Lo spettro, cioè la distribuzione delle lunghezze d'onda delle onde elettromagnetiche, dipende dalla temperatura del corpo. Per temperature molto alte, ad esempio la superficie del Sole o il filamento di tungsteno riscaldato in una lampadina ad incandescenza, lo spettro va a cadere anche nella luce visibile. L'irraggiamento non ha bisogno di un mezzo interposto per scambiare calore.

IX.1.4 Calore specifico e calore latente

In questa sezione studieremo come cambia la temperatura di un corpo quando si fornisce calore. Supponiamo di misurare la variazione di temperatura ΔT subita da un sistema di massa m quando gli viene fornito una quantità di calore Q . Per il momento assumiamo che questo processo avvenga a temperatura costante e che non si verifichino cambiamenti di fase. Per variazioni infinitesime di temperatura si può approssimare come proporzionali questa variazione e il calore infinitesimo fornito ∂Q ^[3]. Ovviamente il calore fornito per innalzare il sistema di una certa temperatura dipenderà dalla massa del sistema. Per piccole variazioni avremo che:

$$\partial Q_p = mc_p dT \quad (\text{IX.9})$$

dove c_p è il *calore specifico a pressione costante*. In SI si misura in $\text{J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ^[4].

^[2]Quindi non è opportuno indicare con ΔQ una quantità di calore scambiata, dato che non c'è un funzione o un valore assoluto di calore che cambia.

^[3]Il calore non è una funzione di stato e quindi non è corretto scrivere dQ . Il calore è un trasferimento di energia, non una grandezza.

^[4]Essendo ΔT_C in Celsius uguale a T_K in Kelvin, la sua unità di misura è anche $\text{J kg}^{-1}\text{C}^{-1}$ e si può esprimere indifferentemente la variazione di temperatura in gradi Celsius o Kelvin.

Questo calore potrebbe essere anche fornito a volume costante, invece che a pressione costante. In questo caso:

$$\partial Q_v = mc_v dT \quad (\text{IX.10})$$

dove c_v è il *calore specifico a volume costante*.

Cambiare le condizioni con cui si fornisce il calore, necessita di una diversa quantità di calore per innalzare la temperatura di uno stesso corpo di una stessa temperatura. Nella maggior parte dei solidi e dei liquidi c_v e c_p sono approssimativamente uguali. Anche se definiti per variazioni infinitesime di temperatura, per piccole variazioni di temperatura c_p e c_v possono essere considerati costanti:

$$Q_p = mc_p \Delta T \quad (\text{IX.11})$$

$$Q_v = mc_v \Delta T \quad (\text{IX.12})$$

Il prodotto tra la massa del sistema e il suo calore specifico è la *capacità termica* C . Sistemi con alta capacità termica riescono ad accumulare calore senza una grossa variazione di temperatura e quindi si parla di materiali con elevata *inerzia termica*. Spesso, invece di specificare la massa m di un sistema, si specifica il numero di moli $n = m/m_p$, dove m_p è il *peso molecolare della sostanza*. Quindi si fa uso della *calore specifico molare*:

$$Q_p = nC_p \Delta T \quad (\text{IX.13})$$

$$Q_v = nC_v \Delta T \quad (\text{IX.14})$$

C_v e C_p si misurano in $\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$. I calori specifici sono quantità intensive, mentre le capacità termiche sono quantità estensive.

Attraverso il calore specifico a pressione costante c_p era definita la *caloria*, una unità di misura del calore. Essa era definita, in modo approssimativo, come la quantità di calore necessaria per innalzare la temperatura di 1 g di acqua di 1°C alla pressione atmosferica. Verso la metà del 1800, James Prescott Joule condusse una serie di esperienze sugli effetti termici del lavoro meccanico. Una di queste esperienze è raffigurata in Fig. (IX.2). Dell'acqua viene messa in un recipiente dalle pareti adiabatiche, in modo tale di impedire scambi di calore con l'ambiente esterno. All'interno del liquido sono immerse delle pale, che vengono messe in rotazione attraverso la caduta di una o più masse appese ad una fune. L'acqua così agitata viene riscaldata per attrito con le pale. Il risultato fondamentale che trovò con i suoi esperimenti era che, a parità di massa d'acqua, l'innalzamento della temperatura era sempre proporzionale al lavoro (indipendentemente dal tipo) svolto sul sistema e con la stessa costante di proporzionalità. Oggi la caloria è definita insieme al Joule:

$$1.000 \text{ cal} = 4.186 \text{ J} \quad (\text{IX.15})$$

L'esperienza di Joule è un esempio di *trasformazione adiabatica*, cioè *un processo nel quale non avviene uno scambio di calore con il sistema*. Durante tale processo, il sistema parte da uno

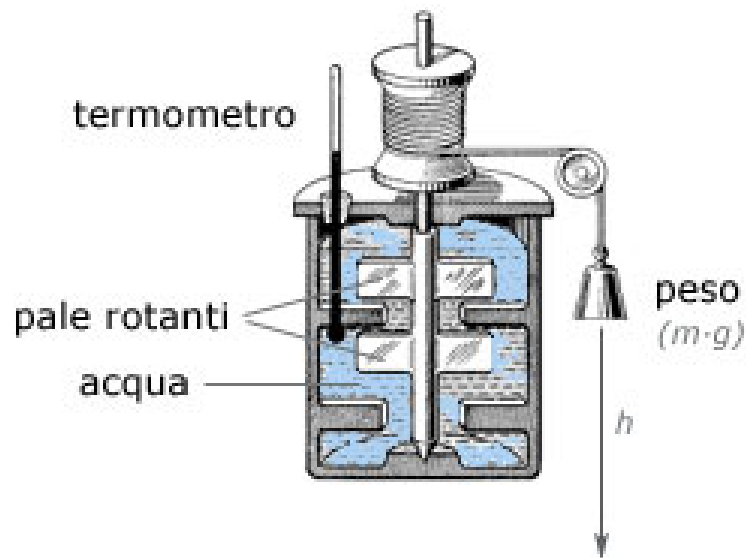


Figura IX.2: Schema di una delle esperienze di Joule.

stato iniziale di equilibrio e arriva ad un altro stato finale di equilibrio, caratterizzato in questo caso da una diversa temperatura.

Un tipo di processo che invece avviene attraverso una *trasformazione isoterma*, cioè un processo durante il quale la temperatura del sistema si mantiene costante è il passaggio di stato di una sostanza, ad esempio il processo di fusione del ghiaccio. In questo caso la temperatura si mantiene costante a 0°C fino a che tutto il ghiaccio non si è fuso. Durante i passaggi di stato, il calore fornito al sistema non produce una variazione di temperatura, ma viene “usato” per il passaggio di stato. Si parla in questo caso di *calore latente* ^[5] relativo ad un certo passaggio di stato (nell’esempio precedente si parla quindi di calore latente di fusione). Quindi la quantità di calore fornita al sistema di massa m in questo caso diventa uguale a:

$$Q = m\mathcal{L} \quad (\text{IX.16})$$

dove \mathcal{L} è il calore latente di fusione per una data sostanza per un determinato passaggio di stato. Le sue unità di misura in SI sono quindi J/kg.

IX.2 Leggi dei Gas

IX.2.1 Equazione di stato dei gas perfetti

Un gas è un fluido è un fluido che può essere facilmente compresso e occupa tutto il volume che ha a disposizione. Di seguito considereremo un gas racchiuso all’interno di un contenitore con volume V , che può essere variabile se il contenitore lo consente (ad esempio se si considera un pistone). Le variabili termodinamiche che descriveranno lo stato del gas, assunte costanti ovunque, saranno il *volume* V , la *pressione* P e la *temperatura* (espressa in gradi Kelvin) ^[6].

^[5]Il suo nome ha ragione storiche, in quanto risalente ad un’epoca in cui il calore era ancora considerato una sorta di fluido che poteva passare da un corpo ad un altro.

^[6]I sistemi che possono essere descritti da queste variabili si chiamano *sistemi idrostatici*.

La *quantità di materia*, espressa in massa, moli o numero di particelle, sarà una grandezza che rimarrà costante, assumendo che non ci possano essere scambi di materia con l'esterno.

In Sez. (IX.1.2) abbiamo introdotto il concetto di gas perfetto, che può essere definito in maniera operativa come *un gas di composizione arbitraria che si presenta in uno stato estremo di rarefazione*. Si tratta di una idealizzazione che non esiste in Natura, ma utile al fine di descrivere il comportamento dei gas. Le leggi che verranno di seguito enunciate varranno in maniera esatta per un tale gas. Il gas perfetto può essere anche definito attraverso altre due ulteriori approssimazioni:

- le molecole del gas non interagiscono tra loro
- le particelle sono puntiformi (non occupano un volume)

I primi studi delle leggi dei gas si svolsero nel XVII° secolo. Il primo esperimento faceva uso di un manometro a tubo, già visto in Sez. (VIII.1.4), contenente un gas e del mercurio. Il risultato trovato fu che, mantenendo la temperatura costante (trasformazione isoterma), il prodotto tra pressione e volume è costante (*legge di Boyle*)

$$PV = \text{costante} \quad \text{con } n \text{ e } T \text{ fissi} \quad (\text{IX.17})$$

dove n è il numero di moli del gas.

I secondi esperimenti, condotto a cavallo tra il 1700 e il 1800, prevedono trasformazioni a pressione costante (*trasformazioni isobare*) e a volume costante (*trasformazioni isocora*), portarono alle cosiddette *leggi di Gay-Lussac*

$$P \propto T \quad \text{con } n \text{ e } V \text{ fissi} \quad (\text{IX.18})$$

$$V \propto T \quad \text{con } n \text{ e } P \text{ fissi} \quad (\text{IX.19})$$

L'ultima legge è la *legge di Avogadro*, che afferma che *volumi uguali di gas diversi, alla stessa temperatura e pressione, contengono lo stesso numero di moli*:

$$V \propto n \quad \text{con } T \text{ e } P \text{ fissi} \quad (\text{IX.20})$$

Tutte queste relazioni portano ad affermare che:

$$\frac{PV}{nT} = \text{costante} \quad (\text{IX.21})$$

Questa costante chiamata *costante universale dei gas* R :

$$R = 8.31 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1} \quad (\text{IX.22})$$

Quindi si può scrivere l'*equazione di stato per un gas perfetto*:

$$PV = nRT \quad (\text{IX.23})$$

Questa è la cosiddetta "versione macroscopica" dell'equazione. Se, invece del numero di moli, vogliamo indicare il numero di particelle N , per trovarne una sua formulazione "microscopica":

$$n = N/N_A \quad (\text{IX.24})$$

e la (IX.23) può esser quindi riscritta come:

$$PV = \frac{N}{N_A}RT = Nk_B T \quad (\text{IX.25})$$

dove k_B è la *costante di Boltzmann*:

$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1} \quad (\text{IX.26})$$

Per i gas reali, vanno introdotti due termini correttivi per tenere conto che le particelle sono interagenti e le particelle occupano un volume finito (quindi non hanno tutto il volume del recipiente a disposizione). Questa equazione si chiama *equazione di van der Waals*:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = nRT \quad (\text{IX.27})$$

dove a (*costante di pressione interna*) e b (*covolume*) sono due costanti che dipendono dal gas e devono essere determinate sperimentalmente.

IX.2.2 Energia interna

L'*energia interna* U di un sistema è l'energia totale di tutte le molecole del sistema, ad eccezione dell'energia macroscopica traslazionale, rotazionale e potenziale che possiede l'intero sistema. L'energia interna quindi comprende tutto ciò che ha a che fare con l'energia delle particelle dovuta al loro movimento e l'interazione tra le molecole. Nel caso di un gas perfetto, questa energia è associata unicamente al movimento delle particelle:

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}mv_i^2 \quad (\text{IX.28})$$

Ciò può essere interpretata come una interpretazione microscopica della temperatura. Infatti le molecole del gas hanno un moto casuale e la temperatura è legata al valore medio dell'energia cinetica. Il *principio di equipartizione dell'energia* assegna la quantità $\frac{1}{2}k_B T$ ad ogni grado di libertà n_l del sistema nel determinare l'energia media di ogni molecola:

$$\langle E \rangle = n_l \left(\frac{1}{2}k_B T \right) \quad (\text{IX.29})$$

Nel caso di una molecola monoatomica i gradi di libertà sono 3, poiché la particella può solo traslare lungo tre direzioni. Nel caso di una molecola biatomica, questa può anche ruotare attorno due assi, quindi abbiamo due gradi di libertà aggiuntivi. Questi gradi di libertà divengono 6 nel caso di molecole poliatomiche:

$$\text{molecola monoatomica} \quad n_l = 3 \quad (\text{IX.30})$$

$$\text{molecola biatomica} \quad n_l = 5 \quad (\text{IX.31})$$

$$\text{molecola poliatomiche} \quad n_l = 6 \quad (\text{IX.32})$$

Si può dimostrare che l'energia interna di un gas perfetto è data da:

$$U = \frac{n_l}{2} nRT \quad (\text{IX.33})$$

L'energia intera di un gas perfetto dipende solo dalla temperatura espressa in gradi Kelvin, dal numero di moli e dal tipi di molecola. Fissando una certa quantità di un gas perfetto, quindi la sua energia interna può variare soltanto se viene variata la sua temperatura.

IX.3 Primo principio della Termodinamica

IX.3.1 Trasformazioni termodinamiche

In Sez. (IX.1.1) abbiamo introdotto il concetto di trasformazione: un sistema si trova inizialmente in una situazione di equilibrio descritta da una equazione di stato. Queste condizioni quindi vengono meno e il sistema inizia ad interagire con l'ambiente esterno e le sue variabili di stato mutano. Al termine della trasformazione il sistema si troverà infine in un'altra situazione di equilibrio. Il processo di trasformazione in modo quasi-statico è un caso limite, irraggiungibile in natura, durante il quale si può considerare che il sistema si evolva attraverso una successione di stati di equilibrio che differiscono tra loro per quantità infinitesime delle variabili termodinamiche. Questa idealizzazione risulta molto utile nei calcoli. In pratica, perché una trasformazione sia quasi statica è necessario che il sistema abbia una pressione e una temperatura che differisca di quantità infinitesime da quella dell'ambiente circostante. Il problema pratico è come realizzare una trasformazione quasi statica, perché ogni volta che poniamo il sistema a contatto con un termostato che differisce di una quantità finita di temperatura, lo scambio di calore avviene attraverso un processo incontrollato e quindi non quasi statico. Per realizzare una trasformazione quasi statica occorrerebbe disporre di un numero infinito di termostati che differiscono tra loro di quantità infinitesime.

Le trasformazioni si dicono *cicliche* se lo stato iniziale coincide col lo stato finale di una serie di trasformazioni. Una trasformazione può dirsi *reversibile* se è possibile eseguire una trasformazione che riporti il sistema allo stato iniziale, seguendo a ritroso la stessa sequenza di trasformazioni subita, e con le seguenti condizioni:

- le sorgenti di calore recuperano le quantità di calore scambiate in precedenza (in pratica, lo stesso Q cambiato di segno)
- i dispositivi esterni recuperano l'energia spesa lavorando all'inverso
- non avviene nessun altro processo

In sintesi, si può dire che una trasformazione è reversibile se si sviluppa in modo tale che, a trasformazione conclusa, il sistema stesso e l'ambiente esterno possono essere ricondotti alle situazioni iniziali rispettive, per semplice inversione del segno delle interazioni tra sistema ed ambiente e senza che avvengano altri cambiamenti nell'Universo. *Una trasformazione reversibile deve avvenire in modo quasi statico e non ci devono essere fenomeni dissipativi.* Nella realtà, ci sono sempre dei canali di irreversibilità:

- irreversibilità meccanica (attriti)

- irreversibilità termica (distribuzioni di temperatura non uniformi)
- irreversibilità chimica (reazioni spontanee)

Una trasformazione reversibile deve essere quasi statica, ma non vale il contrario. Gli stati e

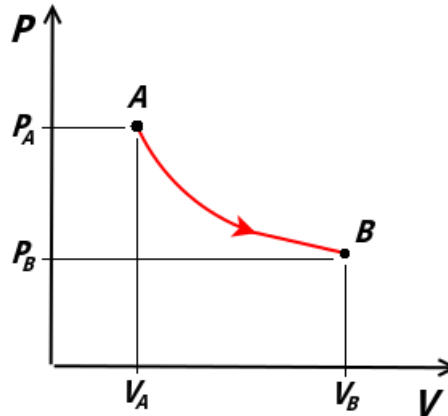


Figura IX.3: Una generica trasformazione reversibile sul diagramma di Claperyon.

le trasformazioni vengono descritti attraverso il *diagramma di Claperyon* (o *diagramma P-V*) (Fig. (IX.3)):

- sull'asse delle ascisse è indicato il volume V
- sull'asse delle ordinate è indicata la pressione P
- gli stati sono dei punti in questo diagramma
- le trasformazioni sono delle linee su questo grafico (per convenzione, linea continua per le reversibili, rumorosa per le irreversibili). Una freccia sulla linea indica il verso della trasformazione

Se il volume del sistema aumenta o diminuisce durante la trasformazione siamo in presenza rispettivamente di una espansione o di una compressione.

Prendiamo in considerazione un gas perfetto e descriviamo sul grafico alcune trasformazioni incontrate. Le trasformazioni isobare sono rappresentate da linee parallele all'asse delle ascisse (Fig. (IX.4)-a)). Le isocore sono linee parallele all'asse delle ordinate (Fig. (IX.4)-b)). Per quanto riguarda le isoterme, per un gas perfetto la relazione guida è l'equazione di stato del gas perfetto (IX.23); se T è costante, la forma della trasformazione è data da una iperbole equilatera (Fig. (IX.4)-c)) data dall'equazione $PV = costante$. Sulla isoterma si indica anche la temperatura alla quale è avvenuta la trasformazione.

IX.3.2 Lavoro nelle trasformazioni termodinamiche

In Sez. (IX.1.3) abbiamo visto che il calore è una forma di energia che viene scambiata tra un sistema e l'ambiente esterno per via di una differenza di temperatura. In termodinamica il

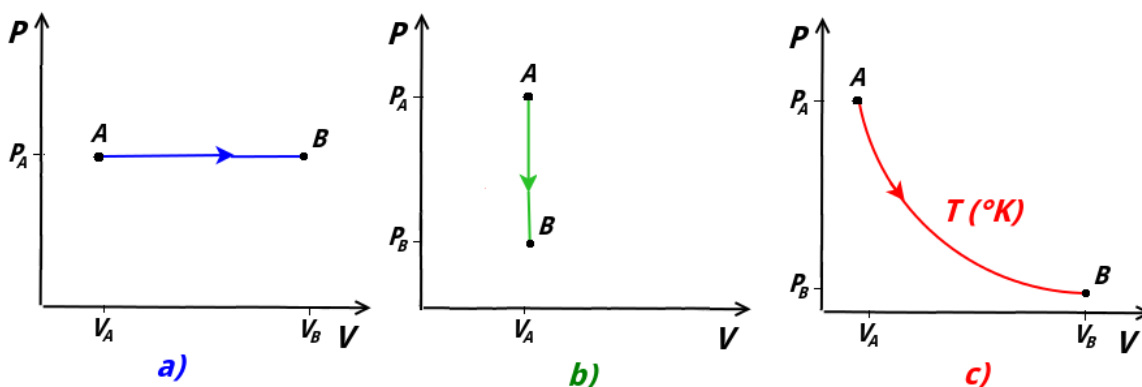


Figura IX.4: Esempi di particolari trasformazioni sul diagramma P-V di Claperyon: a) isobara, b) isocora, c) isoterma

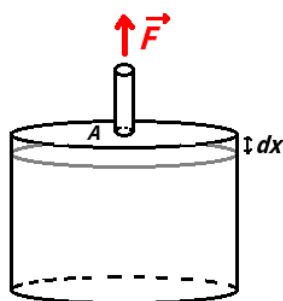


Figura IX.5: Esempi di calcolo del lavoro in trasformazioni generiche: a) espansione, b) compressione, c) espansione-compressione

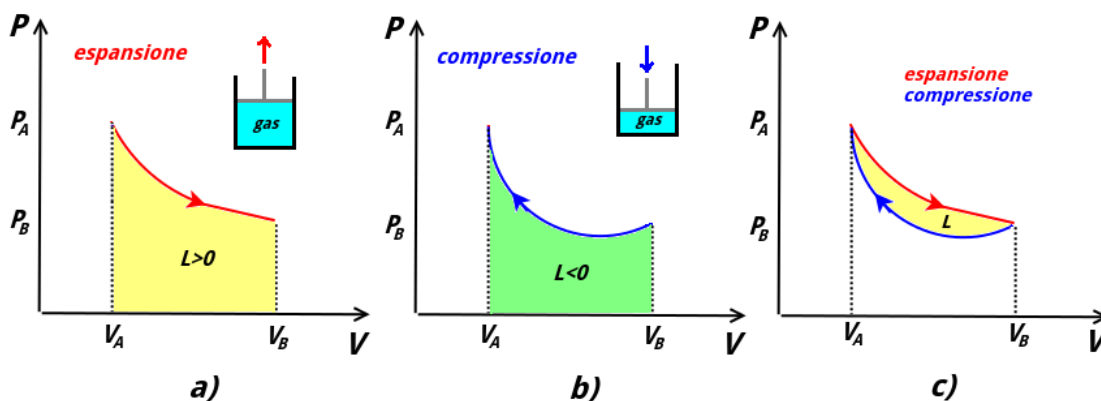


Figura IX.6: Esempi di calcolo del lavoro in trasformazioni generiche: a) espansione, b) compressione, c) espansione-compressione

lavoro è invece un'energia scambiata tra il sistema e l'ambiente attraverso processi indipendenti da una differenza di temperatura. Questi possono essere processi meccanici oppure anche prodotti dal lavoro di forze elettriche e magnetiche. Qui noi ci occuperemo del primo caso. Dato che il lavoro è dato dal prodotto scalare di una forza per uno spostamento, ciò chiama in causa questo tipo di interazione tra il sistema e l'ambiente. Se pensiamo ad un gas all'interno

di un pistone durante un processo di espansione, il gas eserciterà una forza sul pistone e avverrà uno spostamento. In questo caso si dice che il pistone sta facendo un lavoro positivo sull'ambiente ($L > 0$). In caso di compressione, l'ambiente esercita una forza sul pistone che induce l'abbassamento del pistone e il lavoro è in questo caso negativo ($L < 0$).

Assumiamo che il sistema si evolva attraverso una trasformazione quasi statica e consideriamo una variazione infinitesima dV nell'espansione di un gas, con il pistone mobile che si muove di una quantità dx (Fig. (IX.5)). Durante l'espansione il pistone esercita una pressione P sul pistone di sezione A . Questa pressione viene considerata costante durante questa trasformazione infinitesima, ma non necessariamente dovrà esserlo durante tutto il processo. Sapendo che il modulo della forza è:

$$F = PA \quad (\text{IX.34})$$

moltiplicando per lo spostamento^[7] entrambi i membri della (IX.34) si trova:

$$Fdx = PA dx \quad (\text{IX.35})$$

$$\partial L = PdV \quad (\text{IX.36})$$

Sommando tutti i contributi durante una espansione tra un volume iniziale V_A ad uno finale V_B (con $V_A < V_B$):

$$L = \int_{V_A}^{V_B} PdV > 0 \quad (\text{IX.37})$$

Il lavoro positivo è dato dall'area sottesa dalla curva sul diagramma P-V (Fig. (IX.6)-a)).

Possiamo fare il solito ragionamento nel caso della compressione, trovando (sempre con $V_A < V_B$):

$$L = \int_{V_B}^{V_A} PdV < 0 \quad (\text{IX.38})$$

Il lavoro è quindi l'area sottesa dalla curva cambiata di segno (Fig. (IX.6)-b)). Se si combina una espansione con una compressione, bisogna fare la differenza tra gli integrali e il lavoro complessivo è data dalla differenza tra le aree sottese tra le due curve. Nel caso generico in Fig. (IX.6)-c), il lavoro complessivo è in questo caso positivo.

I casi più semplice da calcolare sono quelli della trasformazione isocora e isobara. Nel primo caso, dato che non c'è variazione di volume, il lavoro deve essere nullo:

$$\text{trasformazione isocora} \quad L = 0 \quad (\text{IX.39})$$

Le secondo caso, essendo la pressione costante, abbiamo che il volume è semplicemente dato dall'area rettangolare sottesa dal segmento parallelo all'asse delle ascisse che rappresenta la trasformazione. Quindi in una trasformazione isobara a pressione P da un volume V_A ad un volume V_B , il lavoro è:

$$\text{trasformazione isobara} \quad L = P(V_B - V_A) \quad (\text{IX.40})$$

^[7]La forza, essendo di pressione, è normale alla superficie del pistone e quindi lo spostamento è parallelo alla forza.

Nel caso di una trasformazione isoterma, consideriamo il caso del gas perfetto e la sua equazione di stato (IX.23). Sia la pressione che il volume cambiano durante la trasformazione, ma, se la trasformazione è quasi statica, per ogni variazione infinitesima di queste quantità si può considerare il gas in una situazione di equilibrio. Quindi, dato che una situazione di equilibrio è descritta da una equazione di stato, possiamo usare la (IX.23) per sapere come variano P e V in ogni punto. Consideriamo una espansione isoterma da un volume V_A ad uno V_B ad una temperatura T : il lavoro sarà dato dalla (IX.37):

$$L = \int_{V_A}^{V_B} P dV \quad (\text{IX.41})$$

Ricaviamo la pressione P dalla (IX.23):

$$P = \frac{nRT}{V} \quad (\text{IX.42})$$

e sostituiamolo nella (IX.41):

$$L = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} dV \quad (\text{IX.43})$$

La quantità nRT è costante durante la trasformazione e quindi può essere portata fuori dall'integrale ^[8]:

$$L = nRT \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) \quad (\text{IX.44})$$

quindi, il lavoro per una trasformazione isoterma per un gas perfetto:

$$\text{trasformazione isoterma} \quad L = nRT \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (\text{IX.45})$$

Dalla (IX.45), usando sempre l'equazione di stato dei gas perfetti per sostituire i volumi:

$$\text{trasformazione isoterma} \quad L = nRT \ln \frac{P_A}{P_B} \quad (\text{IX.46})$$

IX.3.3 Definizione di Primo principio della termodinamica

Il *primo principio della termodinamica* afferma che *in una trasformazione in cui una quantità di calore Q fornita al sistema e un lavoro L viene compiuto dal sistema, l'energia totale*

^[8]Formalmente non è corretto, per la formula che seguirà, scrivere il passaggio intermedio:

$$L = nRT \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = \cancel{nRT (\ln V_B - \ln V_A)}$$

Poiché l'argomento del logaritmo, essendo questo una funzione trascendente (vedere Sez. (I.1.3)), deve essere adimensionale. Quindi, a rigore bisogna introdurre un volume unitario V_0 per rendere l'argomento adimensionale:

$$L = nRT \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT \left(\ln \frac{V_B}{V_0} - \ln \frac{V_A}{V_0} \right)$$

Questo volume poi si cancellerà applicando la proprietà della somma dei logaritmi.

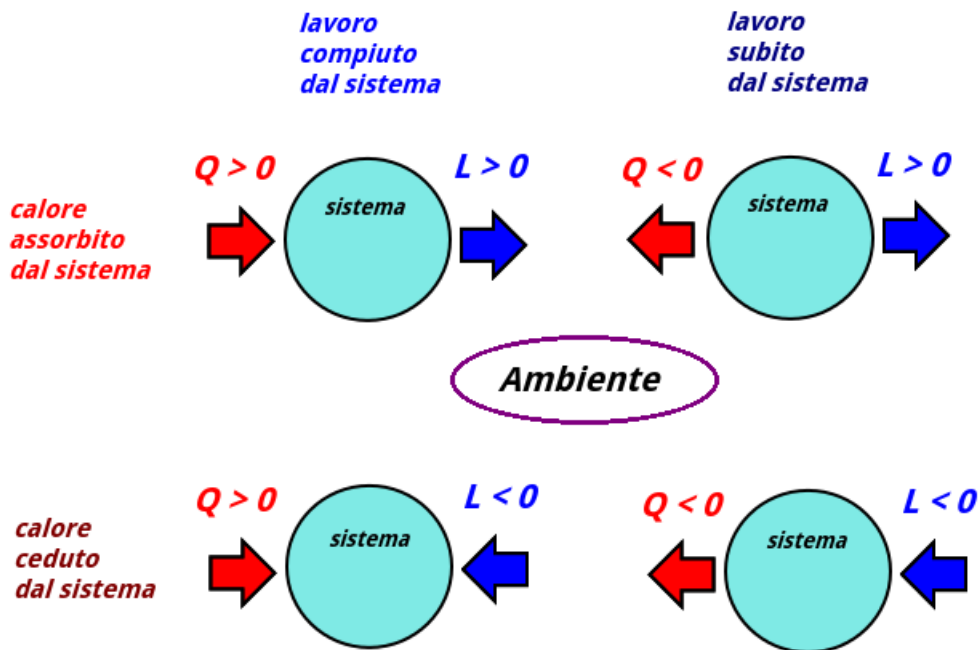


Figura IX.7: I possibili casi che si possono avere durante le trasformazioni, in base alle possibili interazioni del sistema con l'ambiente esterno. Le frecce indicano il senso dei trasferimenti di energia. Il lavoro è positivo se fatto dal sistema sull'ambiente e negativo se fatto dall'ambiente sul sistema. Il calore è definito positivo se ceduto dall'ambiente al sistema e negativo se ceduto dal sistema all'ambiente.

trasferita al sistema è pari alla variazione ΔU dell'energia interna del sistema stesso.:

$$\Delta U = Q - L \quad (\text{IX.47})$$

Riassumiamo la convenzione dei segni ^[9]:

- $Q > 0$, se il sistema assorbe calore dall'ambiente
- $Q < 0$, se il sistema cede calore all'ambiente
- $L > 0$, se il sistema compie lavoro sull'ambiente
- $L < 0$, se l'ambiente compie lavoro per il sistema

Il primo principio descritto dalla (IX.47) può essere riscritto sotto forma di infinitesimi:

$$dU = \partial Q - \partial L \quad (\text{IX.49})$$

^[9]Questa convenzione sui segni è la più diffusa, anche perché, considerando delle macchine termiche, considerare come lavoro positivo quello fatto dalla macchina sull'ambiente. La convenzione sui segni alternativa (che porta agli stessi risultati) prevede che il lavoro sia positivo quando è l'ambiente a compiere lavoro sul sistema. Seguendo questa scelta però l'equazione del primo principio deve essere riscritta come:

$$\Delta U = Q + L \quad (\text{IX.48})$$

Il primo principio esprime la conservazione dell'energia^[10] e introduce nuovamente il concetto di energia interna. Nel capitolo Sez. (IX.2.2) abbiamo visto che l'energia interna di un gas perfetto, noto il tipo di gas e la sua quantità, dipende solo dalla temperatura. In Fig. (IX.7) sono ricapitolati i segni di Q e L nei 4 casi possibili.

Risulta istruttivo anche riscrivere la (IX.47) nel seguente modo:

$$Q = \Delta U + L \quad (\text{IX.50})$$

Se consideriamo infatti il sistema come una *macchina termica*, ci aspettiamo di ricavare un lavoro meccanico da essa una volta fornita ad essa energia sotto forma di calore, ad esempio tramite la combustione di un carburante. Attraverso una trasformazione termodinamica, la IX.50 ci dice che, in generale, parte dell'energia che forniamo al sistema va in un aumento dell'energia interna del gas e in parte viene usata per compiere un lavoro meccanico (ad esempio, un innalzamento di un pistone). Un discorso analogo può essere fatto che invece sottraiamo calore al sistema.

A differenza del calore e del lavoro, *l'energia interna è una funzione di stato*. La funzione di stato descrive uno stato di un sistema e la sua variazione dipende solo dallo stato iniziale e il suo stato finale e non dalla serie di trasformazioni che si sono succedute nel passaggio. Qualunque trasformazione che porti il sistema da uno stato A ad uno stato B determinerà una variazione di energia interna $\Delta U = U_B - U_A$.

IX.3.4 Trasformazione isoterma

In una trasformazione isoterma, il sistema scambia calore con una sorgente (detta *termostato*) la cui temperatura non cambia se le viene sottratto calore. Il sistema e la sorgente si trovano alla stessa temperatura durante tutta la trasformazione e il calore scambiato viene utilizzato per compensare il lavoro meccanico compiuto o subito dal sistema per mantenere la temperatura (e quindi l'energia interna) costante. La (IX.47) diventa:

$$\text{trasformazione isoterma} \quad Q = L \quad (\text{IX.51})$$

In una isoterma la quantità di calore assorbita è uguale al lavoro fatto dal sistema (oppure la quantità di calore ceduta è uguale al lavoro fatto dal ambiente sul sistema). Dato che la temperatura è costante, l'equazione di stato dei gas perfetti durante la trasformazione implica che la pressione e il volume del gas sono legati dalla legge di Boyle ((IX.17)):

$$PV = \text{costante} \quad (\text{IX.52})$$

IX.3.5 Trasformazione isocora

Consideriamo una trasformazione isocora per un gas perfetto. Il lavoro compiuto dal gas in questo caso è nullo e la (IX.47) diventa:

$$\text{trasformazione isocora} \quad \Delta U = Q \quad (\text{IX.53})$$

^[10]Un sistema come "il moto perpetuo" che violasse il primo principio della termodinamica, creando quindi energia dal nulla, violerebbe anche il principio di conservazione dell'energia.

Il calore fornito o sottratto al sistema comporta una variazione di energia interna. Possiamo quindi usare la (IX.14) con la (IX.47):

$$Q = nC_v\Delta T \quad (\text{IX.54})$$

dove C_v è il calore specifico molare a volume costante. Quindi:

$$\Delta U = nC_v\Delta T \quad (\text{IX.55})$$

Risulta molto importante osservare che la (IX.55), *dato che U è una funzione di stato e la sua variazione non dipende dal tipo di trasformazione che l'ha prodotta, è una formula di validità generale e si può usare ogni volta che abbiamo una variazione di energia interna ΔU* . A parità di stato iniziale e stato finale, si può usare la (IX.55) ogni volta che abbiamo una data variazione ΔT di temperatura, dato che questa è l'unico parametro da cui dipende l'energia interna in un gas perfetto.

IX.3.6 Trasformazione isobara

Nella trasformazione isobara per un gas perfetto possiamo scrivere la quantità di calore scambiata usando la (IX.13) con il calore specifico molare:

$$Q = nC_p\Delta T \quad (\text{IX.56})$$

Una funzione di stato utile nel caso di trasformazioni isobare è l'*entalpia* H , definita come:

$$H = U + PV \quad (\text{IX.57})$$

Nelle trasformazioni isobare:

$$Q = \Delta H \quad (\text{IX.58})$$

L'entalpia è di grande importanza nei processi industriali, ove la maggior parte delle trasformazioni termodinamiche avviene a pressione costante (in generale, uguale a quella atmosferica); in questi casi infatti il calore scambiato può essere dedotto dalla conoscenza di una funzione di stato. La sua analoga nella trasformazione isocora è la (IX.53), nella quale il calore è uguale alla variazione della funzione di stato U .

IX.3.7 Relazione di Mayer

Per la variazione di energia interna si può usare la (IX.55). Il lavoro è dato dalla (IX.40) in cui si può sostituire legge dei gas perfetti (IX.23):

$$L = P\Delta V = P\left(\frac{nR\Delta T}{P}\right) = nR\Delta T \quad (\text{IX.59})$$

Il primo principio si riscrive quindi come:

$$\underbrace{nC_v\Delta T}_{\Delta U} = \underbrace{nC_p\Delta T}_Q - \underbrace{nR\Delta T}_L \quad (\text{IX.60})$$

semplificando questa equazione si ottiene la *relazione di Mayer* che legano tra loro i calori specifici molari attraverso la costante universale dei gas:

$$C_P = C_V + R \quad (\text{IX.61})$$

Considerando ancora una trasformazione isocora, questa volta in forma differenziale:

$$dU = \partial Q \quad (\text{IX.62})$$

$$dU = nC_V dT \quad (\text{IX.63})$$

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} \quad (\text{IX.64})$$

Per un gas perfetti i valori di C_V (e quindi di C_P) possono essere trovati attraverso l'espressione dell'energia interna U :

$$U = \frac{n_l}{2} nRT \quad (\text{IX.65})$$

Sostituendo la (IX.65) nella (IX.64) si ottiene l'espressione di C_V in termini di R :

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{d(n_l/2nRT)}{dT} = \frac{n_l}{2} R \quad (\text{IX.66})$$

Ad esempio, per un gas perfetto monoatomico, quindi con tre gradi di libertà ($n_l = 3$), dalla (IX.66) e dalla (IX.68) si trova:

$$C_V = \frac{3}{2} R \quad (\text{IX.67})$$

$$C_P = \frac{5}{2} R \quad (\text{IX.68})$$

IX.3.8 Trasformazione adiabatica

In una trasformazione adiabatica non c'è scambio di calore con l'ambiente e quindi il primo principio diventa:

$$\Delta U = -L \quad (\text{IX.69})$$

Un lavoro positivo porta ad una diminuzione della temperatura del gas, uno negativo ad un suo aumento. Utilizzando il primo principio in forma differenziale (IX.47) e la legge dei gas perfetti (IX.23) al posto della pressione P :

$$dU = -\partial L = -PdV = -nRT \frac{dV}{V} \quad (\text{IX.70})$$

utilizzando anche la (IX.64) per dU :

$$nC_V dT = -nRT \frac{dV}{V} \quad (\text{IX.71})$$

riarrangiando:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} \quad (\text{IX.72})$$

si integra entrambi i membri considerando che si va da uno stato A ad uno stato B con differenti temperatura e volume:

$$\int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = -\int_{V_A}^{V_B} \frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} \quad (\text{IX.73})$$

da cui:

$$\ln \frac{T_B}{T_A} = -\frac{R}{C_V} \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (\text{IX.74})$$

usando una proprietà dei logaritmi per il secondo membro:

$$\ln \frac{T_B}{T_A} = \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{-\frac{R}{C_V}} \quad (\text{IX.75})$$

Dato che il logaritmo è una funzione monotona crescente, il valore dei due logaritmi è uguale quando i loro argomenti sono uguali:

$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{-\frac{R}{C_V}} \quad (\text{IX.76})$$

Attraverso la relazione di Mayer ((IX.68)) l'esponente a secondo membro può essere scritto come:

$$\frac{R}{C_V} = \underbrace{\frac{C_P}{C_V}}_{\gamma} - 1 = \gamma - 1 \quad (\text{IX.77})$$

dove γ è il rapporto tra il calore specifico a pressione costante e il calore specifico a volume costante. La relazione (IX.76) può essere riscritta come (*equazione di Poisson*):

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante} \quad (\text{IX.78})$$

usando l'equazione di stato dei gas perfetti si possono trovare altre due equazioni equivalenti che includono la pressione P invece di V o di T

$$\frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} = \text{costante} \quad (\text{IX.79})$$

$$PV^\gamma = \text{costante} \quad (\text{IX.80})$$

La (IX.78), (IX.79) e (IX.80) descrivono come variano le variabili di stato durante una trasformazione adiabatica. In particolare la (IX.80), disegnata sul diagramma P-V, mostra come che le curve relative alle trasformazioni adiabatiche sono più ripide delle isoterme, dato che γ è sempre maggiore di 1 (la forma matematica della legge di Boyle (IX.52) $PV = \text{costante}$ avrebbe un γ uguale a 1) e la pressione decresce più rapidamente all'aumentare del volume^[11]. In Tab. (??) sono indicati i valori dei calori specifici molari e i γ per diversi gas perfetti.

^[11]Le trasformazioni i cui stadi intermedi (e finali) sono descritte da una relazione del tipo PV^α si chiamano *trasformazioni politropiche*. L'isoterma è una politropica con $\alpha = 1$. Per le adiabatiche, $\alpha = \gamma$

gas perfetto	n_l	C_V/R	C_P/R	$\gamma = C_P/C_V$
monoatomico	3	3/2	5/2	5/3
biatomico	5	5/2	7/2	7/5
poliatomico	6	3	4	4/3

IX.3.9 Espansione libera



Figura IX.8: In a) un gas è racchiuso in una camera di un contenitore dalle pareti adiabatiche. Una parete e una valvola impediscono al gas di occupare l'altra camera. In b) la valvola viene aperta e il gas si espande nella camera vuota.

Consideriamo la situazione in Fig. (IX.18): un gas è inizialmente racchiuso in una camera di volume V_i di un contenitore dalle pareti adiabatiche. Quindi con l'esterno non può essere né scambiato lavoro (le pareti che separano il sistema dall'ambiente esterno sono rigide) che calore. Una parete e una valvola impediscono al gas di occupare l'altra camera. In un certo istante la valvola viene aperta e il gas si espande nella camera vuota. Per un gas perfetto nil primo principio indica che non ci sono variazioni di energia interna durante il processo e quindi il gas ha la stessa temperatura quando occupa tutto il volume V_f :

$$U(V_i, T) = U(V_f, T) \quad (\text{IX.81})$$

IX.4 Secondo principio della Termodinamica

IX.4.1 Macchina termica

In una trasformazione ciclica il sistema, dopo una serie di trasformazioni, ritorna al suo stato iniziale. Dato che la variazione di energia interna dipende solo dallo stadio iniziale e da quello finale:

$$\Delta U = 0 \quad (\text{IX.82})$$

$$L = Q \quad (\text{IX.83})$$

Il lavoro totale prodotto durante una trasformazione ciclica è uguale al calore totale assorbito dal sistema. Un dispositivo che opera in questo modo producendo un lavoro utile all'esterno è una *macchina termica*. Se il ciclo invece è tale da assorbire un lavoro fatto dall'esterno per estrarre calore da una sorgente fredda e cederlo ad una più calda, si chiama *macchina frigorifera*.

In Fig. (IX.9) sono rappresentati gli schemi di una macchina termica e una macchina frigorifera che operano tra due sorgenti a temperatura ($T_c > T_f$). La freccia sul sistema sta indicare il lavoro svolto in modo ciclico. Come si vede dagli schemi parte del calore assorbito dal serbatoio caldo, nel caso della macchina termica, e parte del lavoro fatto sul sistema, nel caso della

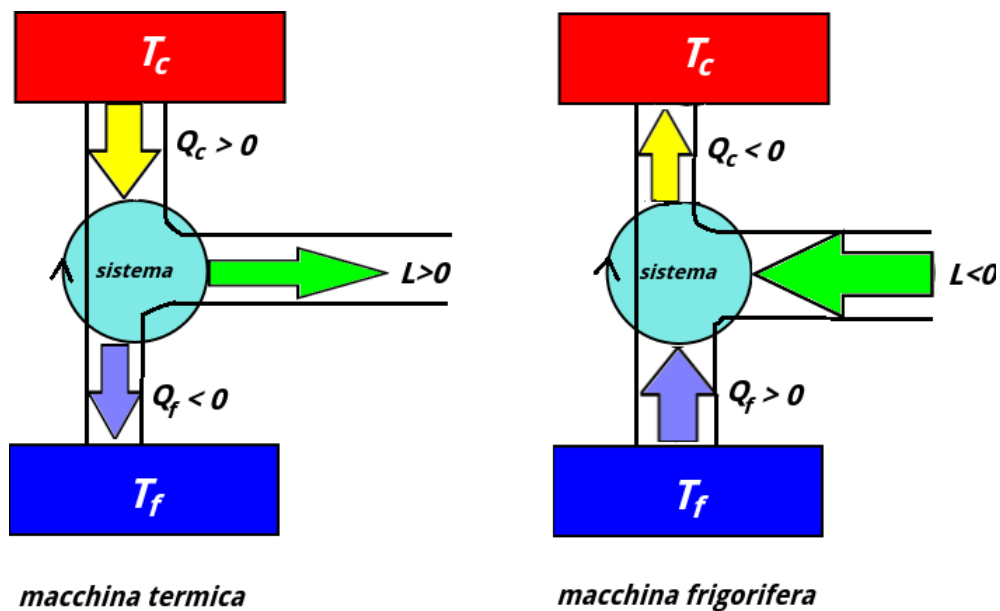


Figura IX.9: Schema di funzionamento di una macchina termica (a sinistra) e di una macchina frigorifera (a destra).

macchina frigorifera, viene “sprecato” come calore fornito ad un’altra sorgente. Per chiarire come mai un macchina termica debba lavorare attraverso dei cicli e con due sorgenti con cui scambiare calore sarà chiarito dal secondo principio della termodinamica.

IX.4.2 Definizione di secondo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica stabilisce in pratica che le trasformazioni termodinamiche non siano in contrasto con la conservazione dell’energia. Tuttavia, è importante notare che sperimentalmente molti processi che in linea di principio sarebbero compatibili con il primo principio non avvengono oppure sono estremamente improbabili. Se, ad esempio, pensiamo ad un corpo in movimento che viene arrestato per via dell’attrito, in linea di principio, la conservazione dell’energia sarebbe soddisfatta se avvenisse il processo inverso e l’energia trasformata in calore venisse riconvertita in energia cinetica. Un altro esempio è quello dell’espansione libera del gas visto in Sez. (IX.3.9): in linea di principio la conservazione dell’energia sarebbe soddisfatta se il gas ritornasse tutto nella sua camera originaria. Quando due sistemi sono a contatto termico, il calore fluisce spontaneamente dal più freddo al più caldo. Come mai vi è una sola direzione spontanea nel flusso di energia?

Le ragioni che stanno dietro al fatto che questi processi non si osservano in Natura chiamano in causa il secondo principio della termodinamica, del quale ne esistono più enunciati equivalenti.

Enunciato di Kelvin-Planck

Immaginiamo una macchina che compie una trasformazione reversibile compiendo lavoro a spese di una sorgente a una temperatura fissata (*dispositivo monoterme*). Poniamo in contatto

un sistema, composto da un gas entro un pistone mobile, con questo termostato. Sopra il pistone sono presenti dei pesetti che possono essere rimossi. Rimuovendo i pesetti, il sistema si espande isotermicamente, compiendo lavoro positivo. Il calore assorbito dal sistema, in virtù del primo principio, verrà completamente tradotto in lavoro. Tuttavia, una macchina del genere può compiere lavoro fino a che ci sono dei pesetti da togliere e, quando questi saranno stati tolti, bisogna ripristinare la condizione iniziale, ricomprimendo il pistone. Durante questo processo il sistema cederà calore alla sorgente utilizzando il lavoro negativo fatto dall'ambiente. Il lavoro totale sarebbe quindi nullo e una macchina del genere sarebbe inutile. Nel caso reale, le trasformazioni non sono reversibili e quindi si avrebbe che $Q = L < 0$.

L'enunciato di Kelvin-Planck del secondo principio della termodinamica afferma che è impossibile realizzare una trasformazione che abbia come unico risultato quello di convertire completamente in lavoro il calore prelevato da un'unica sorgente.^[12]

Per un processo ciclico monoterme, non essendo possibile assorbire calore e produrre lavoro senza violare il secondo principio, devono avere le disuguaglianze:

$$L \leq 0 \quad Q \leq 0 \quad (\text{IX.84})$$

Quindi un sistema monoterme reversibile L e Q sono nulli in un ciclo. Il principio può essere anche enunciato come segue: è impossibile costruire una macchina ciclica che compia lavoro a spese di un'unica sorgente.

Il dispositivo più semplice di macchina termica è quello in Fig. (IX.9): in ciascun ciclo la macchina assorbe un calore Q_c dal serbatoio caldo e cede Q_f a quello freddo. In questo ciclo il lavoro (>0) è:

$$L = Q_c + Q_f = Q_c - |Q_f| \quad (\text{IX.85})$$

Il valore assoluto per Q_f è di utilità per via delle convenzioni sui segni ($Q_f < 0$). Si definisce il rendimento di una macchina termica il rapporto tra il lavoro e il calore assorbito:

$$\eta = \frac{L}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{|Q_f|}{Q_c} < 1 \quad (\text{IX.86})$$

Un rendimento pari a 1 (il 100%), sarebbe possibile solo se $Q_f = 0$, in contrasto con secondo principio.

Enunciato di Clausius

L'enunciato di Clausius del secondo principio della termodinamica afferma che è impossibile realizzare una qualsiasi trasformazione il cui unico risultato sia quello di far passare calore da una sorgente più fredda ad una più calda.

In pratica, afferma che una macchina frigorifera può funzionare solo se si fornisce lavoro dall'esterno (Fig. (IX.9), a destra). Nel caso della macchina frigorifera si introduce il coefficiente di prestazione K_F come il rapporto tra il calore rimosso dalla sorgente fredda e il lavoro

^[12]Tale principio non vieta la conversione completa di calore in lavoro nella trasformazione isoterma prima discussa, dato che tale conversione non rappresenta l'unico risultato, perché il sistema nel frattempo cambia il suo stato.

speso sul sistema:

$$K_F = \frac{|Q_f|}{|L|} \quad (\text{IX.87})$$

I valori assoluti sono presenti per via della convenzione sui segni. Un coefficiente di prestazione infinito comporterebbe $L = 0$, in contrasto con il secondo principio della termodinamica.

Uguaglianza dei due enunciati

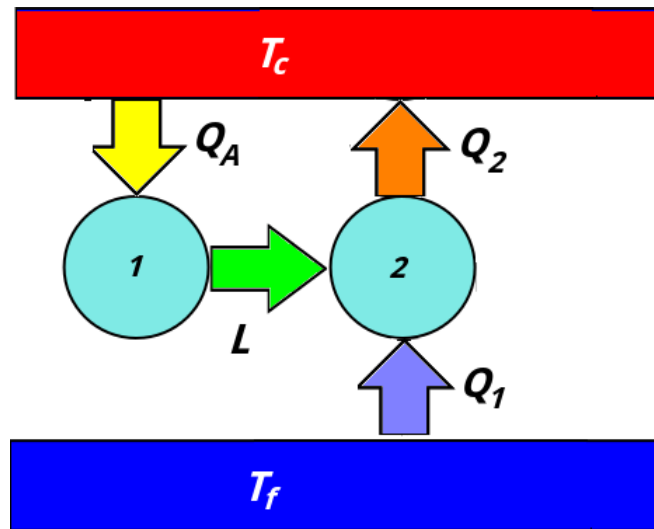


Figura IX.10: Dimostrazione del secondo principio della termodinamica.

Gli enunciati di Kelvin-Planck e di Clausius, anche se si riferiscono a macchine diverse, sono profondamente connessi. Con riferimento alla Fig. (IX.10) che si possa violare l'enunciato di Kelvin-Planck e compiere lavoro a spese di un'unica sorgente a temperatura T_c , assorbendo un calore Q_A e compiendo un lavoro L . Utilizziamo questo lavoro per far funzionare una macchina frigorifera, che preleva Q_1 da una sorgente fredda T_f e cede Q_2 a quella calda T_c . Il lavoro L diventa per la seconda macchina un lavoro $-L$. Il bilancio della seconda macchina è:

$$Q_1 + Q_2 = -L \quad (\text{IX.88})$$

La macchina complessiva, costituita dall'insieme delle due macchine, assorbe Q_1 da T_f e scambia con T_c un calore totale pari a:

$$\underbrace{Q_A}_L + Q_2 = L + Q_2 = -Q_1 \quad (\text{IX.89})$$

Quindi, in valore assoluto, il calore assorbito dalla macchina è nullo e quindi anche il lavoro. Si osserverebbe quindi un passaggio spontaneo di calore da una sorgente fredda ad una più calda, violando l'enunciato di Clausius.

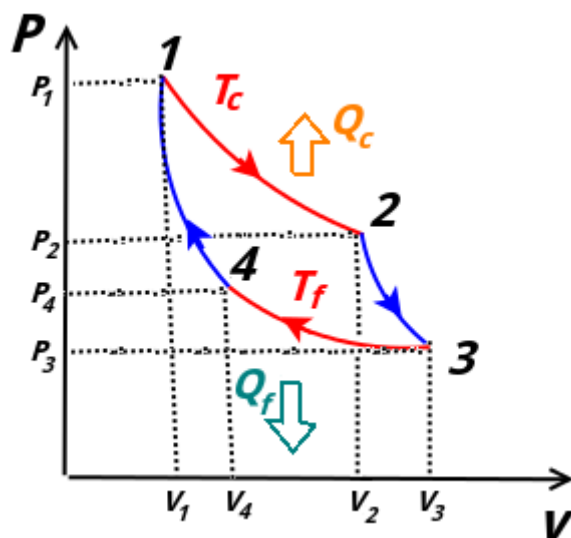


Figura IX.11: Schema di una macchina di Carnot.

IX.4.3 La macchina di Carnot

La *macchina di Carnot* è una macchina ideale produce ciclicamente lavoro scambiando calore tra due sorgenti a temperatura T_c e T_f . Le trasformazioni (tutte reversibili), rappresentate in Fig. (IX.11), sono:

- 1 → 2 espansione isoterma alla temperatura T_c
- 2 → 3 espansione adiabatica
- 3 → 4 compressione isoterma alla temperatura T_f
- 4 → 1 compressione adiabatica

Per l'espansione isoterma 1 → 2 il primo principio dice che (usando la (IX.45)):

$$\Delta U = 0 \quad Q_c = L_{12} = nRT_c \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) > 0 \quad (\text{IX.90})$$

Il sistema assorbe quindi calore dalla sorgente calda e compie lavoro positivo.

Per la compressione isoterma da C → D abbiamo che il sistema cede calore alla sorgente fredda T_f e l'ambiente compie lavoro sul sistema:

$$\Delta U = 0 \quad Q_f = L_{34} = nRT_f \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) < 0 \quad (\text{IX.91})$$

Quindi $|Q_f| = nRT_f \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)$. Dividendolo per Q_c :

$$\frac{|Q_f|}{Q_c} = \frac{nRT_f \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)}{nRT_c \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \quad (\text{IX.92})$$

Si può dimostrare che questo rapporto è indipendente dai rapporti tra i volumi utilizzando le relazioni tra le variabili V e T nelle adiabatiche:

$$T_f V_3^{\gamma-1} = T_c V_2^{\gamma-1} \quad (\text{IX.93})$$

$$T_f V_4^{\gamma-1} = T_c V_1^{\gamma-1} \quad (\text{IX.94})$$

Dividendo la seconda delle IX.94 a membro a membro per la prima si ottiene:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} \quad (\text{IX.95})$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad (\text{IX.96})$$

che, sostituita al denominatore della IX.92:

$$\frac{|Q_f|}{Q_c} = \frac{T_f}{T_c} \quad (\text{IX.97})$$

Quindi, il rendimento del ciclo di Carnot, descritto per un gas perfetto qualsiasi, dipende solo dalle temperature delle sorgenti con cui scambia calore. L'espressione del rendimento è:

$$\eta_c = 1 - \frac{|Q_f|}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c} \quad (\text{IX.98})$$

Essendo un ciclo reversibile, funzionando a ritroso si comporta come macchina frigorifera e il suo coefficiente di prestazione è:

$$K_f = \frac{T_f}{T_c - T_f} \quad (\text{IX.99})$$

Il *teorema di Carnot* afferma che *il rendimento (e coefficiente di prestazioni) della macchina di Carnot è sempre minore o uguale per ogni macchina operante tra le due sorgenti T_c e T_f . Il segno uguale è valido se la macchina considerata è anch'essa reversibile.* Il teorema di Carnot pone un limite invalicabile alle prestazioni di una macchina reale che operi tra due sorgenti ad una determinata temperatura. Per avere un rendimento del 100% bisognerebbe avere una macchina reversibile e una temperatura $T_f = 0$ oppure una $T_c \rightarrow \infty$. In altre macchine reversibili ideali che operano con cicli diversi (se veda il ciclo di Stirling, Otto e Diesel negli esercizi), il rendimento è minore di quello della macchina di Carnot perché scambiano calore in tutti e quattro i tempi e perché compaiono anche altre sorgenti oltre a quelle a temperatura massima e minima. Nelle relative macchine reali irreversibili, il rendimento diventa più basso.

IX.4.4 Entropia

Dalla (IX.86) e (IX.98), si trova che per una macchina reversibile:

$$\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} = 0 \quad (\text{IX.100})$$

Se una *macchina reversibile compie un ciclo scambiando calore con sorgenti che differiscono per temperature infinitesime*, si ottiene come risultato il *teorema di Calusius*:

$$\sum_1 \left(\frac{Q_i}{T_i} = 0 \right) = 0 \rightarrow \oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad (\text{IX.101})$$

Nel caso in cui *il ciclo sia irreversibile*:

$$\sum_1 \left(\frac{Q_i}{T_i} = 0 \right) = 0 \rightarrow \oint \frac{\partial Q}{T} = 0 \quad (\text{IX.102})$$

Quindi il valore dell'integrale:

$$\int_A^B \left(\frac{\partial Q}{T} \right)_{rev} \quad (\text{IX.103})$$

esteso su qualunque trasformazione reversibile che connette due stati è sempre lo stesso e non dipende dalla trasformazione. L'integrale IX.103 può essere quindi uguale ad una variazione di una funzione di stato chiamata *entropia*:

$$\Delta S = S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{\partial Q}{T} \right)_{rev} \quad (\text{IX.104})$$

Il valore dell'entropia di uno stato A è sempre definita a meno di una costante additiva arbitraria di riferimento S_0 :

$$S_A - S_0 = \int_0^A \left(\frac{\partial Q}{T} \right)_{rev} \quad (\text{IX.105})$$

Il calcolo della variazione di entropia può essere fatto soltanto attraverso trasformazioni reversibili; tuttavia, essendo una funzione di stato e quindi con valori che dipendono solo dagli stadi di partenza e di arrivo, per il calcolo basta trovare delle trasformazioni irreversibili che connettono i due stadi. L'entropia è sempre additiva, quindi se abbiamo due sistemi con variazione di entropia, la variazione totale è data dalla somma.

La variazione di entropia può essere descritta da dei diagrammi T-S: in ascisse c'è l'entropia S e in ordinata la temperatura T . In analogia con il lavoro nei diagrammi P-V, l'area sottesa dalla curva dà il calore scambiato dal sistema. In Fig. (IX.12) ci sono tre casi; nell'ultimo si vede anche che in una trasformazione ciclica reversibile l'entropia ritorna al valore di partenza ($\Delta S = 0$) e l'area colorata è anche uguale, per la (IX.83), al lavoro svolto durante il ciclo. Consideriamo ora il calcolo dell'entropia su diverse trasformazioni reversibili per un gas perfetto.

Trasformazione adiabatica

In una trasformazione adiabatica reversibile non c'è scambio di calore; quindi tale trasformazione è *isoentropica*, cioè non c'è variazione di entropia. Nel diagramma T-S si tratta semplicemente di un segmento parallelo all'asse delle ordinate.

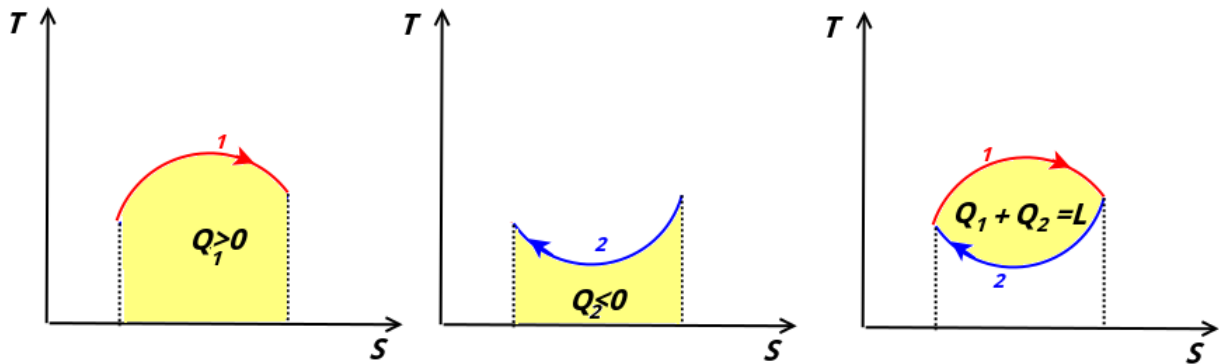


Figura IX.12: Trasformazioni reversibili generiche in un diagramma T-S.

Trasformazione isoterma

Nella trasformazione isoterma reversibile da $a \rightarrow B$, la temperatura si mantiene costante:

$$\partial Q = \partial L \quad (\text{IX.106})$$

$$\partial L = PdV = nRT \frac{dV}{V} \quad (\text{IX.107})$$

$$\Delta S = \int_A^B \frac{\partial Q}{T} = \int_A^B nR \frac{dV}{V} = nR \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (\text{IX.108})$$

oppure, sempre usando la legge dei gas perfetti e sostituendo i volumi con le pressioni:

$$\Delta S = nR \ln \frac{P_A}{P_B} \quad (\text{IX.109})$$

L'entropia aumenta se c'è espansione (o la pressione diminuisce), l'entropia diminuisce se c'è compressione (o la pressione aumenta). Nel diagramma T-S si tratta semplicemente di un segmento parallelo all'asse delle ascisse.

Trasformazione isocora

In una trasformazione isocora reversibile si ha, per il primo principio:

$$\partial Q = nC_V dT \quad (\text{IX.110})$$

quindi:

$$\Delta S = \int_A^B \frac{\partial Q}{T} = \int_A^B nC_V \frac{dT}{T} = nC_V \ln \frac{T_B}{T_A} \quad (\text{IX.111})$$

Quindi l'entropia in una isocora reversibile aumenta se il sistema acquista calore (aumentando di temperatura) e diminuisce se lo cede.

Trasformazione isobara

In una trasformazione isobara reversibile si ha:

$$\partial Q = nC_P dT \quad (\text{IX.112})$$

$$\Delta S = \int_A^B nC_P \frac{dT}{T} = nC_P \ln \frac{T_B}{T_A} \quad (\text{IX.113})$$

Usando la legge dei gas perfetti per sostituire le temperature con i volumi, si ha anche

$$\Delta S = nC_P \ln \frac{V_B}{V_A} \quad (\text{IX.114})$$

IX.4.5 Entropia e sistemi isolati

Per un sistema isolato, che quindi non ha scambi di calore con l'esterno:

$$\Delta S \geq 0 \quad (\text{IX.115})$$

dove il segno uguale è valido se avvengono solo trasformazioni reversibili. *Questa è una ulteriore formulazione del secondo principio della termodinamica.* Quindi l'entropia di un sistema isolato aumenta sempre e i sistemi si evolvono naturalmente verso stati che portano ad un aumento di entropia. L'universo stesso può essere considerato un sistema isolato e quindi l'entropia dell'universo aumenta con il tempo ^[13].

Le macchine che lavorano con trasformazioni irreversibili, lasciano traccia del loro funzionamento nell'universo contribuendo ad aumentarne l'entropia. In Natura, ogni trasformazione irreversibile porta ad "degradamento" dell'energia adatta a creare lavoro.

Vediamo ora la variazione di entropia in altri processi.

Scambio di calore tra due corpi

Quando un corpo è a contatto con un altro a temperatura differente, si ha un processo irreversibile perché non si ha equilibrio termico. Se un corpo di massa m e calore specifico massico c scambia, attraverso trasformazioni reversibili, calore con una serie di sorgenti che differiscono di temperature infinitesime e che lo portano da una temperatura T_i ad una T_f :

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} mc \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_f}{T_i} \quad (\text{IX.116})$$

L'entropia aumenta se il corpo assorbe e diminuisce se cede calore.

Se si mettono due corpi a diverse temperature ($T_2 > T_1$) a contatto dentro un recipiente dalle pareti adiabatiche, avviene uno scambio irreversibile di calore dal corpo caldo a quello freddo, fino a che i corpi raggiungono l'equilibrio termico alla temperatura T_e . Il corpo 1 scambia

^[13]attribuendo quindi anche un verso alla freccia temporale degli eventi

$Q_1 = m_1 c_1 (T_e - T_1) > 0$. In corpo 2 scambia $Q_2 = m_2 c_2 (T_e - T_2) < 0$. Non vi è passaggio di calore con l'ambiente e quindi il calore $Q = Q_1 + Q_2 = 0$ scambiato con l'ambiente è nullo:

$$\underbrace{m_1 c_1 (T_e - T_1)}_{Q_2} + \underbrace{m_2 c_2 (T_e - T_1)}_{Q_1} = 0 \quad (\text{IX.117})$$

$$(m_1 c_1 + m_2 c_2) T_e = m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2 \quad (\text{IX.118})$$

quindi:

$$T_e = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} \quad (\text{IX.119})$$

Per il calcolo dell'entropia, individuiamo nella (IX.116) un processo reversibile che connette gli stati iniziali e finali dei due corpi:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc \ln \frac{T_e}{T_1} + mc \ln \frac{T_e}{T_2} > 0 \quad (\text{IX.120})$$

Cambiamenti di fase

I cambiamenti di fase sono processi isotermi. La variazione di entropia è pari al calore ((IX.16)) scambiato divisa la temperatura di passaggio di fase:

$$\Delta S = \frac{m\mathcal{L}}{T} \quad (\text{IX.121})$$

Espansione libera

Torniamo al caso dell'espansione libera vista in Sez. (IX.3.9), un processo tipicamente irreversibile una volta che la valvola viene aperta. Nel caso del gas perfetto, abbiamo visto che la temperatura non cambia, ma varia il volume da V_i e V_f . Dal calcolo della variazione di entropia in una isoterma ((IX.113)):

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_f}{V_i} > 0 \quad (\text{IX.122})$$

Analisi dimensionale

Con la termodinamica si introducono altre due grandezze fondamentali:

- la *quantità di materia* (simbolo $[N]$), ce in SI si misura in mol
- la temperatura (simbolo $[\Theta]$, per distinguerlo dal tempo $[T]$), che in SI si misura in °K

Riepilogo formule

- *Conversione °K → °C*

$$t_C \text{ in } ^\circ\text{C} = T - 273.15^\circ\text{K}$$

- *Dilatazione lineare*

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$$

- *Calore specifico massico c_v e c_p*

$$Q_p = mc_p \Delta T$$

$$Q_v = mc_v \Delta T$$

- *Calore specifico molare C_v e C_p*

$$Q_p = nC_p \Delta T$$

$$Q_v = nC_v \Delta T$$

- *Conversione J → cal*

$$1.000 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$$

- *Calore latente*

$$Q = m\mathcal{L}$$

- *Equazione di stato gas perfetti*

$$PV = nRT$$

$$PV = Nk_B T$$

$$R = 8.31 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$$

$$U = \frac{n_l}{2} nRT$$

- *Lavoro termodinamico*

$$L = \int_{V_A}^{V_B} PdV$$

trasformazione isobara $L = P(V_B - V_A)$

trasformazione isobara $Q = nC_p\Delta T$

trasformazione isocora $L = 0$

trasformazione isoterma $L = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$ $L = nRT \ln \frac{P_A}{P_B}$

- *Primo principio della termodinamica*

$$\Delta U = Q - L$$

trasformazione qualsiasi $\Delta U = nC_V\Delta T$

trasformazione isoterma $Q = L$

trasformazione isoterma $PV = costante$

trasformazione adiabatica $PV^\gamma = costante$ $\frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}}$ $TV^{\gamma-1} = costante$

- *Calore specifico molare a volume costante per gas perfetto*

$$C_V = \frac{n_l}{2}R$$

- *Relazione di Mayer*

$$C_P = C_V + R$$

- *Lavoro in un ciclo*

$$L = Q_c + Q_f = Q_c - |Q_f|$$

gas perfetto	n_l	C_V/R	C_P/R	$\gamma = C_P/C_V$
monoatomico	3	3/2	5/2	5/3
biatomico	5	5/2	7/2	7/5
poliatomico	6	3	4	4/3

- *Rendimento in un ciclo*

$$\eta = \frac{L}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{|Q_f|}{Q_c} < 1$$

- *Coeff. di prestazione macchina frigorifera*

$$K_F = \frac{|Q_f|}{|L|}$$

- *Rendimento macchina di Carnot*

$$\eta_c = 1 - \frac{|Q_f|}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

- *Coeff. di prestazione macchina frigorifera di Carnot*

$$K_f = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

- *Variazione di entropia*

$$\Delta S = S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{\partial Q}{T} \right)_{rev}$$

Esercizi

** Esercizio 148

Un pezzo di ghiaccio di massa m a $T_1 = 250$ °K viene immerso in $m_2 = 60$ g di acqua a $T_2 = 330$ °K in un recipiente con pareti adiabatiche. Calcolare (esprimendo i risultati in SI):

a) m massimo perché il ghiaccio fonda completamente

b) T_e di equilibrio se $m = 35$ g

($c_a = 1.00$ cal/g°K, $c_g = 0.488$ cal/g°K, $L_f = 333$ J/g)

*** Esercizio 149

Con riferimento alla figura IX.13 un cilindro contenente gas chiuso è dotato di un pistone mobile. Viene immerso in una miscela acqua-ghiaccio e il pistone viene abbassato repentina-

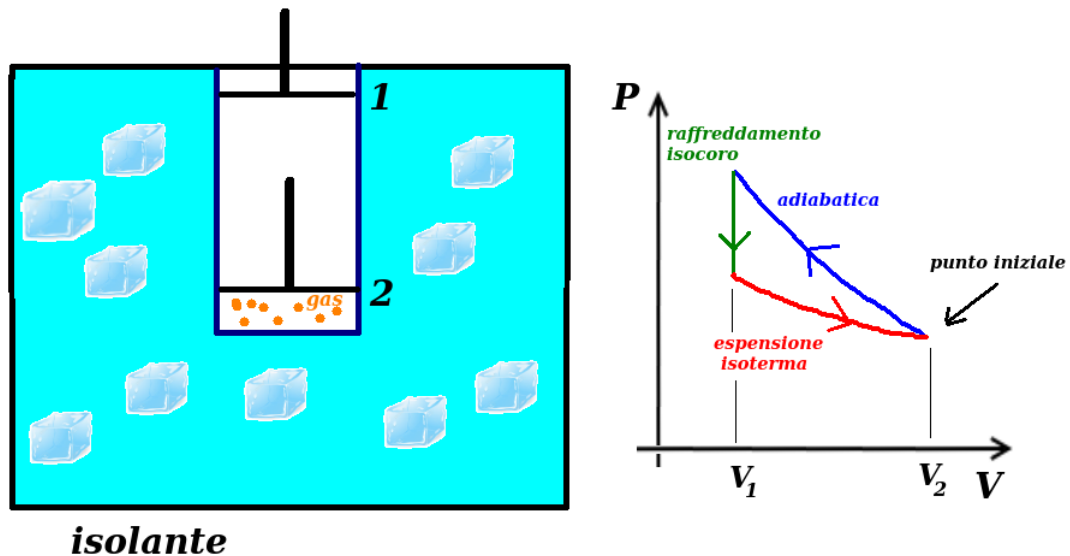


Figura IX.13

mente dalla posizione 1 a 2. Il pistone viene tenuto in 2 finché il gas raggiunge gli 0° e poi viene riportato lentamente alla posizione 1. Nella figura di destra è rappresentato con quali trasformazioni può essere schematizzato il processo. Sapendo che durante il processo ciclico si sono sciolti $m=122$ g di ghiaccio, calcolare il lavoro che è stato compiuto sul gas (sia noto il calore latente di fusione \mathcal{L}_f).

** Esercizio 150

Abbiamo 4.34 moli di gas ideale biatomico la cui temperatura viene aumentata di 62.4°K a pressione costante. Trovare:

- Q al gas
- ΔU del gas
- scrivere l'espressione della pressione in funzione della densità volumica n_V di molecole

*** Esercizio 151

Un motore fa compiere a 1 mole di un gas ideale monoatomico il ciclo in figura IX.14. Sapendo che $T_A = 300$ K, $T_B = 600$ K e $T_C = 455$ K:

- Si trovi Q , L e ΔU per ogni processo.
- Sapendo che in A: $P_A = 1.00$ atm, si trovi P_B , P_C e tutti i volumi.

*** Esercizio 152

Consideriamo il ciclo di Stirling in figura IX.15 per un gas perfetto monoatomico, con $T_1 = 400$ K e $T_2 = 350$ K e con $V_B = 2V_A$. Si trovi il rendimento e si confronti con quello della macchina di Carnot.

*** Esercizio 153

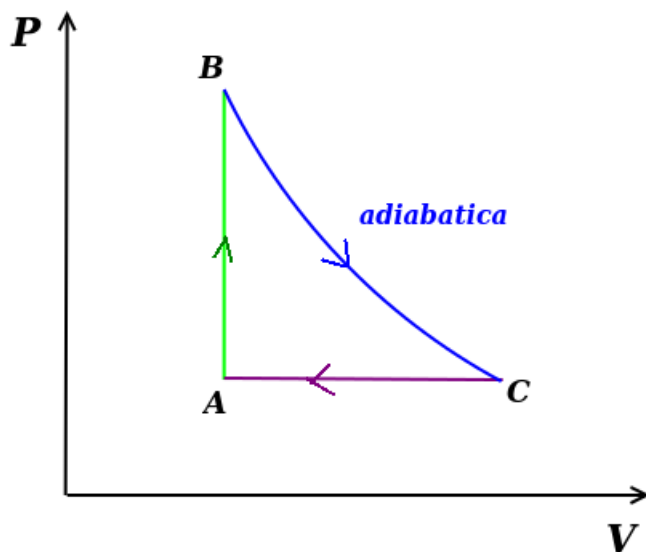


Figura IX.14

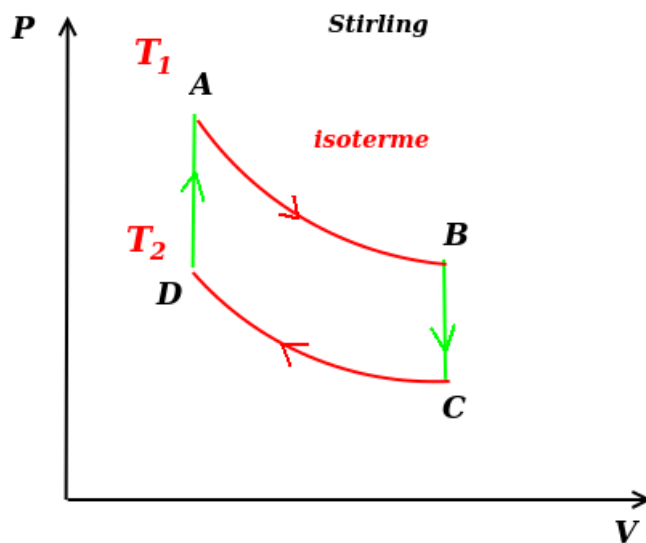


Figura IX.15

Consideriamo il ciclo Diesel in figura IX.16 per un gas perfetto monoatomico, con $T_A=854$ K e $T_B=2646$ K, $T_C=1408$ K e $T_D=289$ K. Si trovi il rendimento e si confronti con quello della macchina di Carnot.

*** Esercizio 154

Consideriamo il ciclo Otto in figura IX.17 per un gas perfetto monoatomico, con $T_A=1550$ K e $T_B=770$ K, $T_C=296$ K e $T_D=590$ K. Si trovi il rendimento e si confronti con quello della macchina di Carnot.

*** Esercizio 155

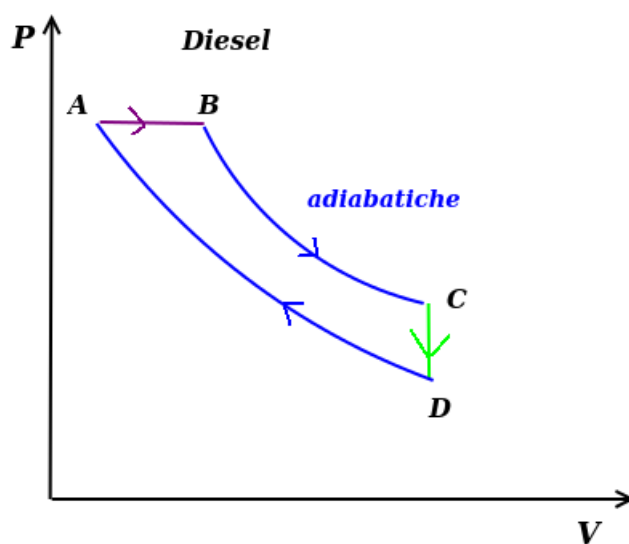


Figura IX.16

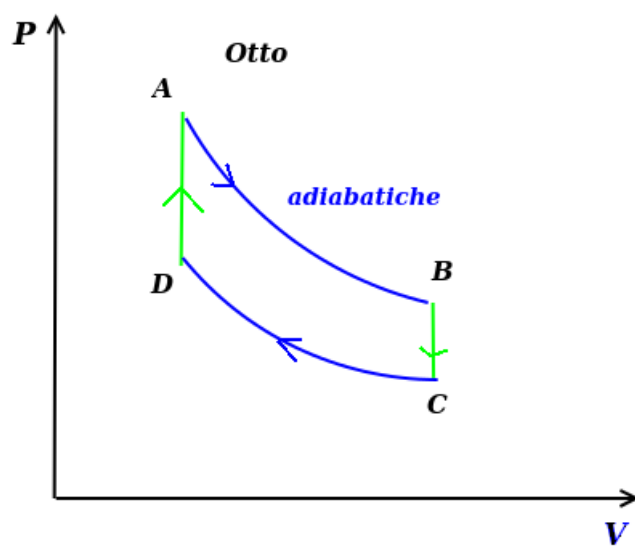


Figura IX.17



Figura IX.18

Una contenitore dal volume complessivo V_f in figura IX.18 con pareti isolate termicamente è diviso in due camere. Un gas perfetto (1.00 mole) è contenuto in una camera dal volume V_i . Viene aperto il rubinetto R e il gas è libero di espandersi nella seconda camera adiabaticamente. Trovare: a) la variazione di temperatura del gas alla fine dell'espansione. b) la variazione totale di entropia nel caso in cui le due camere sono dello stesso volume.

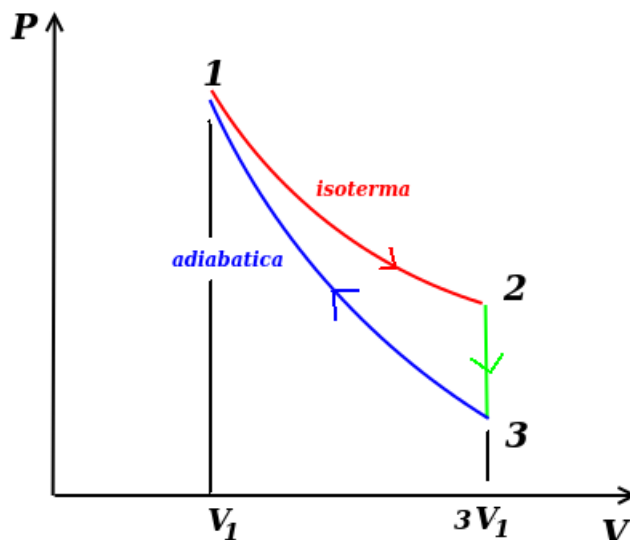


Figura IX.19

*** Esercizio 156

1 mole di gas perfetto biatomico è sottoposta al ciclo in figura IX.19. Sapendo che $V_2 = 3V_1$, trovare:

- P_2, P_3, T_3 in funzione di P_1, V_1, T_1 .
- $L, Q, \Delta U$ e ΔS per tutti i processi in funzione e per l'intero ciclo di P_1, V_1, T_1

**** Esercizio 157

1 mole di gas perfetto monoatomico è sottoposta al ciclo in figura IX.20. Sapendo che $P_C = 2P_A$, trovare l'espressione del rendimento del ciclo.

*** Esercizio 158

Una macchina frigorifera (figura IX.21) reversibile produce ghiaccio prelevando calore da una miscela di acqua-ghiaccio a temperatura $t_f=0^\circ\text{C}$ e cedendo all'ambiente esterno ($t_c=20^\circ\text{C}$). Trovare la massa m di ghiaccio ($\mathcal{L}_f=80 \text{ cal/g}$ e il lavoro L assorbito di 100 kJ) prodotta ad ogni ciclo. Scrivere anche il coefficiente di prestazione L della macchina frigorifera.

**** Esercizio 159

All'interno di un cilindro con pistone in figura IX.22 ci sono n moli di gas perfetto monoatomico a temperatura T_0 . Cilindro e pistone sono termicamente isolati con l'esterno e la pressione

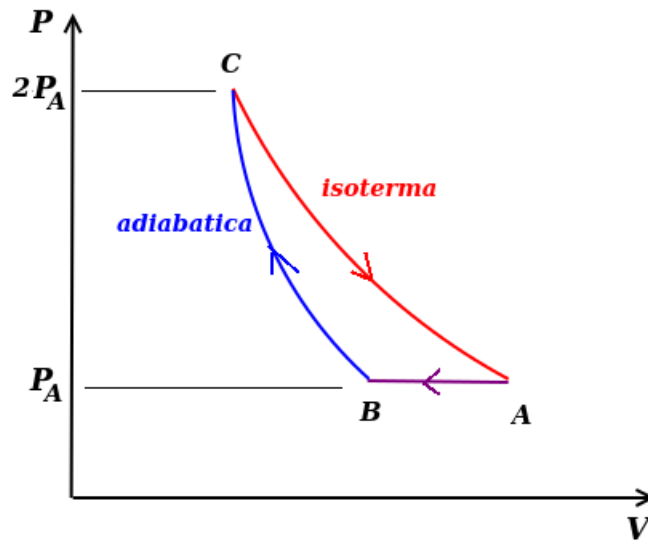
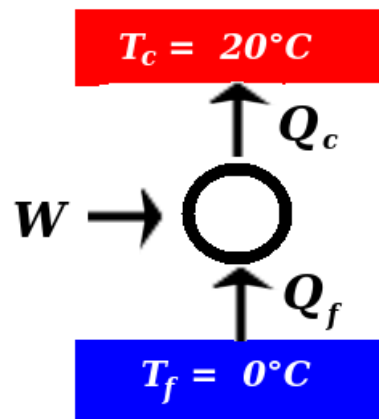


Figura IX.20



interna è P_0 . Ad un certo istante all'interno del cilindro viene immesso un corpo di massa m a temperatura $T_1 > T_0$. Alla fine si nota una espansione del pistone di un volume ΔV . Si trovi il calore specifico c del corpo.

** Esercizio 160

Un cubetto di ghiaccio di massa $m_g = 8.00$ g alla temperatura $T_g = -10^\circ\text{C}$ viene messo in un thermos con 100 cm^3 di acqua a $T_a = 20^\circ\text{C}$. Dopo un certo tempo tutto il ghiaccio si fonde e la massa d'acqua raggiunge una temperatura T_f . Il calore latente di fusione del ghiaccio \mathcal{L}_f è 79.7 kcal/kg, il calore specifico massico del ghiaccio c_g è 0.530 cal/gK, mentre quello dell'acqua è $c_a = 1.00$ cal/gK. a) convertire tutte le unità di misura in SI
b) trovare la temperatura finale T_f dell'acqua nello stato finale all'equilibrio termico
c) la variazione di entropia ΔS alla fine di tutto il processo

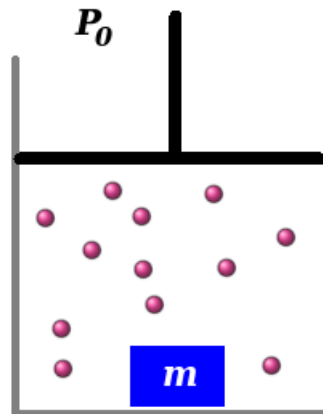


Figura IX.22

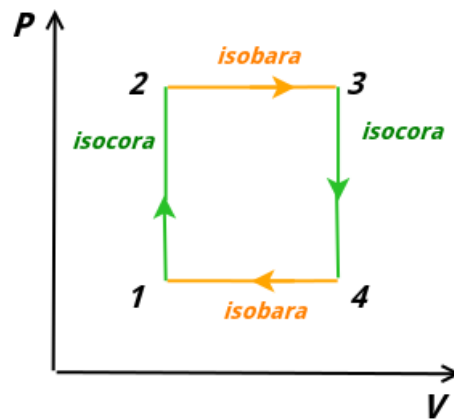


Figura IX.23

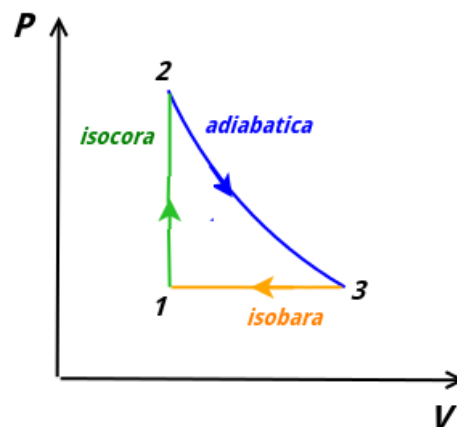


Figura IX.24

** Esercizio 161

Nel ciclo reversibile in Fig. (IX.23) $n = 1.00$ mol di gas perfetto monoatomico rappresenta il funzionamento di una macchina termica. La pressione in 1 è $P_0 = 1.01 \cdot 10^5$ Pa. La pressione

in 2 è $P=2P_0$. Il volume in 1 è $V_0=0.0225 \text{ m}^3$ e in 3 è $V = 2V_0$. Trovare:

- a) il lavoro totale per ogni ciclo
- b) il calore scambiato durante la trasformazione $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$.
- c) il rendimento η
- d) il rendimento η_c della relativa macchina di Carnot

**** Esercizio 162**

Nel ciclo reversibile in Fig. (IX.24) una macchina termica compie un ciclo reversibile con un gas monoatomico (1.00 moli). $V_3 = 8V_1$, $P_2 = 10.13 \text{ bar}$, $V_2 = 1.00 \text{ m}^3$. Trovare, per ogni ciclo:

- a) il calore assorbito dal gas
- b) il calore ceduto al gas
- c) il lavoro totale
- d) il rendimento, confrontato con quello della relativa macchina di Carnot

Capitolo X

Elettromagnetismo

L'interazione elettromagnetica tiene insieme elettroni e nuclei per formare gli atomi, gli atomi per formare le molecole e le molecole per formare gli oggetti macroscopici. Molti fenomeni macroscopici sono il risultato di interazioni elettromagnetiche. I fenomeni elettrici e magnetici dipendono da una stessa proprietà della materia, cioè la carica elettrica e sono profondamente connessi.

Nello studio dell'elettrostatica, cioè cariche in equilibrio statico, possiamo tenere separati i due fenomeni.

Nello studio del magnetismo, si studia l'interazione di cariche in movimento con un campo magnetico.

Infine, i fenomeni elettrici e magnetici vengono connessi a quelli ottici attraverso le equazioni di Maxwell, le cui soluzioni sono onde elettromagnetiche.

Concetti Fondamentali

Questo argomento è uno dei principali del corso e viene sempre chiesto durante ogni esame orale.

- espressione vettoriale della forza di Coulomb e del campo elettrico
- energia potenziale elettrica
- potenziale elettrostatico
- teorema di Gauss (esame orale)
- campo generato da distribuzione piane di carica
- definizione di capacità elettrica
- definizione di corrente
- legge di Ohm
- effetto Joule
- reti elettriche
- leggi di Kirchoff e risoluzione di una rete a due maglie
- resistori e condensatori in serie e in parallelo
- forza di Lorentz
- forza su un conduttore percorso da corrente
- campo generato da un filo tramite la legge di Ampere (esame orale)
- legge di Faraday

Per quanto riguarda la forza di Lorentz e il magnetismo in generale, risulta fondamentale la padronanza del prodotto vettoriale.

X.1 Elettrostatica

X.1.1 La carica elettrica

L'osservazione dei fenomeni legati alla carica elettrica risale al settimo secolo a.C., quando si scoprì che materiali come l'ambra, una volta strofinati con panni di lana, acquistano la proprietà di attirare corpuscoli leggeri. Il termine "electron" è infatti il nome greco dell'ambra. Le cariche elettriche e le forze delle quali sono responsabili sono quindi una manifestazione di una proprietà della materia che passa da un corpo ad un altro. I corpi che presentano questo comportamento si dicono *eletttricamente carichi*.

I corpi che si caricano per strofinio si chiamano *isolanti*; in questi materiali la carica non è libera di spostarsi. Nei *conduttori*, come i metalli, invece la carica è libera di muoversi. In un conduttore, se non si prendono delle precauzioni (ad esempio, tenendo il conduttore attraverso un isolante, le cariche si disperdono rapidamente.)

Per quanto riguarda gli isolanti e il caricamento per strofinio, si possono individuare due tipi di materiali, osservando che materiali carichi della stessa specie si respingono, mentre quelli di specie opposta si attraggono. Da ciò si deduce che debbano esistere due tipi di carica che si respingono o si attraggono a seconda che il loro segno sia rispettivamente uguale o opposto. Per convenzione, viene attribuito il segno positivo al tipo di carica che si accumula per strofinio su un materiale come il vetro e il segno negativo su altri come la bachelite.

L'*elettroscopio a foglie* (Fig. (X.1)) è il primo strumento per misurare la carica elettrica; esso è composto da un materiale metallico, elettricamente isolato dagli oggetti con un materiale come il vetro. Una sfera metallica è connessa a due leggere foglie metalliche. Nel caso

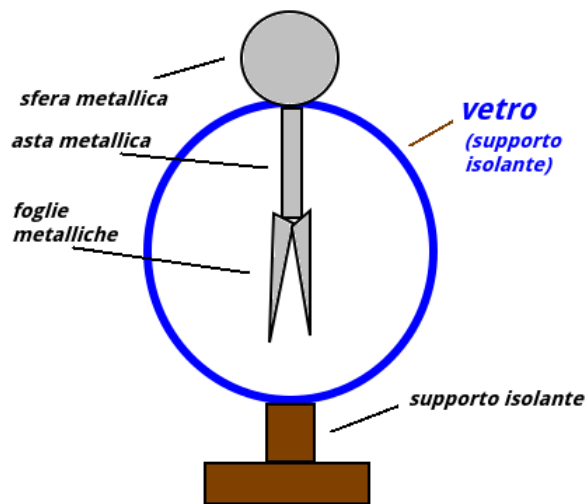


Figura X.1: Schema di un elettroscopio a foglie.

di avvicini una bacchetta carica all'elettroscopio, senza che avvenga un contatto, le cariche di segno opposto nell'elettroscopio, che è complessivamente neutro, vengono attratte in direzione della bacchetta (e quelle di segno opposto se ne allontanano). Si crea quindi uno scompenso di cariche dello stesso segno dalla parte delle foglie che provoca una forza repulsiva, causando un allontanamento tra queste (Fig. (X.1)-a)). Questo è un fenomeno di *induzione elettrostatica* e,

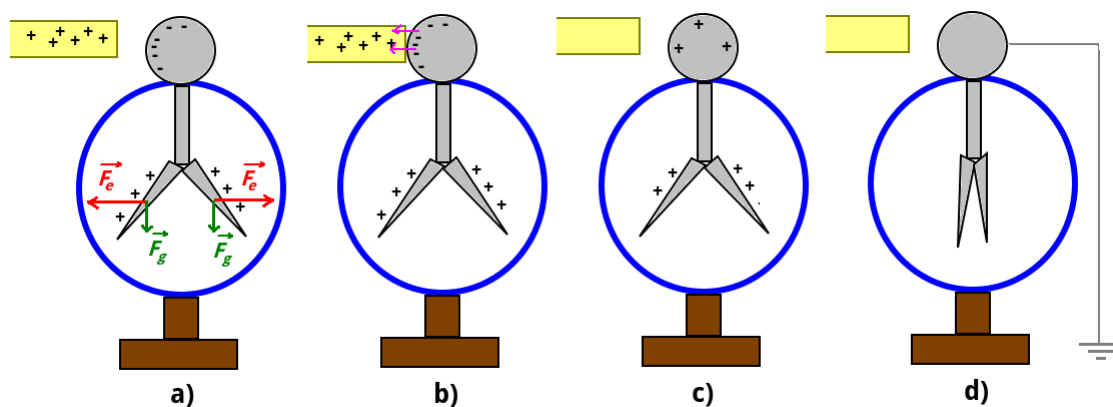


Figura X.2: Caricamento per induzione e per contatto.

dopo un rapidissimo transiente, è un fenomeno di equilibrio. Ri allontanando la bacchetta, le cariche si distribuiscono uniformemente e le foglie si riavvicinano sotto l'azione della forza peso. Se la bacchetta tocca l'elettroscopio (Fig. (X.1)-b)), si ha una migrazione di carica dal conduttore verso l'isolante, che torna ad essere complessivamente neutro. L'elettroscopio diventa quindi complessivamente carico e le foglie rimangono lontane (*eletrizzazione per contatto* di un conduttore). Se poi l'elettroscopio viene collegato, tramite un materiale conduttore, *a terra*, il conduttore e la Terra costituiscono un unico conduttore. Essendo la Terra un conduttore molto più grande, lo spettroscopio può considerarsi complessivamente neutro, ritornando nella sua posizione di origine.

In questi processi (e in tutti gli altri esistenti in Natura) è verificato il *principio di conservazione della carica elettrica*, cioè le cariche non si creano né si distruggono, ma tendono ad arrivare ad una situazione di equilibrio in cui si schermano a vicenda.

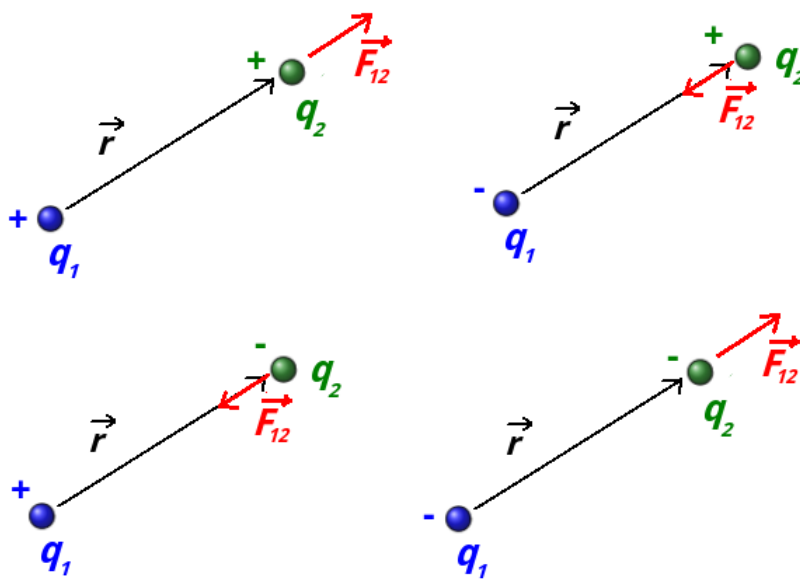


Figura X.3: Caricamento per induzione e per contatto.

X.1.2 La forza di Coulomb

La legge della forza che agisce tra particelle cariche in quiete fu stabilita nel 1784 da Charles Augustin Coulomb (Angouleme, 1736 - Parigi, 1806), servendosi di una bilancia a torsione. L'esperimento mostra che indicando con \vec{r} il vettore posizione che va da una carica q_1 ad una carica q_2 , la carica q_1 esercita sulla carica q_2 una forza:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (\text{X.1})$$

dove $r = |\vec{r}|$ e \hat{r} è il versore relativo al vettore $\vec{r} = r\hat{r}$ ^[1]. In Fig. (X.3) ci sono i 4 casi che si possono presentare per via dei segni delle cariche. Il verso della forza applicata in q_2 (per la terza legge di Newton una forza uguale e contraria sarà applicata in q_1 , esercitata da q_2) dipende dai segni algebrici delle cariche. Quindi, se i segni sono uguali, la forza avrà la stessa direzione e verso di \hat{r} e quindi sarà repulsiva. Se i segni sono opposti, la direzione e verso della forza sarà quello di $-\hat{r}$ e la forza sarà attrattiva.

In onore di Coulomb, l'unità di misura della carica elettrica è il *coulomb* (simbolo C). Dimensionalmente, per convenzione, si introduce una nuova grandezza fondamentale $[I]$, che non corrisponde alla carica, ma all'*intensità di corrente elettrica*, che si misura in *ampere* (simbolo A=C/s), cioè 1 C diviso 1 secondo. Quindi, dimensionalmente, una carica Q è:

$$[Q] = [L^0 M^0 T^1 N^0 \Theta^0 I^1] \quad (\text{X.3})$$

La costante ϵ_0 è la *costante dielettrica del vuoto* (o *permittività elettrica*) e vale (espressa con 4 cifre significative):

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{C}^2 \text{m}^{-2} \quad (\text{X.4})$$

Di uso frequente è anche la *costante di Coulomb*:

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 8.988 \cdot 10^9 \text{ NC}^{-2} \text{m}^2 \quad (\text{X.5})$$

La forza di Coulomb risulta avere la stessa forma matematica della forza gravitazionale (VI.2), vista nel Cap. (VI), con la differenza che, a differenza delle masse, le cariche possono avere diverso segno. Quindi, se nel caso della gravità la forza era sempre attrattiva, nel caso dell'elettrostatica, questa può essere sia attrattiva che repulsiva. Se sono presenti n cariche puntiformi, la forza risultante su una carica q sarà la somma vettoriale delle forze di Coulomb esercitate singolarmente da ognuna di essa:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (\text{X.6})$$

dove $\vec{r}_i = \hat{r}_i r_i$ è la posizione della carica q rispetto alla carica q_i .

^[1]In alternativa, la (X.2) può essere riscritta come:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r} \quad (\text{X.2})$$

, essendo $\hat{r} = \vec{r}/r$.

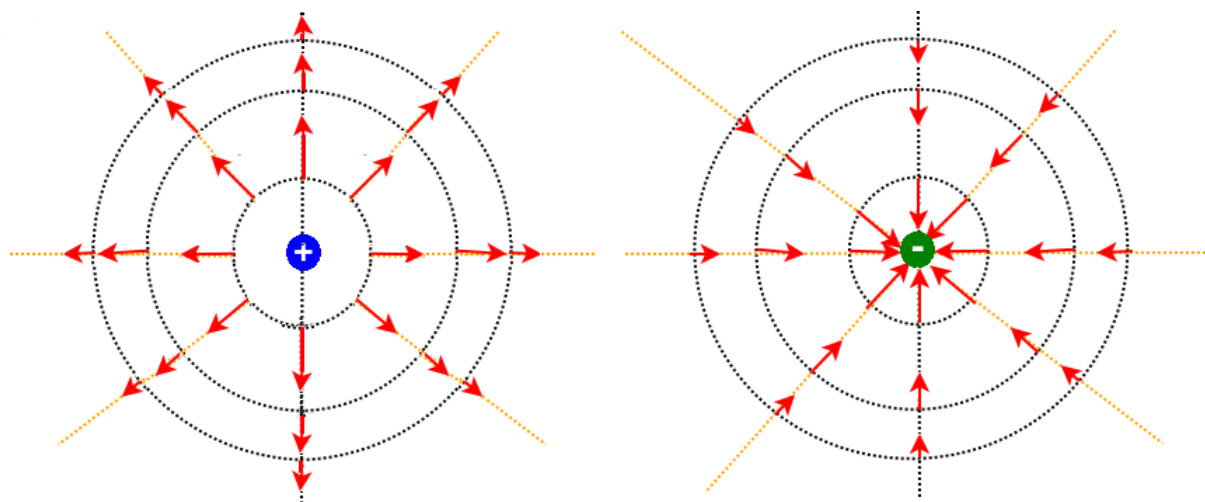


Figura X.4: Campo elettrico generato da due cariche di diverso segno.

X.1.3 Il campo elettrico

In Sez. (IV.2.1) abbiamo definito un campo come una proprietà che lo spazio assume per via della presenza di una forza conservativa che varia da punto a punto. Abbiamo ripreso questo concetto nel caso della gravitazione (Cap. (VI)). In maniera del tutto analoga a quello visto in Sez. (VI.3.2), si osserva che la forza di Coulomb è una forza centrale conservativa. È quindi possibile definire un campo, come in Sez. (VI.3.3). Nel caso della forza gravitazionale avevamo studiato il campo gravitazionale generato da una massa puntiforme M attraverso una massa puntiforme di prova m , definendo il campo in ogni punto come il rapporto tra la forza gravitazionale e la carica di prova. Quindi, nel caso elettrostatico, possiamo trovare il *campo elettrico* \vec{E} generato da una carica puntiforme q attraverso una carica di prova puntiforme q_0 :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (\text{X.7})$$

A differenza del campo gravitazionale, la cui direzione del campo è sempre diretto verso la massa che lo genera, il campo risulta *uscente se q è positiva e entrante se q è negativa* (Fig. (X.4)). Se sono presenti n cariche puntiformi che generano il campo elettrico, il campo in un punto P sarà dato dalla somma vettoriale dei campi generati singolarmente dalle cariche (*principio di sovrapposizione*):

$$\vec{E}(P) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (\text{X.8})$$

dove \vec{r}_i è la posizione del punto P rispetto alla carica q_i . Se il campo elettrico è generato da una distribuzione di carica di qualche tipo (di volume ρ , di superficie σ o lineare λ), il campo elettrico in un punto può essere trovato tramite integrazione:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r^2} \hat{r} dV \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{r^2} \hat{r} dS \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda}{r^2} \hat{r} dl \quad (\text{X.9})$$

dato che:

$$dq = \rho dV \quad (\text{X.10})$$

$$dq = \sigma dS \quad (\text{X.11})$$

$$dq = \lambda dl \quad (\text{X.12})$$

Una volta conosciuto il campo elettrico in un punto, si può trovare la forza che una carica q_0 subirebbe in quel punto:

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} \quad (\text{X.13})$$

Il segno di q_0 e il verso di \vec{E} determina la corretta orientazione della forza. Le equazioni viste per un campo elettrostatico sono valide quando le cariche che generano il campo sono fisse e la carica di prova q_0 è a sua volta fissa oppure si muove senza però perturbare la distribuzione delle cariche sorgenti.

Il campo elettrico può essere misurato in SI in N/C.

X.1.4 Energia potenziale elettrica

Abbiamo già detto che la forza elettrica agente su q_0 dovuta alla carica q è conservativa e quindi la variazione di energia potenziale è:

$$U_a - U_b = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) \quad (\text{X.14})$$

A meno di non avere a che fare con distribuzioni di carica infinite, è lecito porre uguale a 0 l'energia potenziale all'infinito e la (X.14) diventa:

$$U(r) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (\text{X.15})$$

Se una carica q_0 si trova in un campo generato da n cariche puntiformi:

$$U(r) = \sum_{i=1}^n \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i} \quad (\text{X.16})$$

Una unità di misura che può essere usata per l'energia potenziale elettrostatica è l'*elettronvolt* (simbolo eV):

$$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (\text{X.17})$$

espresso con 4 cifre significative.

X.1.5 Il potenziale elettrostatico

Nella Sez. (X.1.3) abbiamo visto che la forza che agisce su una carica di prova q_0 è proporzionale a q_0 e abbiamo definito come campo elettrico il rapporto tra la forza e la carica q_0 , in modo che ne sia indipendente. L'espressione (X.14) suggerisce un procedimento analogo; si definisce come *potenziale elettrostatico* V :

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (\text{X.18})$$

Ponendo a 0 il potenziale all'infinito (in assenza di distribuzioni infinite di carica).

Se le cariche a generare il potenziale sono n :

$$V(r) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i} \quad (\text{X.19})$$

Il potenziale è una grandezza scalare e l'unità di misura è il *volt* (simbolo V, da Alessandro Volta, Como 1745 - Como 1827). Si trova quindi la definizione di 1 eV, come l'energia acquistata da un elettrone ($q = 1.602 \text{ C}$) attraversando una differenza di potenziale ΔV (o *tensione*) di 1 V.

Una differenza di potenziale può essere determinata a partire dal campo elettrico presente nella regione:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{X.20})$$

Nel caso di un campo uniforme, con \hat{i} la direzione di \vec{E} , la (X.20) diventa:

$$\Delta V = -E\Delta x \quad (\text{X.21})$$

Se abbiamo una tensione di riferimento V_0 in corrispondenza di $x = 0$:

$$V(x) = V_0 - Ex \quad (\text{X.22})$$

A sua volta, il campo elettrico \vec{E} può essere trovato come:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (\text{X.23})$$

dove ∇ è il gradiente definito in Sez. (IV.2.2) ((IV.52)). L'unità di misura del campo elettrico può essere espressa in V·m. Se la tensione varia lungo una sola direzione, ad esempio lungo l'asse x :

$$\vec{E} = E_x \hat{i} = -\frac{dV}{dx} \hat{i} \quad (\text{X.24})$$

X.1.6 Il teorema di Gauss

Una *superficie orientata* $\Delta\vec{S}$ ha come modulo la superficie ΔS e direzione e verso dato dal vettore \hat{n} perpendicolare ad essa:

$$\Delta\vec{S} = \Delta S \hat{n} \quad (\text{X.25})$$

Il *flusso* (Fig. (X.5)-a)) Φ_v di un campo vettoriale \vec{v} (uniforme sulla superficie ΔS) attraverso una superficie $\Delta\vec{S}$ è dato dal loro prodotto scalare:

$$\Phi_v = \vec{v} \cdot \Delta\vec{S} = \Delta S \vec{v} \cdot \hat{n} \quad (\text{X.26})$$

Quindi, se θ è l'angolo tra \hat{n} e \vec{v} :

$$\Phi_v = v \Delta S \cos \theta \quad (\text{X.27})$$

Una *superficie gaussiana* è una superficie chiusa qualsiasi con orientazione uscente da es-

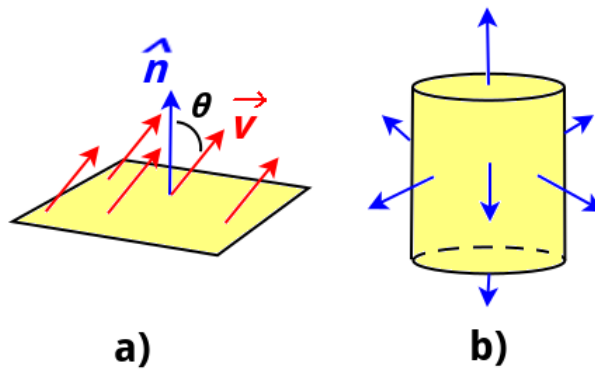


Figura X.5: a) Flusso di un campo vettoriale \vec{v} attraverso una superficie orientata ΔS . b) un cilindro come esempio di superficie gaussiana.

sa. In Fig. (X.5) c'è l'esempio di un cilindro. Il *teorema di Gauss* (da Carl Friedrich Gauss, Braunschweig 1777 - Gottinga 1855) afferma che *il flusso del campo elettrico attraverso una superficie gaussiana è uguale alla somma algebrica delle cariche interne alla superficie divisa per la costante dielettrica*:

$$\Phi_E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (\text{X.28})$$

dove Q_{int} è la somma delle cariche interne che stanno dentro la superficie. Questo teorema è di grande utilità per calcolare il campo elettrico generato da una distribuzione di cariche senza ricorrere ad un complicato calcolo integrale.

Campo generato da carica puntiforme

Vogliamo calcolare il valore di un campo elettrico ad una distanza r da una carica puntiforme q . Scegliamo come superficie gaussiana una sfera di raggio r nel cui centro si trova una carica

puntiforme q . In ogni punto della sfera il campo è parallelo a \hat{n} , essendo questo in direzione radiale. Quindi: $\hat{n} \cdot \vec{E}dS = EdS$. La (X.28) diviene:

$$\int_S EdS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{X.29})$$

Essendo una sfera:

$$\int_S dS = 4\pi r^2 \quad (\text{X.30})$$

quindi:

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{X.31})$$

che porta alla espressione attesa:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (\text{X.32})$$

con direzione radiale e verso che dipende dal segno di q , come da attesa.

Campo generato da distribuzione piana di carica

Si consideri un piano infinito uniformemente carico con densità superficiale di carica σ . Si trovi \vec{E} ai due lati opposti del piano.

Consideriamo una superficie gaussiana cilindrica (che interseca il piano) di base di area A parallela al piano. Per ragioni di simmetria \vec{E} è parallelo alla superficie laterale. Il campo avrà verso uscente da entrambi i lati del piano (considerando una carica negativa). Il flusso attraverso la superficie cilindrica è solo attraverso le due basi:

$$\Phi(\vec{E}) = 2AE \quad (\text{X.33})$$

Per il teorema di Gaus e considerando che all'interno della superficie c'è una carica $Q = \sigma A$:

$$2AE = \frac{A\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{X.34})$$

Quindi il modulo di \vec{E} è:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{X.35})$$

La direzione è uscente dal piano nei due semispazi individuati dalla superficie.

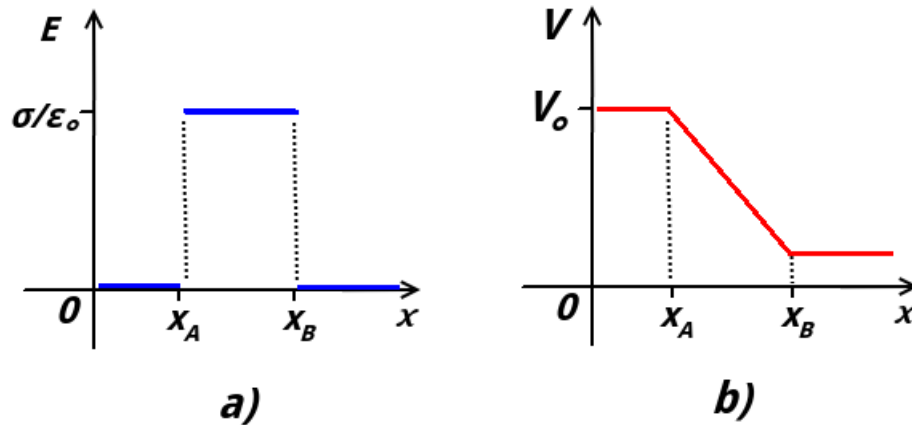


Figura X.6

Campo generato da due distribuzioni piane di carica opposta

Si consideri di mettere due piani dell'esempio precedente di carica uguale e opposta e nelle coordinate x_A e x_B rispetto all'asse x perpendicolare

Usiamo il risultato dell'esempio precedente e calcoliamo il campo generato da ciascun piano in ciascuno dei 3 spazi individuati. Poi applicheremo il principio di sovrapposizione e troveremo il campo totale nelle 3 zone. Superficie A carica positivamente in x_A e Superficie B carica positivamente in $x_B > x_A$. La direzione positiva dell'asse x è quella che va da x_A verso x_B .

Superficie A:

In $x < x_A$:

$$E_A(x < x_A) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{X.36})$$

In $x_A < x < x_B$:

$$E_A(x_A < x < x_B) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{X.37})$$

In $x > x_B$:

$$E_A(x > x_B) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{X.38})$$

Superficie B:

In $x < x_A$:

$$E_B(x < x_A) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{X.39})$$

In $x_A < x < x_B$:

$$E_B(x_A < x < x_B) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{X.40})$$

In $x > x_B$:

$$E_B(x > x_B) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{X.41})$$

Quindi sommando avremo che il campo è nullo nelle zone $x < x_A$ e $x > x_B$, mentre tra le due superfici:

$$E(x_A < x < x_B) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{X.42})$$

Il grafico che riassume i risultati precedenti è in figura X.6-a).

c) Introducendo una costante arbitraria V_0 (tensione di riferimento) e integrando lungo x :

In $x < x_A$:

$$V(x) = V_0 \quad (\text{X.43})$$

In $x_A < x < x_B$:

$$V(x) = V_0 - \frac{\sigma}{\epsilon_0}x \quad (\text{X.44})$$

In $x > x_B$:

$$V(x) = V_0 - \frac{\sigma}{\epsilon_0}x_B \quad (\text{X.45})$$

Il grafico è in figura X.6-b).

Proprietà elettrostatiche di un conduttore

All'interno del conduttore, quando le cariche sono in equilibrio statico, il campo elettrico deve essere nullo. In caso contrario, essendo i portatori di carica liberi di muoversi, sarebbero portati a muoversi per via del campo. In un conduttore, le cariche in eccesso si dispongono in modo da realizzare questa condizione. Quindi è possibile usare il teorema di Gauss per determinare dove è localizzato questo eccesso di carica, imponendo la condizione che il campo elettrico al suo interno sia nullo. Quindi, prendendo una qualsiasi superficie gaussiana interna al conduttore, la (X.28) dice che la carica totale all'interno della superficie gaussiana deve essere nulla. La carica in eccesso in un conduttore non può che disporsi sulla superficie, attraverso una densità superficiale di carica σ e in generala varia da punto a punto sulla superficie.

La legge di Gauss può essere usata per trovare il campo elettrico in prossimità della superficie di un conduttore. Il campo deve essere diretto perpendicolarmente alla superficie, perché una componente tangenziale indurrebbe uno spostamento della carica. Scegliamo quindi un cilindro infinitesimo con le basi parallele al conduttore. Il flusso attraverso la superficie laterale è nullo ed è nullo anche il flusso interno al conduttore. Il flusso relativo all'altra base è QA , dove A è l'area della base. La carica interna al cilindro è σA , quindi:

$$\vec{E} = E\hat{n} = \frac{\sigma A}{A\epsilon_0}\hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n} \quad (\text{X.46})$$

Di conseguenza, le linee di forza del campo sono linee che nascono/finiscono in direzione ortogonale alla superficie. Se trasferiamo una carica elettrica su un conduttore isolato questa si distribuisce sulla superficie in una configurazione tale da garantire che il conduttore stesso sia equipotenziale. Una superficie equipotenziale è una superficie sulla quale il potenziale è costante e le forze elettriche non compiono lavoro quando una particella carica si sposta su essa.

X.1.7 Capacità elettrica

Si definisce *capacità elettrica* di un conduttore la costante di proporzionalità tra la carica elettrica presente su un conduttore e il suo potenziale elettrostatico riferito all'infinito:

$$C = \frac{q}{V} \quad (\text{X.47})$$

L'unità di misura è il Farad (simbolo F); 1 cioè 1 C / 1 V. La capacità è una caratteristica che dipende esclusivamente dalle caratteristiche geometriche, ma per poterla calcolare dobbiamo immaginare di porre una carica Q sul conduttore e determinare il valore V del potenziale, riferito all'infinito.

Ad esempio, prendiamo una sfera isolata conduttore di raggio R ; data la simmetria sferica, se vi depositiamo una carica Q questa si distribuirà uniformemente sulla superficie, essendo questa equipotenziale. Usando il teorema di Gauss, prendendo una superficie gaussiana sferica concentrica e di raggio R si trova che il campo elettrico è lo stesso di quello generato da una carica puntiforme Q posta nel centro della sfera. Il suo potenziale allora sarà:

$$\text{capacità sfera} \quad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (\text{X.48})$$

$$C = \frac{q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (\text{X.49})$$

Prendiamo ora due conduttori in condizione di *induzione totale*, cioè quando tutte le linee di forza che portano da un conduttore raggiungono l'altro. Ciò accade quando un conduttore è totalmente racchiuso in un altro, oppure quando i due conduttori hanno ampie superfici poste a breve distanza. L'induzione totale fa sì che le cariche elettriche presenti sulle superfici tra loro affacciate siano di segno opposto, ma abbiano lo stesso valore assoluto. Un *condensatore* è un dispositivo costituito da due conduttori tra loro isolati posti l'uno vicino all'altro. I due conduttori si chiamano *armature* del condensatore. Se ΔV è la differenza di potenziale tra i due conduttori:

$$C = \frac{q}{\Delta V} \quad (\text{X.50})$$

dove q è la carica presente su ogni armatura in valore assoluto (non la carica totale). Ad una carica $+q$ su una armatura corrisponderà una $-q$ sull'altra.

Un condensatore piano è costituito da due armature formate da piano paralleli, di area S , conduttori posti ad una distanza d ; se la loro distanza è molto minore delle dimensioni lineari dei piani, quest'ultimi possono essere approssimati come infiniti ed è possibile considerare una induzione totale. Sotto queste approssimazioni si possono usare i risultati trovati nelle (X.43), (X.44) e (X.45). Nell'intercapedine delle due armature esiste una differenza di potenziale:

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{q}{S\epsilon_0} d \quad (\text{X.51})$$

Dalla (X.50) diventa:

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (\text{X.52})$$

X.1.8 Dipolo elettrico

Il *dipolo elettrico*, nella sua versione più semplice, è costituito da due cariche uguali e opposte $+q$ e $-q$ poste ad una distanza piccola rispetto alle altre distanze presenti nel contesto. Più in generale, un dipolo è una distribuzione di carica, globalmente neutra, ma non omogenea spazialmente nel segno.

Il dipolo elettrico è caratterizzato da un *momento di dipolo elettrico* \vec{d} :

$$\vec{d} = rq\hat{d} \quad (\text{X.53})$$

dove q è il valore assoluto di ogni carica, r è la distanza tra le due cariche e \hat{d} è la direzione e verso che va dalla carica negativa a quella positiva.

Se immerso in un campo elettrico uniforme \vec{E} , esso subisce un momento torcente $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E} \quad (\text{X.54})$$

Il dipolo non subisce quindi effetti quando si trova allineato con \vec{E} e possiede una energia potenziale minima quando si trova in questa configurazione ^[2]

X.1.9 Dielettrici

Fino ad ora sono state discusse le proprietà elettriche nel vuoto. Vediamo ora come si modificano queste proprietà nel caso in cui i conduttori siano separati da materiale isolante.

Ad esempio, introduciamo un materiale isolante tra le armature del condensatore piano visto nella Sez. (X.1.7) prima che la carica venga immessa nelle armature. Il materiale isolante, che possiede la proprietà di diminuire la differenza di potenziale tra le armature, si chiama *dielettrico*. Quindi, quando sul condensatore viene depositata una carica q , indicando con ΔV_0 la differenza di potenziale nel caso del vuoto:

$$\Delta V < \Delta V_0 \quad \implies \quad C > C_0 \quad (\text{X.57})$$

Il rapporto:

$$\frac{C}{C_0} = \epsilon_r > 1 \quad (\text{X.58})$$

è la *costante dielettrica relativa* e dipende dal materiale dielettrico. Il prodotto con la costante dielettrica del vuoto:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (\text{X.59})$$

^[2]Per ruotare di un angolo infinitesimo $d\theta$ un dipolo immerso in un campo uniforme \vec{E} è necessario compiere un lavoro $\delta L = \tau d\theta$:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dE \sin \theta d\theta = -dE \cos \theta_2 + dE \cos \theta_1 = -\Delta U \quad (\text{X.55})$$

Quindi si può definire una energia potenziale:

$$U = -\vec{d} \cdot \vec{E} \quad (\text{X.56})$$

che è minima quando \vec{p} è parallelo ad \vec{E} .

è la *costante dielettrica (assoluta)* del materiale. L'origine di questo fenomeno macroscopico è descritta a livello microscopico dal comportamento degli atomi e molecole del dielettrico; quando quest'ultimo si trova immerso in un campo elettrico esterno si ha il fenomeno della *polarizzazione*, per via dell'emergenza di un momento di dipolo elettrico.

Esistono due tipi di polarizzazione; nel primo le nuvole elettroniche degli atomi si deformano per via della presenza del campo elettrico esterno (con gli elettroni che si spostano nella direzione opposta a questo), inducendo degli eccessi di carica opposta ai due lati dell'atomo. L'altro tipo di polarizzazione è per orientamento, per materiali composti da molecole che hanno un momento di dipolo permanente proprio.

Per via della polarizzazione, nelle parti del dielettrico vicine alle armature compare una distribuzione di carica di polarizzazione σ_p , con segno opposto alla carica dell'armatura. Il contributo di questa carica di polarizzazione è opposto al contributo della carica libera sulle armature. Il campo elettrico risulta quindi ridotto e così la differenza di potenziale tra le due armature.

Nel caso in cui si introducano le cariche libere nelle armature e poi il dielettrico, non si osserva la riduzione della differenza di potenziale, perché la comparsa delle cariche di polarizzazione è compensata dal simultaneo aumento delle cariche libere fornite alle armature.

X.2 Circuiti elettrici

X.2.1 Corrente elettrica

I conduttori sono materiali (in genere metalli) in cui alcuni elettroni (circa 1-2 per ciascun nucleo) possono muoversi liberamente. Gli elettroni liberi sono anche detti *elettroni di conduzione*. Il movimento degli elettroni, accelerati da un campo elettrico esterno, può essere

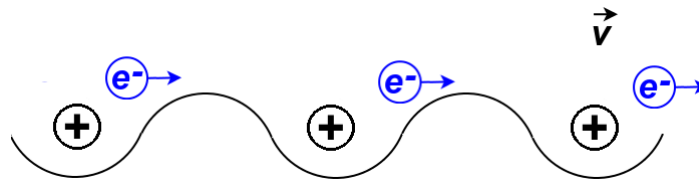


Figura X.7: Rappresentazione schematica di un metallo, con elettroni di conduzione liberi di muoversi all'interno della matrice ionica formata dai nuclei.

considerato affetto da urti con il reticolo cristallino del materiale conduttore (Fig. (X.7)). Il risultato è che, in condizioni stazionarie, possiamo assumere che la velocità degli elettroni sia una *velocità di deriva* costante. Anche se oggi sappiamo che le cariche che sono in movimento hanno carica negativa, storicamente questo movimento fu attribuito a cariche positive. Ancora oggi convenzionalmente consideriamo la *corrente elettrica* come un movimento di cariche positive. La descrizione diventa del tutto equivalente, dato che il movimento di cariche negative in una direzione può essere descritto come un movimento di cariche positive nell'altra. Quindi, se n_+ è la densità numerica di portatori di carica positiva di carica e ($1.602 \cdot 10^{-19}$ C) e \vec{v}_d la loro velocità di deriva, si introduce la *densità di corrente* all'interno di un conduttore:

$$\vec{j} = n_+ e \vec{v}_d \quad (\text{X.60})$$

La *corrente elettrica* è definita come il flusso della densità di corrente attraverso un conduttore

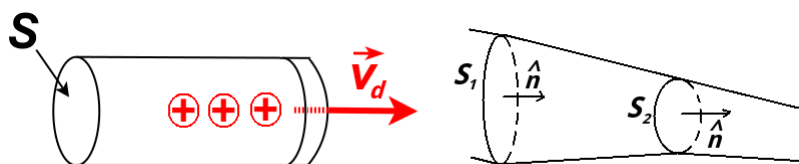


Figura X.8: Corrente elettrica all'interno di un conduttore.

di sezione S :

$$i = \Phi_j = \int_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS \quad (\text{X.61})$$

dove \hat{n} è il versore normale all'elemento infinitesimo di superficie dS . Se il conduttore ha una sezione variabile (come in Fig. (X.8)), per il principio di conservazione della carica, nell'unità di tempo all'interno del tronco non deve variare:

$$i_1 = \int_{S_1} \vec{j} \cdot \hat{n} dS \quad (\text{X.62})$$

$$i_2 = \int_{S_2} \vec{j} \cdot \hat{n} dS \quad (\text{X.63})$$

e in condizioni stazionarie:

$$i_1 = i_2 \quad (\text{X.64})$$

Attraverso il conduttore è definibile in ogni istante una *intensità di corrente elettrica*:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (\text{X.65})$$

cioè il flusso totale di carica, cioè il numero di portatori di carica che attraversano la sezione S del conduttore nell'unità di tempo. La corrente non è un vettore, però si può attribuire un verso all'interno del conduttore come quello dato dal movimento di portatori di carica positivi. L'unità di misura della corrente è l'Ampere (simbolo A):

$$1A = \frac{1C}{1s} \quad (\text{X.66})$$

La dimensione della corrente è una delle grandezze fondamentali:

$$[i] = [L^0 M^0 T^0 N^0 \Theta^0 I^1] \quad (\text{X.67})$$

La presenza di questa corrente all'interno di un conduttore, è dovuta alla presenza di campo elettrico:

$$\vec{j} = \sigma_e \vec{E} \quad (\text{X.68})$$

dove σ_e è la *conduttività elettrica* e dipende dal materiale. Tale legge è nota come *legge di Ohm per la conduttività elettrica*. La conduttività elettrica è l'inverso della *resistività elettrica*:

$$\rho_e = \frac{1}{\sigma} \quad (\text{X.69})$$

Per un conduttore lungo h e di sezione S la *resistenza* è definita come:

$$R = \rho_e \frac{h}{S} \quad (\text{X.70})$$

Se in un conduttore di lunghezza h è presente un campo elettrico, tra i suoi estremi A e B sarà



Figura X.9: Simbolo della corrente all'interno di un conduttore filiforme con $V_A > V_B$.



Figura X.10: Simbolo circuitale di un resistore.

presente una differenza di potenziale V ^[3]:

$$V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = Eh \quad (\text{X.71})$$

Indicando con $i = |\vec{j}|S$ e usando le (X.69) e corrente8 , il modulo della (X.68) diventa:

$$\underbrace{\frac{i}{S}}_{|\vec{j}|} = \underbrace{\frac{h}{RS}}_{\sigma_e} \underbrace{\frac{V}{h}}_{|\vec{E}|} \quad (\text{X.72})$$

^[3]Generalmente, quando si parla di correnti elettriche si indica per semplicità con V una differenza di potenziale, anziché usare il simbolo ΔV .

che si riduce alla *legge di Ohm*:

$$i = \frac{V}{R} \quad (\text{X.73})$$

Nei *circuiti elettrici*, dove i conduttori sono usualmente dei fili metallici, la corrente si indica come in Fig. (X.12). Normalmente, la resistenza dei fili può essere considerata molto piccola e la parte di gran lunga più consistente della resistenza in un pezzo di conduttore si localizza in elementi circuitali chiamati *resistori*, il cui simbolo circuital è in Fig. (X.10). La resistenza si misura in Ohm (simbolo Ω)

$$1\Omega = \frac{1V}{1A} \quad (\text{X.74})$$

Se all'interno di un resistore dotato di una resistenza R scorre una corrente i , per la legge di Ohm, tra l'inizio e la fine di un resistore si può misurare una differenza di potenziale (*caduta di tensione*):

$$V = Ri \quad (\text{X.75})$$

X.2.2 Forza elettromotrice

supponiamo di avere realizzato un sistema che sia capace di creare e di mantenere separate in una certa regione di spazio un accumulo di carica positiva e negativa (ad esempio “spostando” gli elettroni di conduzione dai rispettivi nuclei). Se colleghiamo i due estremi di tale sistema con un filo conduttore, naturalmente osserviamo che gli elettroni tenderanno ad essere attratti dalle cariche positive, spostandosi dunque dal “polo” negativo in basso a quello positivo in alto, instaurando così una corrente diversa da zero all'interno del conduttore.

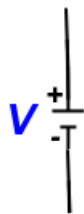


Figura X.11: Simbolo circuital di un generatore di tensione.

Tale sistema che permette la realizzazione di uno sbilancio di cariche ai suoi estremi si chiama generatore di forza elettromotrice (fem) (Fig. (X.11)). Se questo esperimento viene condotto in condizioni stazionarie, si osserva che è possibile con un tale generatore produrre una corrente che in valore assoluto rimane costante nel tempo. Tale fatto, può sembrare in contraddizione con semplici argomenti classici (generatore f.e.m., quindi forza costante, accelerazione costante). A corrente costante corrisponde infatti una velocità v degli elettroni costante! In realtà a livello microscopico il moto degli elettroni all'interno di un metallo risulta più complicato. Osserviamo infatti che all'interno del conduttore si instaura una forza che si contrappone alla fem e che dà luogo al moto viscoso degli elettroni nel metallo. La forza elettromotrice è una differenza di

potenziale che rimane costante tra i poli del generatore si misura in volt e non va confusa con una forza, che invece si misura in newton. Tale fenomeno è chiamato resistenza. La resistenza è una proprietà intrinseca del conduttore e dipende dalla temperatura del conduttore stesso. Una che si può approssimare come indipendente dalla temperatura e dalla tensione applicata si dice *resistenza ohmica* e segue fedelmente la legge di Ohm con un valore di R costante. La *caratteristica volt-amperometrica* per un elemento circuitale è la relazione che intercorre tra la differenza di potenziale misurata ai capi dell'elemento e la corrente che circola all'interno di esso. In Fig. (??) è rappresentata una caratteristica volt-amperometrica nel caso di una resistenza ohmica.

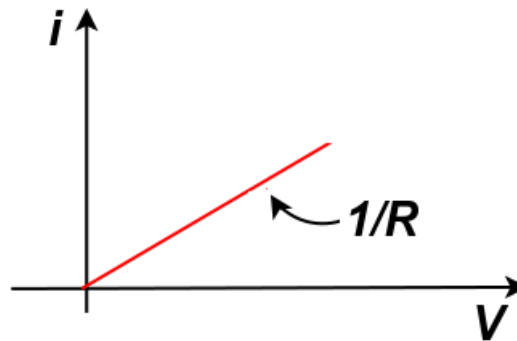


Figura X.12: Caratteristica volt-amperometrica nel caso di una resistenza ohmica.

X.2.3 Energia e Potenza

Similmente nel caso della meccanica, si definisce la potenza come l'energia spesa nell'unità di tempo $\mathcal{P} = dU/dt$, dove $U = qU$ è l'energia potenziale elettrica. Possiamo dunque calcolare la potenza spesa dal generatore per mantenere costante la corrente nel conduttore:

$$\mathcal{P} = \frac{dU}{dt} = \frac{qV}{t} = iV \quad (\text{X.76})$$

Usando la legge di Ohm:

$$\mathcal{P} = iV = i^2R = \frac{V^2}{R} \quad (\text{X.77})$$

Questa potenza è continuamente dissipata nel moto viscoso (a livello microscopico pensate ad urti degli elettroni contro i nuclei del metallo) degli elettroni nel metallo. Il metallo tenderà dunque a riscaldarsi. Tale effetto è noto come *effetto Joule*.

X.2.4 Reti elettriche

Diamo qui alcune definizioni utili per individuare i componenti di una *rete elettrica* lineare:

- *circuito*
un insieme di conduttori che si chiude su se stesso comprendente uno o più generatori di fem.

- *nodo*
punto d'incontro tra tre o più conduttori
- *ramo*
conduttore tra due nodi
- *maglia*
successione chiusa di rami
- *rete*
un insieme di maglie

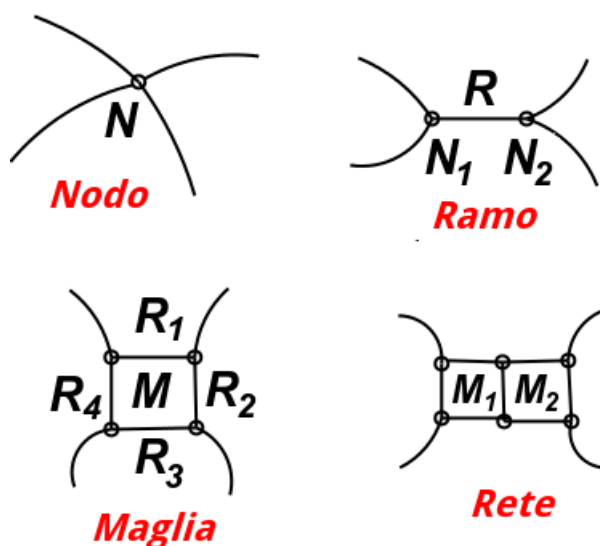


Figura X.13: Esempi di componenti di una rete.

Per le reti lineari, esistono due leggi fondamentali conosciute sotto il nome di *leggi di Kirkhoff*:

- *I° legge (dei “nodi”)*
la somma algebrica delle correnti uscenti da un nodo è pari a zero:

$$\sum_k i_k = 0 \quad (\text{X.78})$$

Le correnti entranti nel nodo hanno segno positivo, quelle uscenti hanno segno negativo.

- *II° legge (delle “maglie”)*
la somma algebrica delle cadute di tensione ai capi dei rami deve essere nulla:

$$\sum_k V_k = 0 \quad (\text{X.79})$$

Per la seconda legge invece, occorre innanzitutto definire un senso arbitrario di circolazione positivo per la corrente di maglia i , rispetto al quale sono assegnati i segni delle varie correnti che scorrono nei rami. L'analisi del circuito prevede due regole cui ci si può attenere nell'attribuire il segno algebrico alle cadute di tensioni degli elementi circuitali:

- 1 Se si percorre una resistenza R nel senso della corrente i , la caduta di tensione è $-iR$.
- 2 Se si percorre una fem ϵ nel senso della fem, la caduta di tensione è $+\epsilon$

In questo modo, se note le resistenze dei resistori e le fem dei generatori, è possibile scrivere una equazione per ogni maglia ed avere quindi n equazioni per le n correnti incognite. Se il segno risultante della corrente risulta negativo, ciò significa che la corrente circola nel verso opposto rispetto a quello arbitrariamente attribuito. Una volta note le correnti, è possibile indicare quale sia la corrente totale che scorre in ogni ramo, tenendo conto dei versi delle correnti. Risulta possibile quindi ricavare la caduta di tensione su un resistore, la potenza termica su essa dissipata oppure la differenza di potenziale tra gli estremi di un ramo.

X.2.5 Resistori in serie e in parallelo

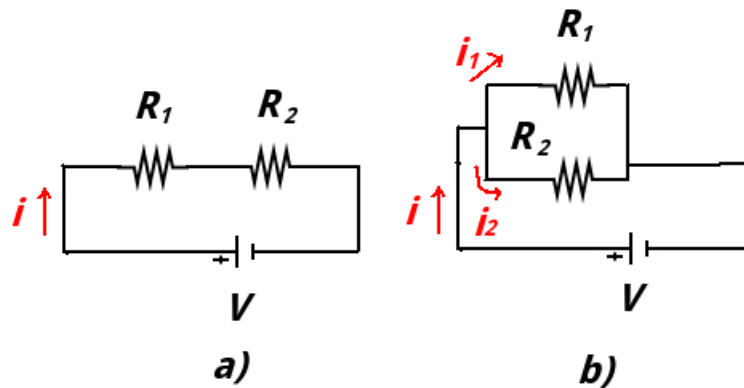


Figura X.14: Due resistenze in serie a) e in parallelo b).

Nei casi di resistenze in serie e in parallelo collegate ad un generatore di fem, ai resistori può essere sostituito uno solo dalle proprietà equivalenti R_e .

Nel caso della serie (Fig. (X.14)-a)), all'interno dei resistori circola la stessa corrente i . Quindi, per la seconda legge di Kirchhoff:

$$V - iR_1 - iR_2 = 0 \quad (\text{X.80})$$

$$V = iR_1 + iR_2 = i \underbrace{(R_1 + R_2)}_{R_e} = iR_e \quad (\text{X.81})$$

e quindi:

$$n \text{ resistenze in serie } R_e = \sum_{i=1}^n R_i \quad (\text{X.82})$$

Nel caso del parallelo (Fig. (X.14)-b)), la corrente i si divide in due correnti che circolano sui rami delle resistenze in parallelo. Gli estremi dei rami che contengono i resistori sono tenuti alla stessa tensione V . Per la prima legge di Kirchhoff:

$$i = i_1 + i_2 \quad (\text{X.83})$$

Sostituendo la legge di Ohm:

$$\frac{V}{R_e} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \quad (\text{X.84})$$

Quindi:

$$n \text{ resistenze in parallelo} \quad \frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (\text{X.85})$$

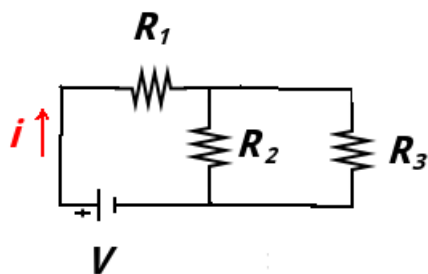


Figura X.15: Successione di resistenze in serie e in parallelo.

In Fig. (X.15) al generatore sono connesse una successione di resistenze in serie ed in parallelo. Per trovare la resistenza equivalente di calcola il parallelo tra R_2 e R_3 e il risultato si somma in serie con R_1 :

$$R_e = R_1 + \left(\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right) \quad (\text{X.86})$$

X.2.6 Partitore di tensione

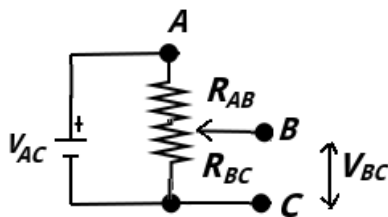


Figura X.16: Un cursore variabile B permette di dividere la resistenza R in due parti, R_{AB} e V_{BC} .

Spesso è di utilità utilizzare solo una parte della tensione fornita da un generatore di tensione con fem costante. Si costruisce quindi un *partitore di tensione*, attraverso due resistenze. Risulta tuttavia più versatile utilizzare una singola resistenza R che può essere divisa in due parti in serie da un cursore B variabile (Fig. (X.16)):

$$R = R_{AB} + R_{BC} \quad (\text{X.87})$$

dove A e C sono gli estremi della resistenza. Tale dispositivo si chiama comunemente *potenziometro*. I valori delle due resistenze sono variabili, ma vincolati ad avere una somma costante.

Gli estremi AC sono vincolati a rimanere ad una differenza di potenziale fissa V_{AC} data da un generatore di fem. La corrente i che passa attraverso le due resistenze è:

$$i = \frac{V_{AC}}{R_{AB} + R_{BC}} \quad (\text{X.88})$$

La caduta di tensione tra i terminali B e C è:

$$V_{BC} = iR_{BC} \quad (\text{X.89})$$

quindi, usando la (X.88):

$$V_{BC} = V_{AC} \frac{R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC}} \quad (\text{X.90})$$

Si ottiene quindi, al variare del cursore B una tensione V_{BC} variabile che può andare da 0 a V_{AC} e seconda del valore selezionato per R_{BC} .

X.2.7 Condensatori in serie e in parallelo

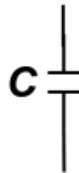


Figura X.17: Simbolo circuitale per un condensatore.

Il simbolo circuitale di un condensatore è riportato in Fig. (X.17). Anche nel caso di un successione di condensatori in serie o parallelo si può sostituire un singolo condensatore equivalente C_e . Nel caso della serie (Fig. (X.17)-a)), la carica sulle armature esterne sarà una successione di $+q$ e $-q$ per l'induzione totale e per la complessiva neutralità di carica del conduttore formato dalle armature centrali dei condensatori. Quindi:

$$V_1 = \frac{q}{C_1} \quad V_2 = \frac{q}{C_2} \quad (\text{X.91})$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \underbrace{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)}_{\frac{1}{C_e}} \quad (\text{X.92})$$

Quindi, per n condensatori in serie:

$$n \text{ condensatori in serie} \quad \frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (\text{X.93})$$

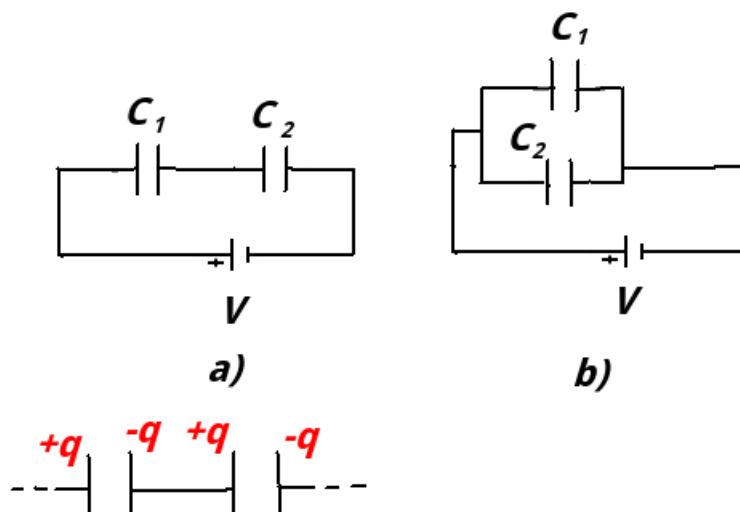


Figura X.18: Condensatori in serie a) e in parallelo b).

Nel caso del parallelo (Fig. (X.17)-b)), la tensione ai capi dei condensatori è la stessa e la carica sarà la somma delle cariche:

$$q = q_1 + q_2 \quad (\text{X.94})$$

$$C_e = \frac{q_1 + q_2}{V} = C_1 + C_2 \quad (\text{X.95})$$

Quindi, per n condensatori in parallelo:

$$n \text{ condensatori in parallelo} \quad C_e = \sum_{i=1}^n C_i \quad (\text{X.96})$$

X.3 Magnetismo

X.3.1 Fenomeni magnetici

Fin dall'antichità è noto che esistono materiali (come la magnetite Fe_3O_4) capaci di attrarre piccoli oggetti di ferro. Avvicinando una calamita a della limatura di ferro si osserva che quest'ultima è attratta dagli estremi della calamita, in cui appaiono localizzarsi le sorgenti delle forze magnetiche, cioè i *poli magnetici*. Tra due calamite, a seconda della disposizione relativa dei poli, queste forze possono essere sia attrattive che repulsive.

L'esistenza delle forze magnetiche porta naturalmente all'introduzione di un campo vettoriale, detto *campo di induzione magnetica* \vec{B} , che presenta caratteristiche diverse da quelle del campo elettrico. Ciò dipende dal fatto che, mentre esistono cariche elettriche positive separate da cariche elettriche negative, è impossibile trovare in Natura monopoli magnetici. Le sorgenti del campo magnetico si trovano sempre sotto forma di *dipoli magnetici*. Le linee di forza (tangenti punto per punto a \vec{B}) sono sempre linee chiuse che partono dal polo Nord e arrivano

al polo Sud. Dato che le linee sono chiuse, il flusso di \vec{B} uscente da una qualsiasi superficie gaussiana è sempre nullo (dato che le linee che escono vi entrano ne devono uscire). Questo risultato è il *teorema di Gauss per il campo magnetico*.

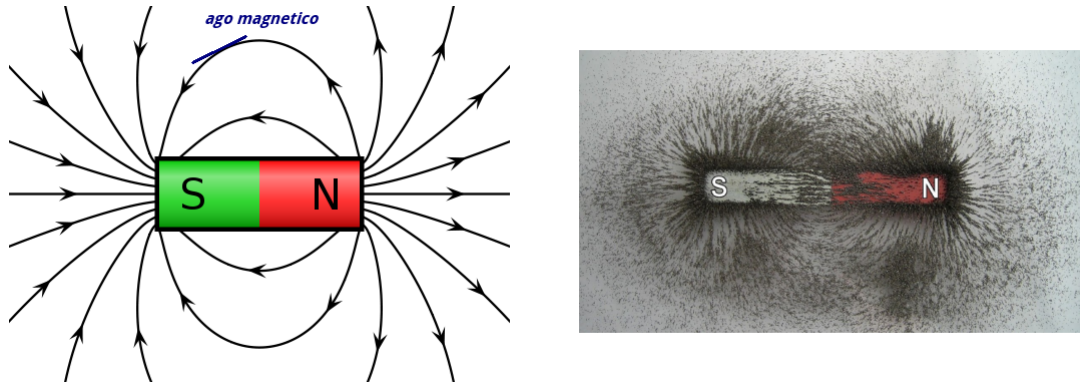


Figura X.19: A sinistra, schematizzazione di un magnete, con le linee di forza del campo che sono linee chiuse e partono dal polo Nord e arrivano al polo Sud. Un ago magnetico si dispone tangente alle linee di forza. A destra, limatura di ferro in presenza di un magnete.

Un passo decisivo per la comprensione dei fenomeni magnetici fu l'osservazione di Oersted (1820), nella quale un filo percorso da corrente genera su un ago magnetico effetti analoghi a quelli esercitati da una calamita. Negli studi che seguirono di Coulomb, Biot, Savart, Lorentz, Ampere e Maxwell, fu evidente l'esistenza di mutue azioni meccaniche tra fili percorsi da corrente e furono stabilite le relative leggi.

Poiché le correnti elettriche sono definite in termini di cariche in movimento, tutti i fenomeni magnetici furono così ricondotti ad una comune base secondo la quale essi sono generati da correnti. Anche le azioni tra materiali magnetici sono quindi interpretabili in termini di movimento di cariche microscopiche (correnti atomiche).

X.3.2 Forza di Lorentz

Consideriamo una carica puntiforme q che si muove con velocità \vec{v} in una regione di spazio in cui è presente un campo di induzione magnetica \vec{B} . Esso risentirà di una forza, detta *forza di Lorentz*:

$$\vec{F}_l = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\text{X.97})$$

Le dimensioni fisiche del vettore \vec{B} si possono trovare tramite l'analisi dimensionale della (X.97) [4].

$$[B] = \frac{[F_L]}{[q][v]} = [M^1 T^{-2} I^{-1}] \quad (\text{X.98})$$

La unità in SI sono:

$$\frac{\text{Ns}}{\text{Cm}} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \text{T} \quad (\text{X.99})$$

[4]Le dimensioni fondamentali elevate alla 0 sono omesse nella relazione finale

dove T è il *tesla* e Wb è il *weber*. Quindi, 1 T è l'intensità di un campo \vec{B} , ortogonale alla velocità \vec{v} di modulo 1 m/s di una carica puntiforme di 1 C, in grado di esercitare una forza di 1 N.

La forza di Lorentz, essendo in ogni punto perpendicolare allo spostamento, non è in grado di compiere lavoro sulla particella (e quindi di variare il modulo della sua velocità), ma di variare la direzione di \vec{v} .

Per misurare il campo di induzione magnetica di usa anche il *gauss* (simbolo G):

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T} \quad (\text{X.100})$$

Consideriamo (Fig. (X.20)) una particella di massa m , carica q e velocità \vec{v} all'interno di un

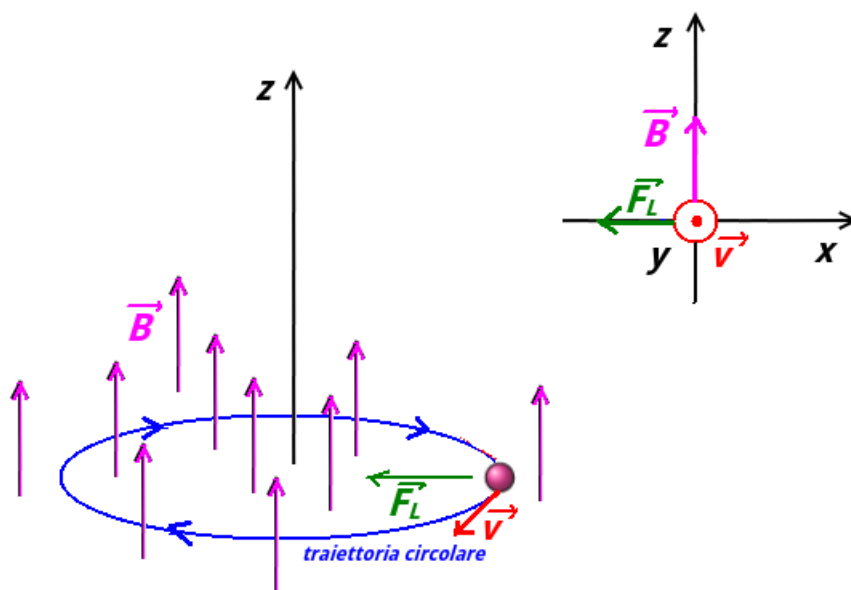


Figura X.20: Particella di massa m , carica q e velocità v all'interno di un campo magnetico uniforme \vec{B} .

campo magnetico uniforme \vec{B} perpendicolare alla velocità. La traiettoria risultante sarà nel piano contenente \vec{v} e perpendicolare a \vec{B} e di forma circolare con raggio di curvatura R . La forza di Lorentz è quindi una forza centripeta::

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \quad (\text{X.101})$$

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (\text{X.102})$$

Quindi, particelle con stessa carica, ma massa diversa possono seguono traiettorie con raggi di curvatura diversi e quindi possono essere separate (*spettrometro di massa*).

Qualora in una certa regione sia presente sia un \vec{E} che un \vec{B} , la forza risultante sulla particella sarà:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\text{X.103})$$

Il campo elettrico è responsabile di una forza parallela ad esso, mentre il campo magnetico di una forza perpendicolare sia ad esso che alla velocità della particella carica.

Con la combinazione di un campo elettrico e magnetico con opportune direzioni, verso ed intensità è possibile costruire un *selettore di velocità*. In Fig. (X.21), una sorgente di particelle emette particelle uguali (stessa massa e carica positiva) e velocità con stessa direzione e verso, ma di modulo diverso. Un campo magnetico diretto come in figura, sarà responsabile di una deviazione della traiettoria verso l'alto. Il campo elettrico sarà invece responsabile di una deflessione verso il basso. Le particelle che avranno la giusta velocità avranno che la forza di Lorentz uguaglia la forza di Coulomb e seguiranno la traiettoria originale, passando attraverso la fenditura di selezione praticata su uno schermo.

$$F_L = F_e \quad (\text{X.104})$$

$$qvB = qE \quad (\text{X.105})$$

$$\text{velocità selezionata } v = \frac{E}{B} \quad (\text{X.106})$$

Le particelle più veloci, seguiranno una traiettoria che piega in senso antiorario, le più lente

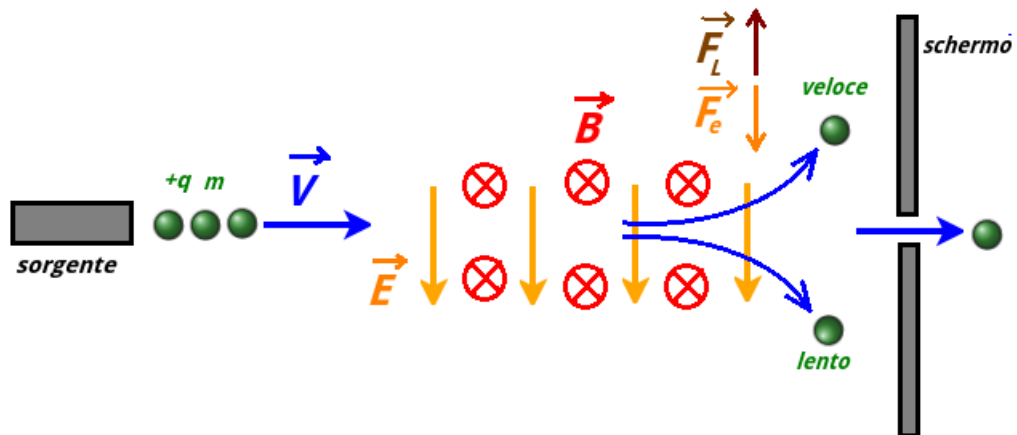


Figura X.21: Schema di un selettore di velocità per determinate direzioni dei campi \vec{B} e \vec{E} e per una carica positiva. Se carica fosse negativa, a parità di direzione e verso di \vec{B} e \vec{E} , le forze \vec{F}_L e \vec{F}_e cambiano di verso.

in senso orario. Le direzioni, verso e intensità di \vec{E} e \vec{B} devono essere scelte in base a \vec{v} , indipendentemente dalla carica, per passare le particelle con modulo della velocità corretta dalla fenditura. Se si vuol fare in modo che le particelle più veloci vadano nella parte alta dello schermo o viceversa, bisogna tenere conto anche della carica.

X.3.3 Forza su un conduttore percorso da corrente

In Fig. (X.22), un pezzo di filo cilindrico di sezione A , lunghezza l e percorso da corrente I è immerso in un campo magnetico costante \vec{B} , che forma un angolo θ con il filo, con riferimento al verso della corrente. Dato che la corrente è causata da un movimento di portatori di carica, vi

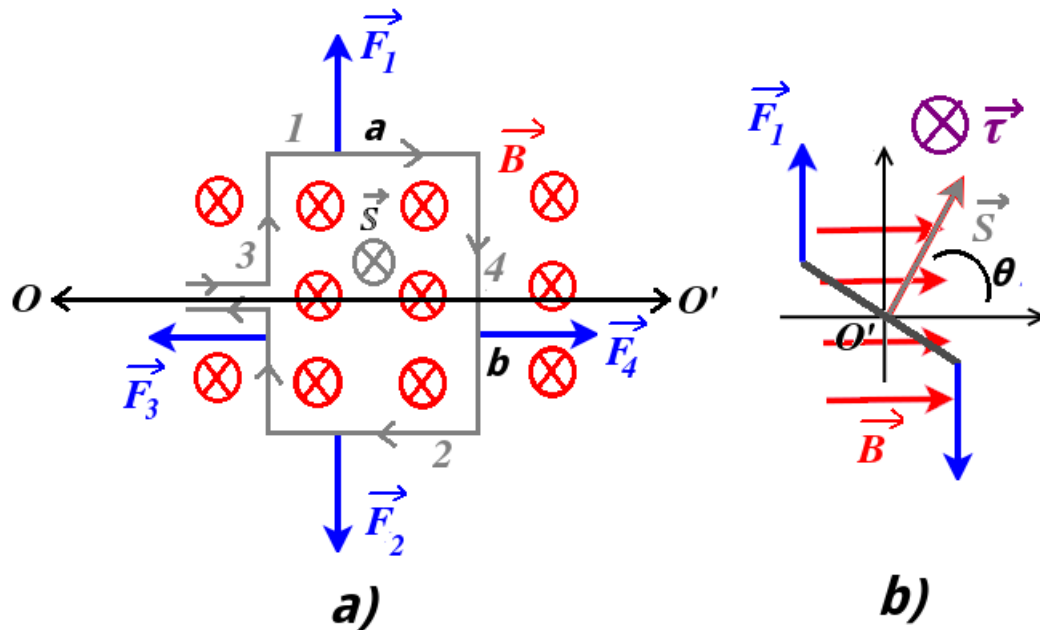


Figura X.23: Filo forma di spira percorso a da corrente all'interno di un campo magnetico costante.

Le direzioni e i versi delle forze sono dati dalla regola della mano destra del prodotto vettoriale e sono indicati in figura. Si osserva quindi che la forza risultante è nulla, perché le forze si annullano a coppie.

Pensiamo ora che la spira sia vincolata a ruotare attorno ad un asse OO' diretto come in figura, giacente sul piano della spira e passante per il suo centro. Pensiamo di ruotare la spira attorno a questo asse di un certo angolo e di osservare la situazione da una visuale perpendicolare^[5] alla precedente (Fig. (X.23)-b)). In figura, la superficie \vec{S} forma un angolo θ con \vec{B} . Le forze \vec{F}_3 e \vec{F}_4 hanno un momento risultante nullo rispetto all'asse OO' . Le forze \vec{F}_1 e \vec{F}_2 formano invece una coppia di braccio $\frac{b}{2}$. Indicando con $F = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$, il momento complessivo $\vec{\tau}$ (orientato come in figura) ha modulo (considerando le prime due delle Fig. (X.116) e che $ab = S$):

$$\tau = Fb \sin \theta = IabB \sin \theta = ISB \sin \theta \quad (\text{X.117})$$

Vettorialmente:

$$\vec{\tau} = I\vec{S} \wedge \vec{B} \quad (\text{X.118})$$

Nel caso con il filo vengano fatti N avvolgimenti (*bobina*), la Fig. (X.118) diventa:

$$\vec{\tau} = NIS \wedge \vec{B} \quad (\text{X.119})$$

Quindi per massimizzare l'effetto, conviene avvolgere più volte il filo su sé stesso, ottenendo N spire sovrapposte.

Il senso di $\vec{\tau}$ in figura è quello orario, cioè coincide con il senso di rotazione che porterebbe la direzione del vettore \vec{S} a sovrapporsi con \vec{B} percorrendo l'angolo θ . Quindi, se una spira

^[5]Si immagini di ruotare l'immagine in a) di 90° fino a portare O' verso l'alto.

percorsa da corrente è orientata in modo che \vec{S} è parallelo a \vec{B} ($\theta = 0$), il momento della forza magnetica è nullo e la spira è in equilibrio. In caso contrario (eccetto che per $\theta = \pi$), la spira tende ad allinearsi al campo a causa del momento delle forze che si instaurano.

Questo tipo di comportamento (analogo a quello di un dipolo elettrico immerso in un campo elettrico visto nel Sez. (X.1.8)) è equivalente a quello di un ago magnetico immerso nello stesso campo magnetico. Possiamo quindi definire per la spira un *momento di dipolo magnetico* $\vec{m} = I\vec{S}$ e la Fig. (X.118) diventa:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \wedge \vec{B} \quad (\text{X.120})$$

Analogamente al dipolo elettrico in un campo elettrico, la configurazione di minima energia prevede che \vec{m} sia allineata con \vec{B} .

X.3.4 Campo magnetico generato da filo percorso da corrente

La *legge di Biot-Savart* determina il campo magnetico \vec{B} generato da un conduttore percorso da corrente in un punto P .

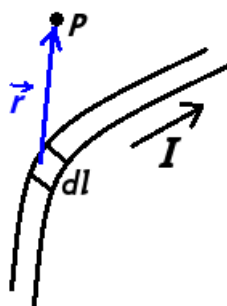


Figura X.24: Elemento infinitesimo di filo percorso da corrente che produce un contributo al campo magnetico generato in P .

In Fig. (X.25), un filo è percorso da corrente I , considerando un elemento infinitesimo di filo $dl \rightarrow d\vec{l}$, il suo contributo al campo prodotto in un punto P distante \vec{r} è ^[6]:

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \hat{r}}{r^2} \quad (\text{X.122})$$

La costante μ_0 è la *permeabilità magnetica del vuoto*:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ TmA}^{-1} \quad (\text{X.123})$$

^[6] Equivalentemente:

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad (\text{X.121})$$

Il campo totale $\vec{B}(P)$ indotto in P sarà:

$$\vec{B} = \int_l \frac{\mu_0 I d\vec{l} \wedge \hat{r}}{4\pi r^2} \quad (\text{X.124})$$

dove \vec{r} è la posizione di P rispetto ad ogni elemento $d\vec{l}$.

La legge di Biot-Savart è un calcolo in genere complicato e la (X.122) è utile soprattutto per trovare la direzione e verso di $\vec{B}(P)$ nel caso di un filo rettilineo.

La *legge di Ampere* lega il campo magnetico generato e una o più correnti, concatenate con una linea chiusa. Un percorso chiuso individua una superficie chiusa che può essere attraversata da una o più correnti, che quindi si concatenano con la linea chiusa C . La legge di Ampere afferma che:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{x} = \mu_0 \sum I_c \quad (\text{X.125})$$

dove \oint_C è il simbolo della circuitazione ^[7], $d\vec{x}$ è uno spostamento infinitesimo lungo il percorso chiuso e $\sum I_c$ è la somma algebrica delle correnti concatenate. Per essere concatenate, le correnti devono attraversare la superficie individuata dalla linea chiusa, con un segno dato dal verso di attraversamento.

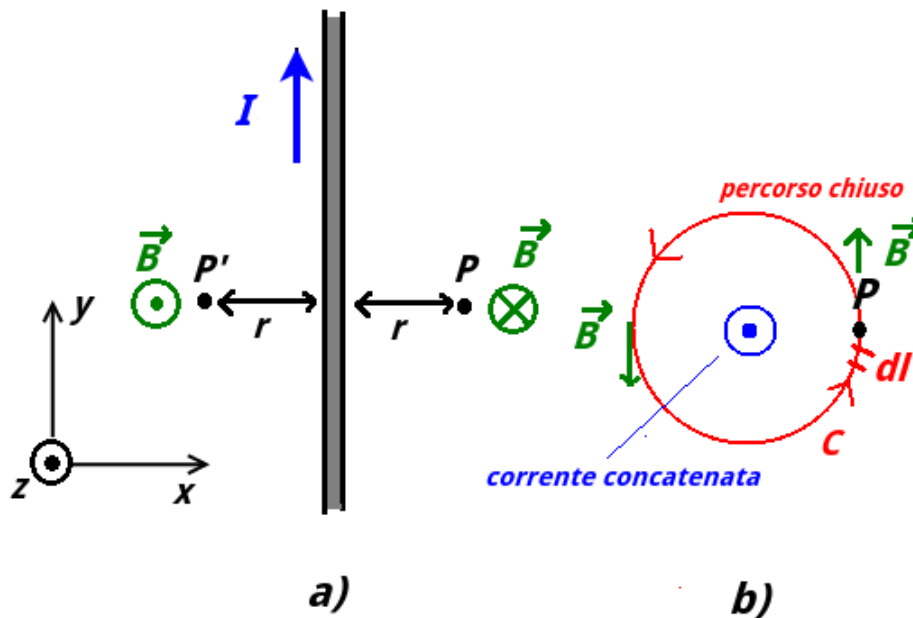


Figura X.25: Campo magnetico generato in un punto P da un filo rettilineo idealmente infinito percorso da corrente.

Si può utilizzare la legge di Ampere per calcolare il campo magnetico generato in P da un filo idealmente infinito percorso da una corrente I (Fig. (X.25)-a)), in modo alternativo (e più semplice) al calcolo dell'integrale Fig. (X.124). Osservando il filo dall'alto (Fig. (X.25)-b)),

^[7]Integrale di linea lungo un percorso chiuso.

scegliamo come linea chiusa un cerchio C centrato sul filo e di raggio r pari alla distanza di P dal filo:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{x} = I \quad (\text{X.126})$$

Per costruzione, $d\vec{x}$ è perpendicolare al raggio \vec{r} del cerchio e per la legge di Biot-Savart (Fig. (X.122)) si deduce che \vec{B} deve essere punto per punto di C parallelo al \vec{B} in tale punto; quindi $\vec{B} \cdot d\vec{x} = Bdx$. Il risultato dell'integrale (\vec{B} è costante in modulo su C per la simmetria del problema) è banalmente il valore della circonferenza moltiplicato per B :

$$B(P)2\pi r = \mu_0 I \quad (\text{X.127})$$

e quindi:

$$B(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (\text{X.128})$$

Direzione di verso di P si possono trovare tramite la regola della mano destra tramite il prodotto vettoriale Fig. (X.122) oppure ponendo il pollice della mano destra lungo la corrente, con le dita che danno punto punto direzione e verso di \vec{B} attorno al filo (Fig. (X.26)). Se si considera un punto P' diametralmente opposto a P , si trova che $\vec{B}(P')$ ha stessa direzione e verso opposto di $\vec{B}(P)$.

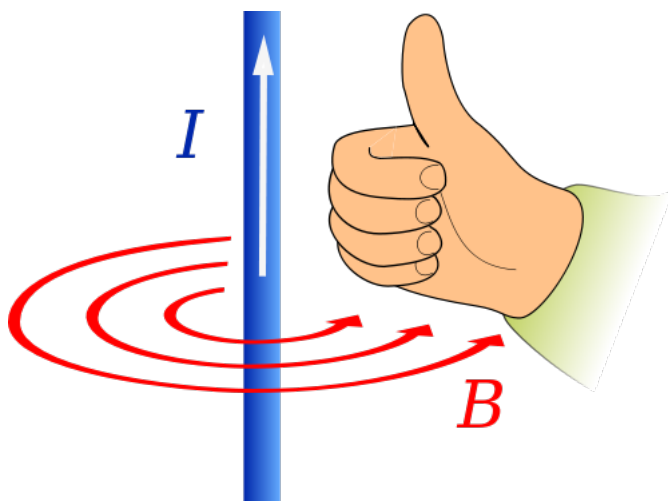


Figura X.26: Regola della mano destra per trovare il campo magnetico generato da un filo.

Se si inserisce un secondo filo parallelo al primo, di lunghezza l , percorso da una corrente I_2 ed ad una distanza r , sul secondo filo agirà una forza dovuta alla presenza del campo magnetico generato dall'altro filo:

$$\vec{F} = I_2 \vec{l} \wedge \vec{B} \quad (\text{X.129})$$

Data la Fig. (X.128), il modulo di \vec{F} è:

$$F = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi r} l \quad (\text{X.130})$$

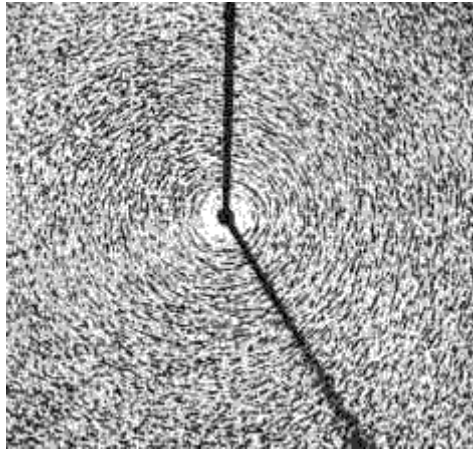


Figura X.27: Limatura di ferro che si dispone attorno ad un filo percorso da corrente per via del campo magnetico generato.

Per il terzo principio di Newton, sul primo filo agirà una forza uguale e opposta..

Storicamente, questo tipo di calcolo è stato usato per definire l'unità di misura ampere . 1 A è l'intensità di corrente che, circolando su due fili molto lunghi (idealmente infiniti) paralleli e posti a distanza di 1 m, genera tra i fili una forza per unità di lunghezza di $2 \cdot 10^{-7}$ N/m. Ciò giustifica la scelta dell'ampere come unità fondamentale, invece che il coulomb, poiché risulta più agevole la forza tra due fili rispetto che la forza tra due cariche.

X.3.5 Legge di Faraday

Dal momento che una corrente costante produce un campo \vec{B} costante (le correnti elettriche sono le sorgenti del campo magnetico), si potrebbe a torto ritenere che un campo magnetico costante possa generare una corrente continua. Se un magnete risulta in quiete rispetto ad una spira, non si osserva in essa nessuna corrente indotta. Una corrente indotta comincia a circolare nella spira soltanto quando il magnete o la spira si muovono uno rispetto all'altro, oppure quando la spira cambia la sua area o la sua orientazione rispetto al campo \vec{B} generato dal magnete.

L'esistenza di una corrente indotta nella spira è schematizzabile come una fem indotta all'interno della spira. Questa fem indotta si calcola tramite la *legge di Faraday*:

$$f_{em} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{X.131})$$

dove $\Phi_B = \vec{B}\vec{S}$ è il flusso del campo magnetico all'interno della spira. Quindi una fem indotta può comparire all'interno della spira se si verificano 3 casi che possono dare la variazione del flusso:

- 1) il campo magnetico varia nel tempo $\vec{B} = \vec{B}(P)$
- 2) varia la superficie S della spira
- 3 la spira ruota, quindi \vec{S} costante in modulo ma non in direzione e verso

Il verso della fem indotta si trova tramite la *legge di Lenz*,: il senso della corrente indotta è tale che il suo contributo al campo \vec{B} si oppone alla variazione di Φ_B che produce la corrente indotta.

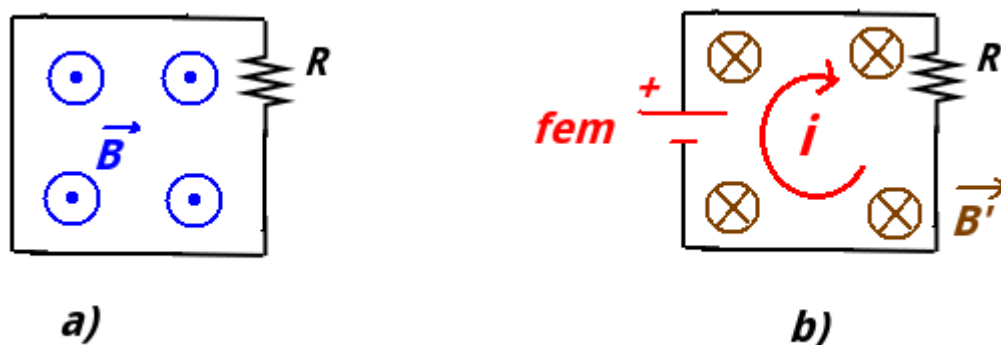


Figura X.28: Campo magnetico variabile nel tempo intercettato da una spira.

Facciamo alcuni esempi. In Fig. (X.28)-a) una spira di area S e resistenza R è immersa in un campo magnetico perpendicolare ad essa e diretto come in figura. Supponiamo che il campo magnetico sia costante in direzione e verso, ma che il suo modulo sia funzione del tempo. Ad esempio:

$$B(t) = B_0 \frac{t}{t_0} \quad (\text{X.132})$$

dove B_0 è un valore di un campo magnetico e t_0 una costante di tempo. Considerando \vec{S} e \vec{B} troviamo il modulo della fem tramite la Fig. (X.131):

$$|fem| = \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right| = \frac{S B_0}{t_0} \quad (\text{X.133})$$

Quindi, l'effetto è schematizzabile con la comparsa di una fem indotta (Fig. (X.28)-b)). La polarità della fem è tale da generare una corrente che a sua volta induce un campo magnetico \vec{B}' che si oppone a \vec{B} .

In Fig. (X.29) una spira presenta in AB un ramo che può muoversi di velocità \vec{v} . I contatti striscianti in A e in B garantiscono il contatto elettrico. L'effetto del movimento del ramo è quello di variare nel tempo l'area della spira (che in un dato istante ha area $S = Lx$) e quindi il flusso intercettato dal campo magnetico nel quale la spira è immersa. Il modulo della fem è:

$$|fem| = \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right| = BL \frac{dx}{dt} = BLv \quad (\text{X.134})$$

Per trovare il verso della fem e quindi della corrente indotta, consideriamo il ramo AB e consideriamo una corrente diretta come in figura Fig. (X.134), quindi con un generatore disposto come in figura. Usando la Fig. (X.111), si trova che la forza risultante \vec{F} , dovuta al fatto che il ramo è immerso in un campo magnetico \vec{B} , è diretto come in figura; quindi tale forza è diretta in modo da "ostacolare" il movimento del ramo nell'altra direzione. Nella pratica quindi bisogna inserire una ulteriore forza esterna diretta in verso opposto per poter mantenere la velocità \vec{v} del ramo AB. Quindi tale verso della fem soddisfa la legge di Lenz.

Nella pratica, la legge di Faraday permette di sfruttare un fenomeno naturale che compie un lavoro meccanico su un sistema per convertirlo in energia elettrica.

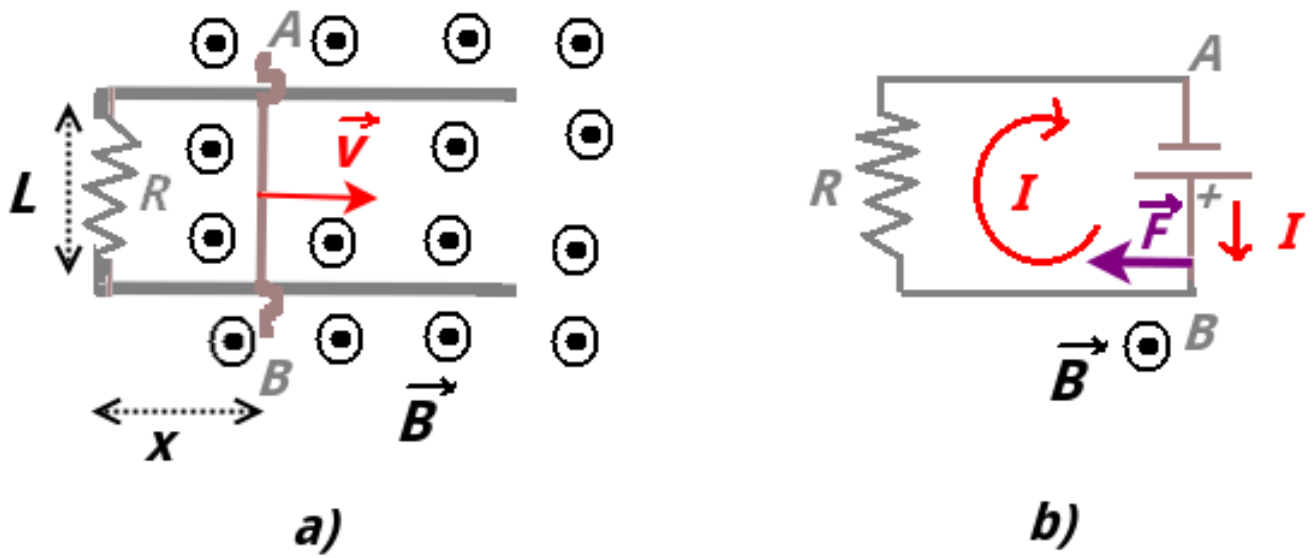


Figura X.29: Area di una spira variabile in un campo magnetico.

Analisi dimensionale

Con l'elettromagnetismo si introduce un'altra grandezza fondamentale:

- l'*intensità di corrente* (simbolo $[I]$), che in SI si misura in ampere (simbolo A)

Riepilogo formule - Elettrostatica

- *Forza di Coulomb*

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

- *Permittività elettrica del vuoto (costante dielettrica del vuoto)*

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ C}^2 \text{ m}^{-2}$$

- *Costante di Coulomb*

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 8.988 \cdot 10^9 \text{ NC}^{-2} \text{ m}^2$$

- *Costante dielettrica assoluta*

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

dove $\epsilon_r =$ *costante dielettrica relativa*

- *Campo Elettrico*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

- *Energia Potenziale Elettrica*

$$U_a - U_b = - \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$

- *Elettronvolt (eV)*

$$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

- *Potenziale Elettrostatico*

$$V = \frac{U}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- *Relazione tra Campo Elettrico e Potenziale*

$$\begin{aligned} 3D \quad \vec{E} &= -\nabla V \\ 1D \quad \vec{E} &= E_x \hat{i} = -\frac{dV}{dx} \hat{i} \end{aligned}$$

- *Flusso din un campo vettoriale \vec{v}*

$$\Phi_v = \vec{v} \cdot \Delta \vec{S} = \Delta S \vec{v} \cdot \hat{n}$$

- *Teorema di Gauss (S superficie gaussiana)*

$$\Phi_E = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

- *Capacità Elettrica*

$$C = \frac{q}{V}$$

- *Momento di Dipolo Elettrico*

$$\vec{d} = r q \hat{a}$$

Riepilogo formule - Circuiti Elettrici

- *Densità di Corrente*

$$\vec{j} = n_+ e v_d \vec{d}$$

dove n = portatori di carica positiva per unità di volume.

$$\vec{j} = n_+ e v_d \vec{d}$$

$$\vec{j} = \sigma_e \vec{E}$$

dove σ = *conduttività elettrica* e ρ_e = *resistività elettrica*.

- *Intensità di Corrente*

$$i = \Phi_j = \int_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS = \frac{dq}{dt}$$

dove \vec{S} = sezione del conduttore.

- *Resistenza*

$$R = \rho_e \frac{l}{S}$$

dove l = lunghezza del conduttore.

- *Legge di Ohm*

$$i = \frac{V}{R}$$

- *Potenza Elettrica / Effetto Joule*

$$\mathcal{P} = iV = i^2 R = \frac{V^2}{R}$$

- *1ª legge di Kirchhoff (dei "nodi")*

$$\sum_k i_k = 0$$

dove i_k è una corrente entrante/uscente da un nodo.

- *II° legge di Kirkhoff (delle “maglie”)*

$$\sum_k V_k = 0$$

dove V_k è una caduta di tensione dovuta ad un resistore percorso da corrente o una fem.

- *Resistori in Serie*

Resistenza equivalente:

$$R_e = \sum_{i=1}^n R_i$$

- *Resistori in Parallelo*

Resistenza equivalente:

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

- *Partitore di Tensione*

Resistore a tre terminali, i cui estremi AC sono tenuti ad una tensione fissa:

$$V_{BC} = V_{AC} \frac{R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC}}$$

- *Condensatori in Serie*

Capacità equivalente equivalente:

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

- *Condensatori in Parallelo*

Capacità equivalente equivalente:

$$C_e = \sum_{i=1}^n C_i$$

Riepilogo formule - Magnetismo

- *Forza di Lorentz*

$$\vec{F}_l = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

- *Forza subita da un filo percorso da corrente*

$$\vec{F} = I\vec{l} \wedge \vec{B}$$

- *Spira immersa in un campo magnetico*

$$\vec{\tau} = I\vec{S} \wedge \vec{B}$$

- *Momento di dipolo magnetico di una spira*

$$\vec{m} = I\vec{S}$$

- *Legge di Biot-Savart*

$$\vec{B} = \int_l \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \wedge \hat{r}}{r^2}$$

- *Legge di Ampere*

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_c$$

dove I_c è una corrente concatenata.

- *Legge di Faraday*

$$f_{em} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Esercizi

** Esercizio 163

Due masse identiche ($m= 5.0$ g) e con stessa carica q si trovano appese verticalmente tramite due fili inestensibili di lunghezza $l = 10$ cm che hanno in comune il punto di ancoraggio al soffitto (Fig. (X.30)). Alla condizione di equilibrio il modulo della tensione di ciascun filo è $T=0.098$ N. Si trovi q .

** Esercizio 164

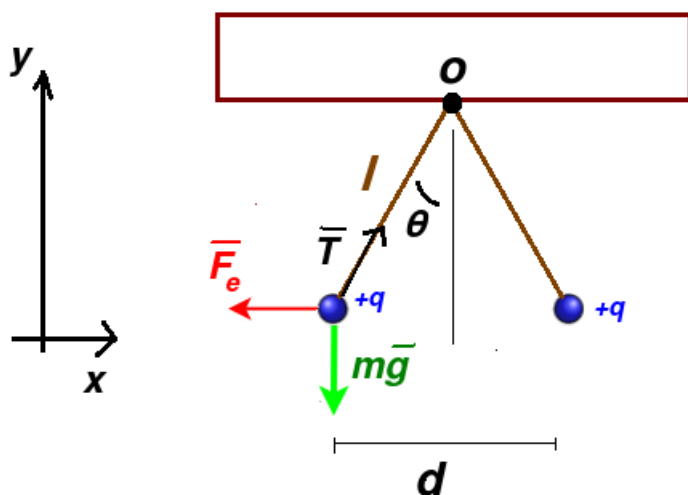


Figura X.30

Una particella di massa m 40 g e carica q 10 nC si trova in un punto molto lontano da una carica Q 1 μC e con velocità diretta verso quest'ultima e di modulo v 10 cm/s. Qual è la distanza minima d di avvicinamento?

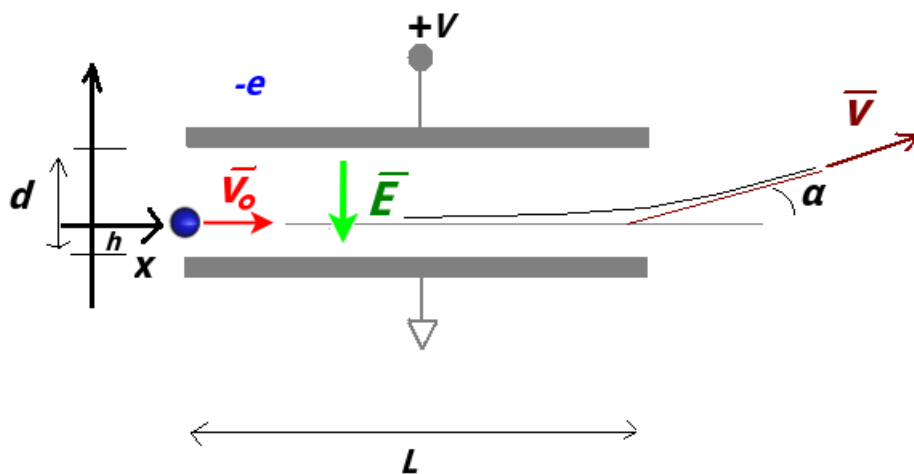


Figura X.31

*** Esercizio 165

Un elettrone entra nella zona compresa tra due armature cariche di un condensatore a facce piane e parallele con velocità parallela alle armature e di modulo v_0 10^7 m/s. Le armature sono di forma quadrata di lato L 5.0 cm e distanti tra loro di d 0.50 cm. L'armatura inferiore è collegata a massa, mentre quella superiore è alla tensione (rispetto a massa) di 10 V. Determinare la massima distanza del punto di ingresso dell'elettrone dall'armatura inferiore perché non collida con quella superiore prima di uscire dal condensatore e la velocità \vec{v} nel punto di uscita.

** Esercizio 166

In un sistema di riferimento 3D due cariche $+Q$ e $-Q$ si trovano nelle posizioni rispettivamente $\vec{r}_1=(0,0,d/2)$ e $\vec{r}_2=(0,0,-d/2)$. Si consideri un punto P di posizione $\vec{r}=(0,D,0)$. Si trovi $\vec{E}(P)$.

***** Esercizio 167

Si consideri un filo infinito carico con densità lineare di carica λ . Trovare \vec{E} in un punto P distante R dal filo con il metodo dell'integrazione dei contributi infinitesimi $d\vec{E}$ lungo tutto il filo.

** Esercizio 168

Troviamo o nell'esercizio 167 usando il teorema di Gauss invece del calcolo integrale.

*** Esercizio 169

Trovare la capacità di un condensatore cilindrico formato da un filo sottile centrale di raggio R_1 e un guscio coassiale cilindrico distante R_2 dal centro del filo. Il guscio è messo a terra, mentre sul filo centrale è disposta una carica Q . Il condensatore ha lunghezza $l \gg R_1, R_2$.

*** Esercizio 170

Un dipolo elettrico è costituito da cariche di modulo 150 nC ad una distanza di $6.20 \text{ }\mu\text{m}$ e viene immerso in un campo elettrico uniforme di intensità $E = 1100 \text{ N/C}$. Si trovi:

- il modulo del momento di dipolo
- il modulo τ del momento torcente quando \vec{E} forma un angolo di 90° con il momento di dipolo

*** Esercizio 171

(Esperimento di Millikan) Una gocciolina di olio di raggio $r = 1.64 \text{ }\mu\text{m}$ e densità di massa $\rho = 0.851 \text{ g/cm}^3$ si trova sospesa verticalmente in una camera in cui c'è un campo elettrico \vec{E} diretto verso il basso e di modulo $1.92 \cdot 10^5 \text{ N/C}$. Se la gocciolina resta in equilibrio, quanto è la sua carica espressa in multipli di e ?

*** Esercizio 172

4 cariche hanno carica $q_1 = -3.20 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $q_2 = 3.20 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $q_3 = 6.40 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $q_4 = 3.20 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. In un sistema di riferimento piano esse hanno posizioni descritte rispettivamente dai vettori \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , \vec{r}_3 e \vec{r}_4 . \vec{r}_1 ha modulo $d_1 = 3.00 \text{ cm}$ e forma un angolo di 215° con l'asse x , mentre $\vec{r}_2 = d_2 \hat{j}$, $\vec{r}_3 = d_2 \hat{i}$ e $\vec{r}_4 = \vec{0}$, con $d_2 = 2.00 \text{ cm}$. Si trovi il modulo della forza \vec{F} che la carica 4 risente per la presenza delle altre e l'angolo che questa forza forma con l'asse x .

** Esercizio 173

Nel circuito in figura X.32, la differenza di potenziale tra i capi A e B è di $\Delta V = 10 \text{ V}$. $r_1 = 1 \text{ }\Omega$, $r_2 = 2 \text{ }\Omega$, $\epsilon_1 = 12 \text{ V}$. Trovare ϵ_2 .

** Esercizio 174

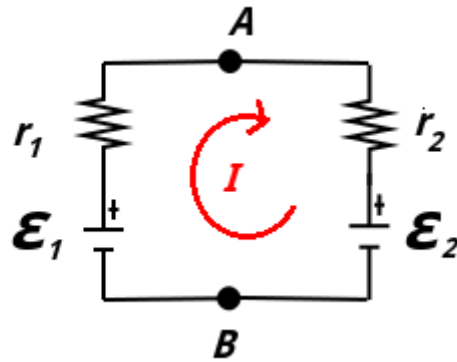


Figura X.32

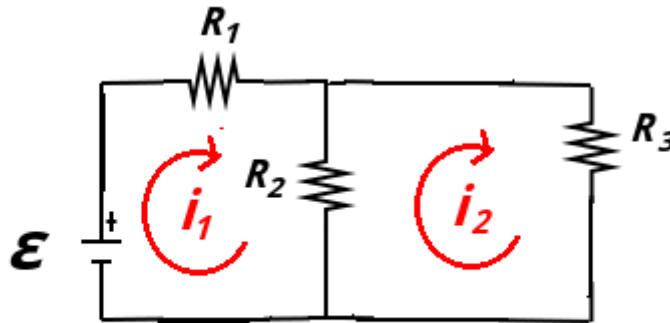


Figura X.33

- Nel circuito in figura X.33, $\epsilon = 9.0 \text{ V}$, $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$. Trovare:
- la resistenza equivalente vista dal generatore
 - le correnti di maglia i_1 e i_2 .

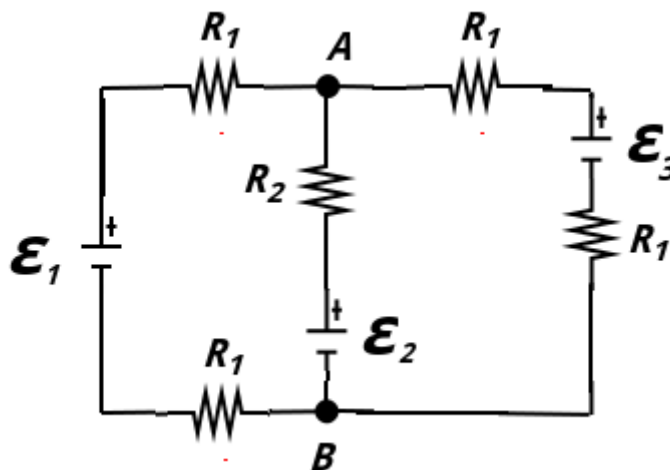


Figura X.34

***** Esercizio 175**

Nel circuito in figura X.34, $\epsilon_1 = 2.0 \text{ V}$, $\epsilon_2 = 4.0 \text{ V}$, $\epsilon_3 = 4.0 \text{ V}$, $R_1 = 1.0 \Omega$ e $R_2 = 2.0 \Omega$. Trovare la differenza di potenziale $V_A - V_B$.

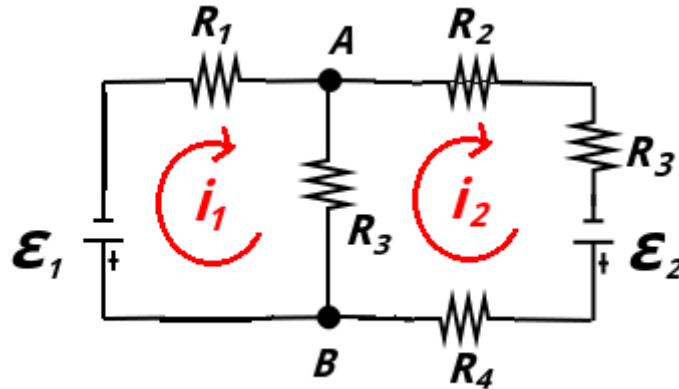


Figura X.35

**** Esercizio 176**

Nel circuito in figura X.35, $\epsilon_1 = 18 \text{ V}$, $\epsilon_2 = 12 \text{ V}$, $R_1 = 12 \Omega$, $R_2 = 2.0 \Omega$, $R_3 = 6.0 \Omega$ e $R_4 = 4.0 \Omega$. Trovare le correnti di maglia i_1 , i_2 .

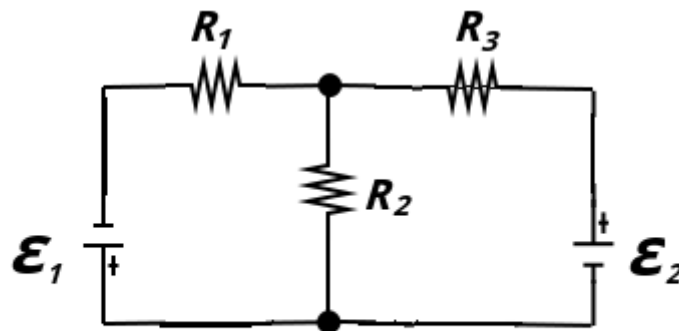


Figura X.36

**** Esercizio 177**

Nel circuito in figura X.36, $\epsilon_1 = 10 \text{ V}$, $\epsilon_2 = 2.0 \text{ V}$ e tutte le resistenze hanno valore 100Ω . Trovare la potenza termica dissipata sulla resistenza R_2 .

*** Esercizio 178**

Un protone si trova in moto lungo una direzione che forma un angolo di 23.0° rispetto ad un campo \vec{B} di 2.60 mT . La forza di Lorentz ha modulo $6.50 \cdot 10^{-17} \text{ N}$. Qual è il modulo della velocità?

**** Esercizio 179**

Un elettrone ha velocità:

$$\vec{v} = [(2.0 \cdot 10^6)\hat{i} + (3.0 \cdot 10^6)\hat{j}] \text{ m/s}$$

attraversa un campo:

$$\vec{B} = [(0.030)\hat{i} - (0.15)\hat{j}] \text{ T}$$

Qual è la forza di Lorentz \vec{F}_L ?

**** Esercizio 180**

Un singolo elettrone è accelerato da fermo da una differenza di potenziale di V 350 V. Esso entra poi in un campo magnetico perpendicolare uniforme di intensità pari a B 250 mT. Calcolare:

- la sua velocità
- il raggio di curvatura della traiettoria nel campo magnetico

*** Esercizio 181**

Un filo rettilineo lungo 1.80 m conduce una corrente di 13.0 A e forma in angolo $\theta = 35.0^\circ$ con un \vec{B} di intensità 1.50 T. Trovare il modulo della forza agente sul filo.

**** Esercizio 182**

Un cavo lungo 50.0 cm è disposto lungo l'asse x ed è percorso da una corrente di 0.500 A lungo \hat{i} . Si trova immerso in un campo $\vec{B} = (3.00\hat{j} + 10.0\hat{k})$ mT. Trovare \vec{F} .

***** Esercizio 183**

Una spira rettangolare con lati $a = 5.0$ cm e $b = 10$ cm è incernierata su un lato (come in Fig. (X.37)). La corrente ha intensità $i = 0.10$ A. In campo \vec{B} ha modulo 0.50 T. Trovare il momento torcente $\vec{\tau}$ rispetto all'asse y della cerniera.

***** Esercizio 184**

Nel circuito in figura X.38, un filo rettilineo molto lungo è percorso da corrente I . A sinistra c'è una spira con un ramo libero a cui è imposta una velocità \vec{v} (contatti striscianti). Si trovi:

- il campo \vec{B} generato dal filo
- la forza F che va applicata al ramo libero per mantenere la velocità costante.

**** Esercizio 185**

Una particella di massa m 10 g e carica q 80 μC si muove in una regione di campo \vec{B} uniforme e di accelerazione di gravità (diretta lungo l'asse y con verso negativo). La velocità \vec{v} della particella è costante, da 20 km/s in modulo e diretta secondo l'asse x (perpendicolare al campo magnetico). Quanto è \vec{B} ?

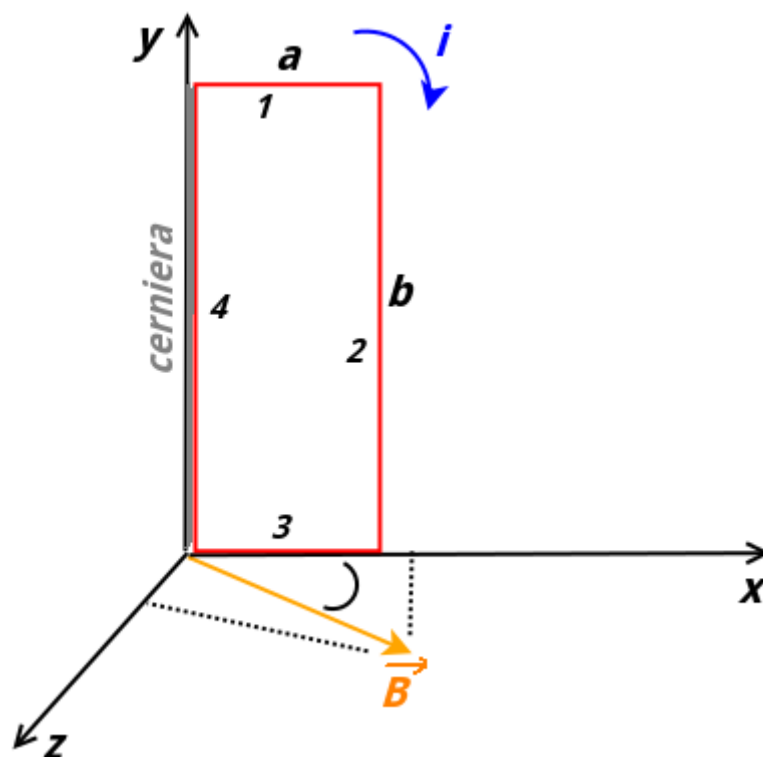


Figura X.37

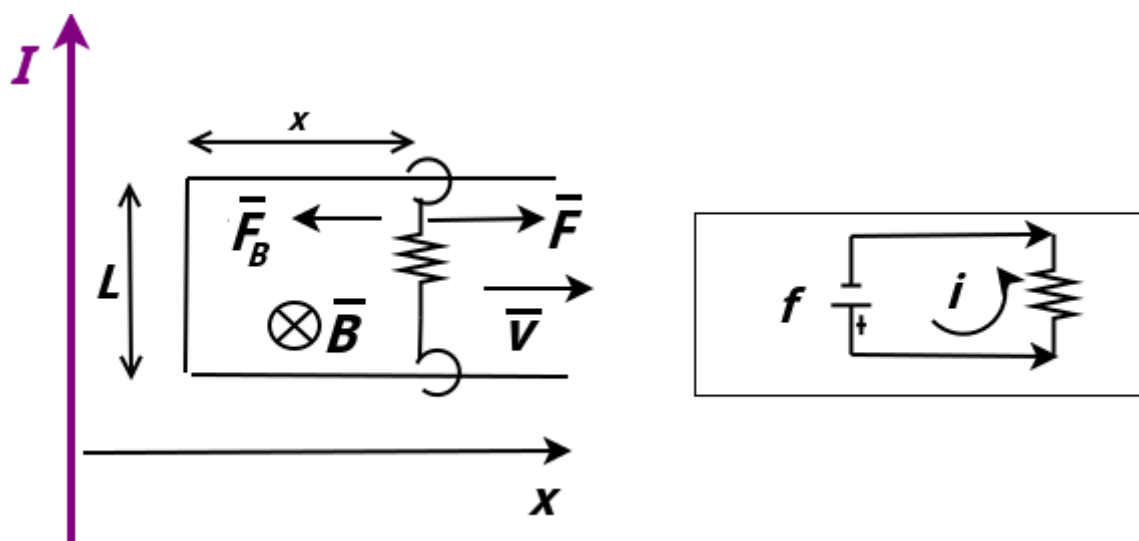


Figura X.38

**** Esercizio 186**

Quale campo magnetico è necessario, perpendicolarmente ad un fascio di elettroni che si muovono a $v = 1.30 \cdot 10^6$ m/s, per piegare il fascio su un arco circolare avente raggio di 0.350 m?

**** Esercizio 187**

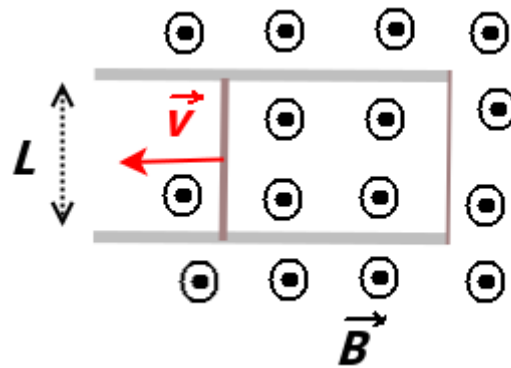


Figura X.39

Con riferimento alla Fig. (X.39), una sbarra di metallo si muove a velocità costante lungo 2 rotaie parallele metalliche, collegate con un filo conduttore. Il campo \vec{B} nel quale è immerso il sistema è di 0.350 T. Le rotaie distano $L = 25.0$ cm e il modulo v della velocità è 55.0 cm/s. Qual è la fem che si genera? Se la sbarra ha resistenza $R = 18 \Omega$, qual è la corrente nella sbarra (verso ed intensità) e la potenza termica dissipata?

Capitolo XI

Ottica

In questo capitolo tratteremo brevemente i fenomeni connessi alla radiazione elettromagnetica, sia dal punto di vista dell'ottica ondulatoria che dell'ottica geometrica.

Concetti Fondamentali

- velocità di un'onda elettromagnetica, vettore d'onda e lunghezza d'onda
- indice di rifrazione
- polarizzazione e legge di Malus
- legge di Snell
- equazione delle lenti sottili, ingrandimento e convenzione dei segni
- costruzione grafica di un'immagine tramite lenti sottili

XI.1 Onde elettromagnetiche

XI.1.1 Equazioni di Maxwell

Durante lo studio dell'elettrostatica e del magnetismo, abbiamo trattato la legge di Gauss sia per il campo \vec{E} che per il campo \vec{B} .

Tramite la Legge di Faraday abbiamo trovato che, in condizioni non stazionarie, il campo elettrico può essere generato anche da un flusso di un campo magnetico variabile nel tempo, oltre che da delle cariche. Con la legge di Ampere abbiamo trovato che la circuitazione di \vec{B} dipende dalle correnti concatenate con il percorso.

James Clerk Maxwell (Edimburgo, 1831 - Cambridge 1879) aggiunse un ulteriore termine alla legge di Ampere per tenere conto anche della variazione nel tempo di un campo \vec{E} sulla superficie delimitata dalla curva.

Quindi, in condizioni non stazionarie, cioè in presenza di campi \vec{E} e \vec{B} variabili nel tempo, $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$ non sono indipendenti.

\vec{E} può essere generato sia da cariche libere che da un \vec{B} variabile nel tempo. \vec{B} può essere generato sia da correnti che da un \vec{E} variabile nel tempo. Questi legami sono espressi tramite le *equazioni di Maxwell* e si può parlare quindi di *campo elettromagnetico*. Le analisi delle equazioni di Maxwell (matematicamente troppo complesse per il presente corso) ci rivela che in assenza di sorgenti (cioè sia di cariche che di sorgenti), il campo \vec{E} variabile può essere generato da un campo \vec{B} variabile e viceversa. Ciò non significa che il campo elettromagnetico esisterebbe anche se non vi fossero né cariche né correnti, bensì che è possibile studiarlo in una certa regione di spazio e in un certo intervallo di tempo lontani dalle sorgenti ed in modo indipendente da esse.

La soluzione delle equazioni di Maxwell è espressa sotto forma di *onde elettromagnetiche* che si propagano, anche in assenza di mezzo, ad una velocità c che nel vuoto è:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \simeq 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (\text{XI.1})$$

Nel caso in cui il mezzo non sia il vuoto (e per semplicità isotropo e trasparente):

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0 \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n} \quad (\text{XI.2})$$

dove μ_r è la *permeabilità magnetica relativa* e $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ è chiamato *indice di rifrazione*. L'indice di rifrazione dipende dal materiale e anche dalla frequenza dell'onda elettromagnetica.

XI.1.2 Caratteristiche delle onde elettromagnetiche

Le onde elettromagnetiche, come tutte le onde, hanno una ampiezza moltiplicata per un termine oscillante. Il *fronte d'onda* è una superficie su cui tutti i punti in un dato istante la fase dell'onda è la stessa. In pratica su queste superfici le onde vibrano allo stesso modo. Il caso più semplice è quello delle *onda piana*, i cui fronti d'onda sono piani. Nel caso delle , come quelle che emergono da una sorgente puntiforme, sono sfere. In ogni caso, il campo \vec{E} e \vec{B} sono in ogni punto ortogonali tra loro e alla direzione di propagazione (*onda trasversale*)

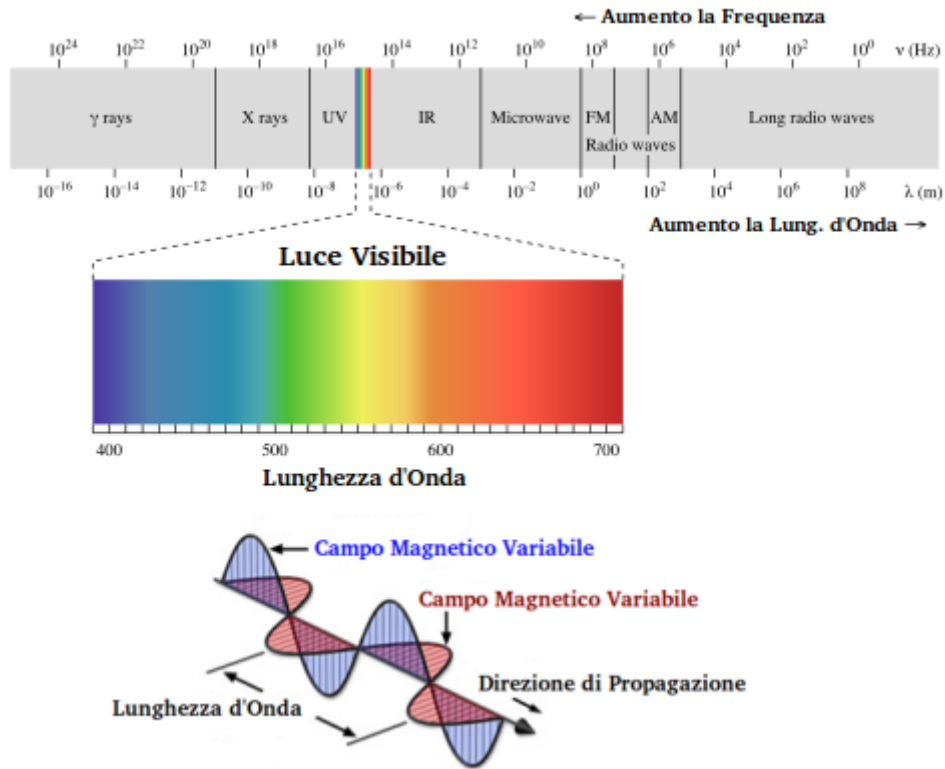


Figura XI.1: Spettro delle onde elettromagnetiche e schema di un'onda elettromagnetica polarizzata linearmente.

(Fig. (XI.1)). Questa rappresenta una notevole differenza rispetto alle onde acustiche, che sono *onde longitudinali*. La direzione è data dal *vettore d'onda* \vec{k} .

Supponiamo di avere un'onda piana, con il campo \vec{E} che oscilla lungo la direzione y e il campo \vec{B} lungo z :

$$E_y(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t) \tag{XI.3}$$

$$B_z(x, t) = B_0 \sin(kx - \omega t) \tag{XI.4}$$

dove x è la direzione di propagazione ($\vec{k} = k\hat{i}$). E_0 e B_0 sono le ampiezze dei campi. Il modulo di \vec{k} è il *numero d'onda* k :

$$k = \frac{\omega}{c} \tag{XI.5}$$

dove c è la velocità dell'onda e ω la pulsazione.

Se in un istante t_0 il campo $E(x, t_0)$ dell'onda, questo valore si ripete identico per ogni coppia di coordinate:

$$k(x_2 - x_1) = 2\pi \tag{XI.6}$$

La distanza $\lambda = (x_2 - x_1)$ è la *lunghezza d'onda*:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{XI.7}$$

Se fissiamo una posizione $x = x_0$, in questa posizione osserviamo una ampiezza $E(x_0, t)$ che si ripresenta identica per ogni coppia $t_2 - t_1$ tali che

$$\omega(t_2 - t_1) = 2\pi \quad (\text{XI.8})$$

L'intervallo di tempo $(t_2 - t_1)$ è il periodo T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} \quad (\text{XI.9})$$

dove ν è la frequenza. Dalla (XI.5) e dalla (XI.7) si ricava un'altra relazione utile:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (\text{XI.10})$$

Il periodo (insieme alla frequenza e alla pulsazione) caratterizzano la stessa onda in ogni mezzo e dipende solo dalle caratteristiche della sorgente. La lunghezza d'onda e il vettore d'onda dipendono invece dal mezzo attraverso il quale l'onda si sta propagando. Se λ_0 è la lunghezza d'onda dell'onda elettromagnetica nel vuoto, la lunghezza d'onda λ' in un mezzo con indice di rifrazione n sarà:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{n} \quad (\text{XI.11})$$

Al variare della frequenza (e quindi della lunghezza d'onda), si descrive lo spettro elettromagnetico (Fig. (XI.1)). La luce visibile all'occhio umano è una fetta molto sottile di questo spettro (da lunghezza d'onda dai circa 700 nm ai circa 400 nm).

L'onda elettromagnetica trasporta energia con direzione e verso dato dal *vettore di Poynting* \vec{S} :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \quad (\text{XI.12})$$

Le sue dimensioni, che sono quindi quelle dell'intensità dell'onda elettromagnetica, è si una potenza \mathcal{P} divisa una area A :

$$[S] = \frac{\mathcal{P}}{A} \quad (\text{XI.13})$$

Essendo l'onda una grandezza oscillante, la sua intensità I è valutata tramite un valore medio efficace che si trova proporzionale al modulo dell'ampiezza del campo elettrico al quadrato ^[1]:

$$I \propto E_0^2 \quad (\text{XI.15})$$

^[1] Precisamente,

$$\frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 \quad (\text{XI.14})$$

XI.1.3 Polarizzazione

Il piano che contiene il campo elettrico dell'onda si chiama *piano di oscillazione*. La *polarizzazione* è una caratteristica peculiare delle onde trasversali e che non si può associare al suono, essendo un'onda di tipo longitudinale. Se il campo elettrico durante la propagazione risulta sempre diretto lungo la stessa direzione (e quindi il piano di oscillazione) l'onda è *polarizzata linearmente*. La direzione di \vec{B} sarà una conseguenza immediata di quella assunta da \vec{E} . Nel caso in cui il campo \vec{E} e il \vec{B} ruotino durante la propagazione, la polarizzazione è *ellittica* (tra le quali c'è anche il caso *circolare*).

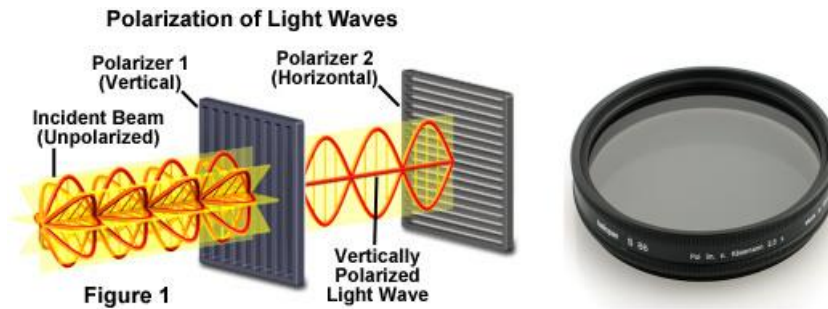


Figura XI.2: Polarizzatore lineare.

I *polarizzatori* (o *filtro polarizzatore*) è un materiale (usualmente una lamina) anisotropo che trasmette una polarizzazione e assorbe tutte le onde che non lo sono. Nel caso di un polarizzatore lineare, il filtro trasmette le onde polarizzate secondo la direzione data dal suo *asse di trasmissione*. Una volta che un'onda attraversa un polarizzatore lineare, ne esce con una polarizzazione lineare (la direzione del campo elettrico) coincidente con quella dell'asse di trasmissione del polarizzatore. L'intensità in uscita sarà poi ridotta di un fattore dato dalla *legge di Malus*. Se I_0 è l'intensità di un'onda polarizzata linearmente, la sua intensità in uscita I dal polarizzare è:

$$I = I_0 \cos^2 \theta \tag{XI.16}$$

dove θ è l'angolo tra la direzione della polarizzazione lineare incidente (la direzione del campo \vec{E}) e l'asse di trasmissione del polarizzatore.

Nel caso in cui la radiazione in ingresso al polarizzatore lineare è non polarizzata (ci sono più componenti con diverse direzioni del campo elettrico), l'onda il uscita avrà polarizzazione lineare data dall'asse di trasmissione del polarizzatore e intensità data da:

$$I = \frac{I_0}{2} \tag{XI.17}$$

La luce solare oppure la luce delle lampade non è polarizzata (a meno che non passi attraverso un filtro.) La luce riflessa da diverse superfici è caratterizzata da una componente rivelante di polarizzazione ^[2]. Un *laser* è un tipo di radiazione ottica che presenta un elevato grado di polarizzazione.

^[2]La ragione discende dall'elettromagnetismo ed è chiamata *riflessione di Fresnel*. Ogni volta che un'onda passa da un mezzo trasparente ad un altro con un diverso indice di rifrazione, c'è sempre una piccola componente riflessa che dipende sia dal salto di indice di rifrazione che dalla polarizzazione della luce

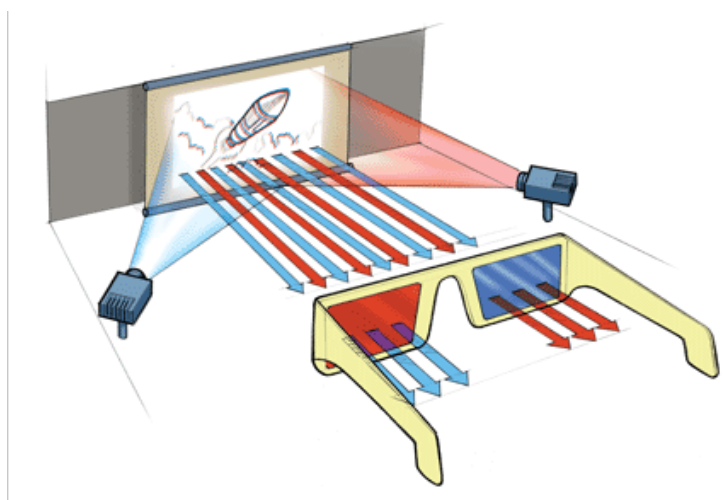


Figura XI.3: Nel cinema 3D, vengono proiettati due film, uguali a parte l'essere ripresi da due posizioni leggermente diverse. Durante la proiezione dei filtri polarizzatori permettono il passaggio solo di uno dei due per ogni occhio. Il cervello poi percepisce l'immagine risultante come tridimensionale.

XI.1.4 Interferenza e diffrazione

Il carattere ondulatorio della radiazione elettromagnetica permette l'insorgenza del fenomeno dell'*interferenza*. Per essere osservato è necessario avere a che fare con radiazione monocromatica, cioè con la stessa frequenza. In Natura si può osservare nel caso delle pellicole sottili, come ad esempio una bolla di sapone o una macchia d'olio sopra uno strato di acqua (Fig. (XI.4)). Una luce bianca (contenente diverse componenti a diverse frequenze) compie percorsi diversi all'interno del film per via della *rifrazione* (che vedremo nella prossima sezione). Dopo una parziale riflessione dovuta allo strato sottostante la radiazione torna indietro con percorsi diversi a seconda della frequenza. Si hanno quindi a diversi angoli di osservazione diverse frequenze che compiono una interferenza costruttiva, mentre altre distruttiva. Alla base dell'interferenza nel caso di un fascio laser, funzionano strumenti come l'*interferometro*, usato per misurare piccolissime distanze, oppure la lettura dei CD e DVD.

Grazie all'interferenza, è possibile osservare il fenomeno della *diffrazione*, grazie alla quale la luce riesce ad "aggirare" piccoli ostacoli. Se praticiamo un piccolo foro (o fenditura) su uno schermo opaco investito da una radiazione elettromagnetica piana, questo diventerà una sorgente di onde sferiche (*principio di Huygens*) che interferiranno costruttivamente o distruttivamente in diversi punti di uno schermo di osservazione posto a diverse distanze (figura di diffrazione fatta da massimi e minimi di intensità). La radiazione incidente il primo schermo deve però essere *coerente*, cioè tutte le onde devono partire dalla sorgente in fase. Se questa condizione non è verificata si osserva un effetto medio che distrugge la figura di diffrazione. Grazie all'esperimento della doppia fenditura, Young (Milverton 1773 - Londra 1829) dimostrò la natura ondulatoria della luce (Fig. (XI.5)).

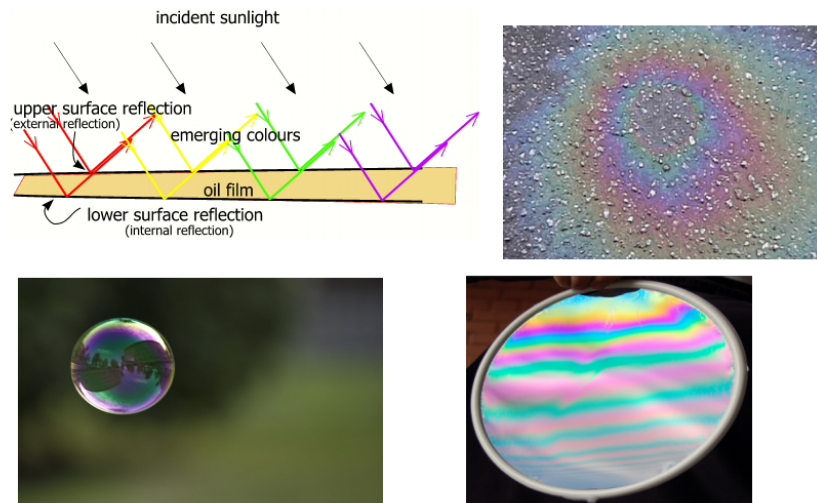


Figura XI.4: Interferenza nel caso delle pellicole sottili.

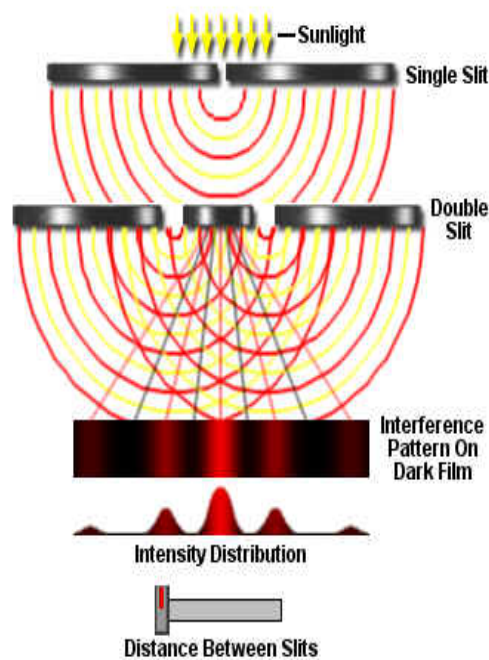


Figura XI.5: Schema dell'esperimento di Young.

XI.2 Ottica geometrica

XI.2.1 Riflessione e rifrazione

Nella lezione precedente abbiamo introdotto le onde elettromagnetiche ed abbiamo fornito delle espressioni per l'andamento dei campi in casi molto semplici. In generale, per trovare l'andamento spazio-temporale delle onde elettromagnetiche per particolari configurazioni è necessario risolvere le equazioni di Maxwell con le relative condizioni al contorno (es. presenza di specchi metallici o altri materiali). D'altro canto, esiste tutta una serie di fenomeni

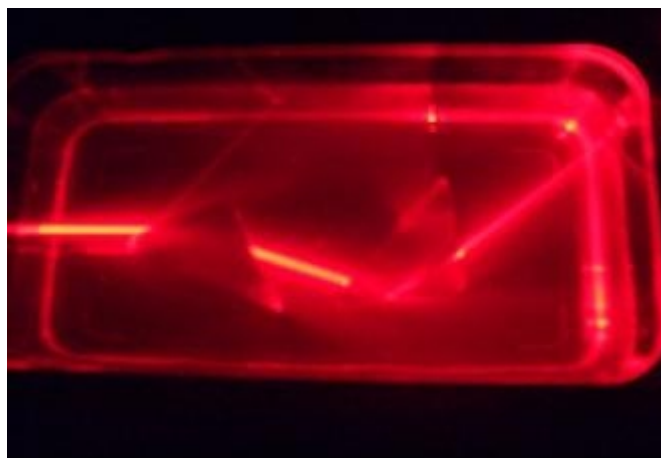


Figura XI.6: Propagazione di un fascio laser attraverso una vaschetta contenente acqua e prismi. La propagazione del raggio laser segue in questo caso le leggi dell'ottica geometrica. Particelle diffusive disperse in acqua permettono di vedere indirettamente il cammino del fascio.

elettromagnetici, principalmente nella parte visibile dello spettro, che può essere descritta con una serie di leggi elementari, principalmente geometriche, che non richiedono la soluzione delle equazioni di Maxwell. Tali fenomeni vengono descritti dalle leggi della cosiddetta *ottica geometrica*. Questa è una approssimazione valida quando le distanze in gioco sono molto maggiori della lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica. Si trascurano quindi gli effetti dell'interferenza e della diffrazione.

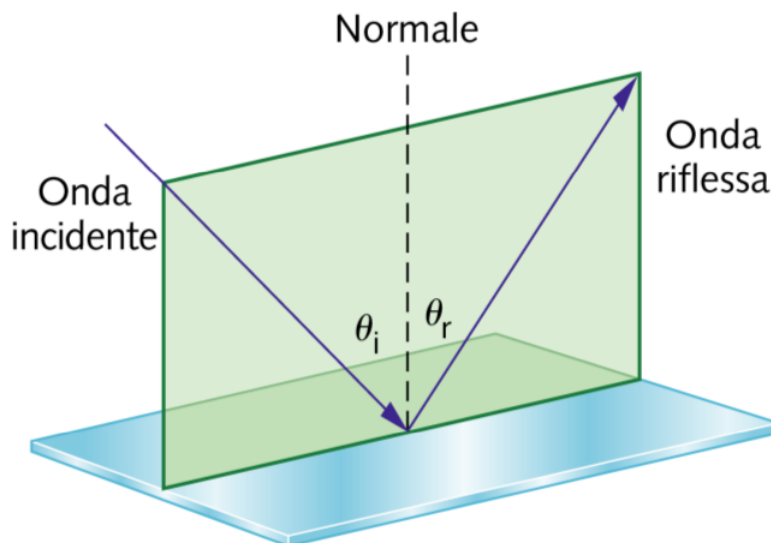


Figura XI.7: Riflessione da superficie piana.

Alla base dell'ottica geometrica vi è il concetto di *raggio*, che è in ogni punto perpendicolare ai fronti d'onda. Le leggi dell'ottica geometrica descrivono il comportamento dei raggi che rappresentano l'onda.

Un classico esempio a cui si applica l'ottica geometrica è la *riflessione* della luce su di una superficie piana. In tal caso, si dimostra che i raggi che incidono con un certo angolo vengono riflessi con lo stesso angolo ($\theta_i = \theta_r$) (Fig. (XI.7)). Il raggio incidente, quello riflesso e la normale alla superficie giacciono sullo stesso piano. Il raggio incidente e quello riflesso sono su lati opposti rispetto alla normale. Tutte queste regole identificano la cosiddetta riflessione speculare. Una buona superficie riflettente è una superficie metallica liscia. Ogni volta che vi è un passaggio tra mezzi diversi, anche trasparenti, c'è sempre un contributo riflesso (riflessione di Fresnel). Se la superficie presenta irregolarità, la luce incidente viene *diffusa* su diversi angoli. Nella *rifrazione* si ha un cambiamento di direzione di raggio di luce quando passa

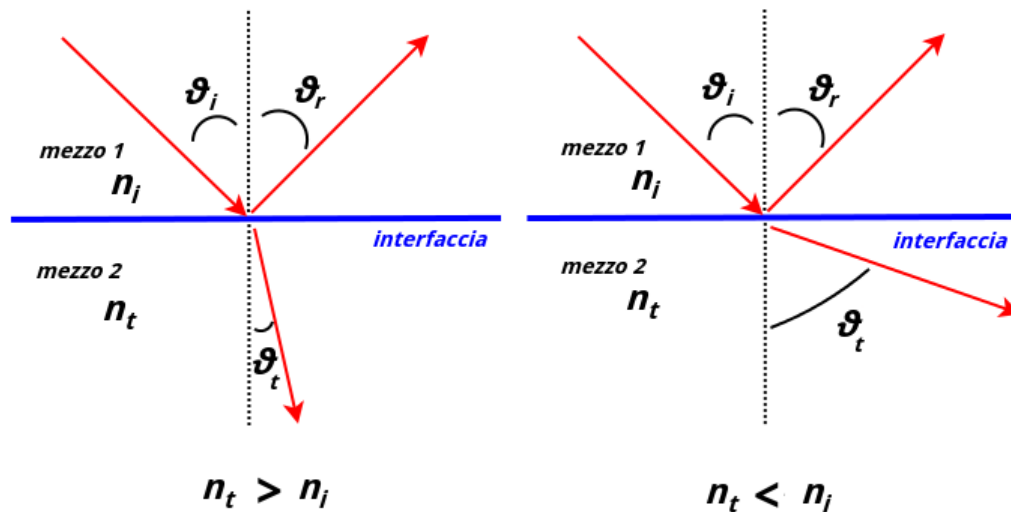


Figura XI.8: La legge di Snell per la rifrazione.



Figura XI.9: L'illusione della matita spezzata è data dal fenomeno della rifrazione.

attraverso mezzi diversi. Nella rifrazione il raggio incidente, il raggio riflesso, il raggio rifratto e la normale alla superficie di separazione tra i due mezzi giacciono sullo stesso piano. Il raggio incidente ed il raggio rifratto sono su lati opposti rispetto alla normale. Il legame tra l'angolo di incidenza θ_i e l'angolo di rifrazione θ_t è governato dalla *legge di Snell*:

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t \quad (\text{XI.18})$$

In Fig. (XI.10) ci sono i due casi possibili in base ai due valori di indice di rifrazione.

Dato che l'indice di rifrazione dipende dalla frequenza dell'onda, nei passaggi tra materiali diversi una luce con diverse componenti in frequenza può essere scomposta (*dispersione ottica*). Tale fenomeno è evidente nel *prisma* (Fig. (XI.11)).

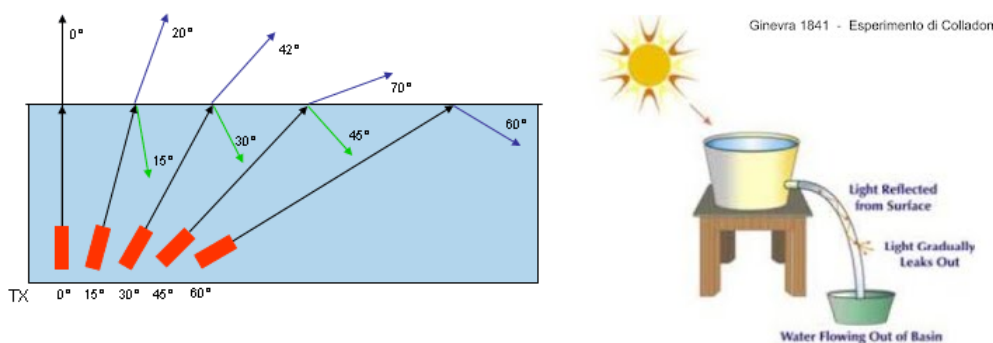


Figura XI.10: A sinistra, la rifrazione passando da un mezzo con indice di rifrazione più alto a uno con un indice più basso. A destra, l'esperimento di Colladon (acqua→aria), alla base delle moderne fibre ottiche (vetro→aria o vetro a più basso indice di rifrazione).

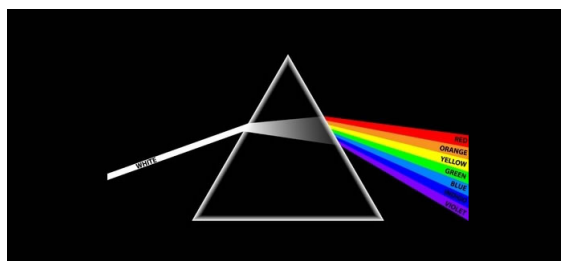


Figura XI.11: Schematizzazione della scomposizione della luce visibile in un prisma.

Nel caso in cui $n_t < n_i$ (ad esempio, per un raggio che parte dall'acqua o dal vetro e si trasmette in aria) esiste un angolo di incidenza critico per il quale θ_t diventa uguale a $\pi/2$. In questo caso, tutta l'energia della radiazione va nella componente riflessa e si ha il fenomeno della *riflessione totale*. Nel caso $n_t < n_i$, si trova quindi per θ_i un *angolo critico* θ_c

$$n_i \sin \theta_c = n_t \sin \frac{\pi}{2} \quad (\text{XI.19})$$

$$n_i \sin \theta_c = n_t \quad (\text{XI.20})$$

$$\theta_c = \arcsin \frac{n_t}{n_i} \quad (\text{XI.21})$$

Tale fenomeno, evidenziato per la prima volta da Colladon nel 1841, è oggi alla base delle moderne fibre ottiche.

XI.2.2 Lenti sottili

Una *lente* è composta da un materiale trasparente (usualmente vetro) con curvature diverse sulle due facce. I raggi che la attraversano possono essere fatti convergere o divergere a seconda che la lente sia rispettivamente *convergente* o *divergente*. Se i raggi di curvatura sono molto più grandi dello spessore della lente, questa è detta *sottile* e il suo comportamento è più facilmente schematizzabile.

Il diverso tipo di formazione dell'*immagine* che si ha sfruttando il fenomeno della riflessione e quello della rifrazione porta al concetto di immagine *reale* e immagine *virtuale*. Un'immagine si definisce reale quando i raggi di luce che partono da un punto dell'*oggetto* convergono in un punto corrispondente dell'immagine. Questo è ad esempio il caso delle lenti delle macchine fotografiche (e dell'occhio umano). Un'immagine si definisce virtuale quando i raggi di luce che partono da un punto dell'oggetto sono diretti come se divergessero da un punto dell'immagine, anche se in realtà non passano attraverso il punto dell'immagine ^[3].

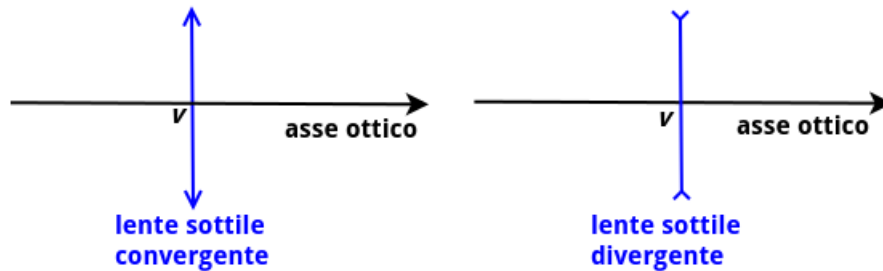


Figura XI.12: Schematizzazione delle lenti sottili.

L'asse che passa dal centro (*vertice*) V della lente si chiama *asse ottico*. Convenzionalmente, i raggi si propagano da sinistra verso destra. Nel caso di lenti sottili, una lente convergente è schematizzata con un segmento con due frecce uscenti agli estremi, mentre una divergente con frecce entranti (Fig. (XI.12)).

Raggi paralleli all'asse ottico nel caso di una lente convergente, vengono fatti convergere dalla lente in un punto a destra della lente detto *fuoco* (Fig. (XI.13)-a)). Nel caso della lente divergente, un raggio parallelo all'asse ottico viene fatto divergere dalla lente in modo tale che sembra emergere da un fuoco posto a sinistra della lente (Fig. (XI.13)-b)). Nel caso di una lente convergente, un raggio che emerge dal suo fuoco posto a sinistra della lente, viene deviato in modo da risultare parallelo all'asse ottico (Fig. (XI.13)-c)). Nel caso di una lente divergente, un raggio, il cui prolungamento è indirizzato verso il fuoco a destra della lente, viene deviato parallelamente all'asse ottico (Fig. (XI.13)-d)). Un fascio che intercetta il vertice V della lente si propaga inalterato (Fig. (XI.13)-e) e -f)). Una sorgente molto lontana da una lente invia, in buona approssimazione dei raggi paralleli all'asse ottico verso la lente. Un altro modo per inviare raggi paralleli ad una lente è quello di utilizzare un'altra lente che sia convergente e con la sorgente puntiforme di luce posta nel suo fuoco (*collimatore*).

La distanza tra V e ogni fuoco è la *distanza focale* (o semplicemente *focale*) f ; questa distanza è legata all'unità di misura della *dioptria*, che misura il reciproco di f :

$$\text{diottria: misura di } \frac{1}{f} \quad (\text{XI.22})$$

1 diottria è equivalente a 1 m^{-1} . La distanza focale caratterizza completamente il comportamento ottico di una lente sottile. La distanza focale ha un segno che dipende dalla lente:

- Lente convergente: $f > 0$

^[3]Nel caso degli specchi piani, non trattato qui, le immagini, che sembrano provenire dalla parte opposta dello specchio, sono virtuali.

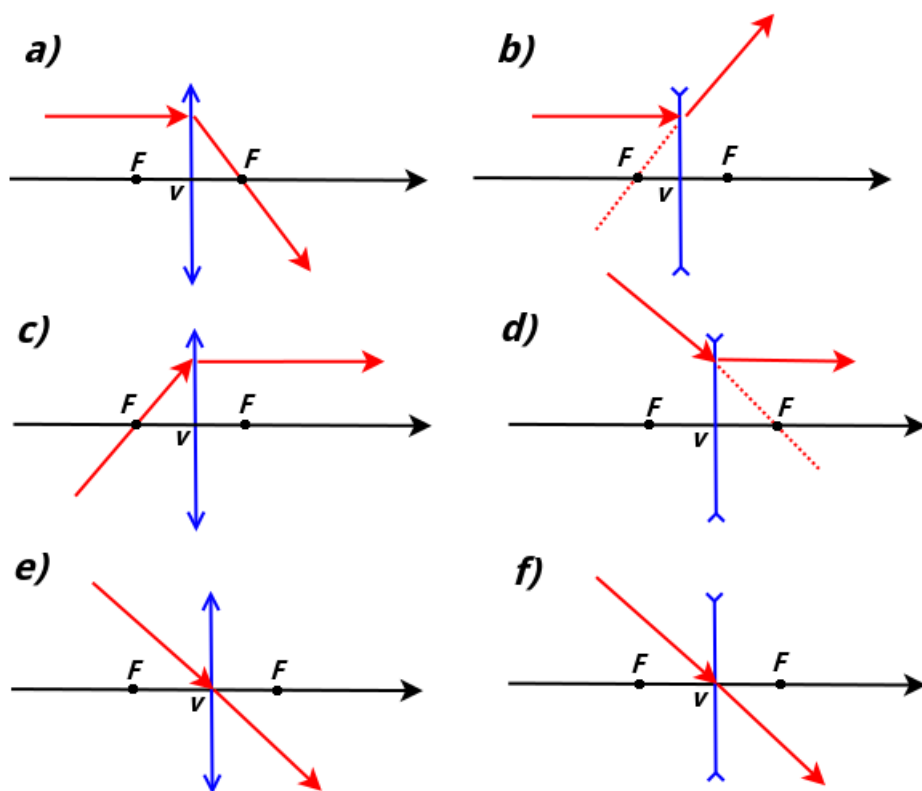


Figura XI.13: Fuoco di una lente e raggi passanti per il vertice della lente.

- Lente divergente: $f < 0$

Individuata la posizione dell'oggetto e dell'immagine sull'asse ottico, le loro distanze lungo l'asse ottico da V vengono indicate rispettivamente con p e q . Nella maggioranza dei casi, si

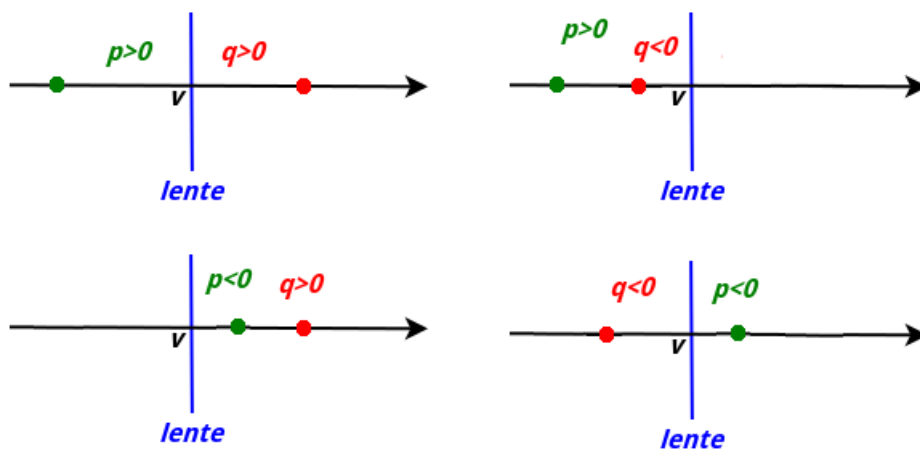


Figura XI.14: Convenzione dei segni di p e q .

usa la seguente convenzione dei segni per p e q (Fig. (XI.14)):

- Se l'oggetto è a sinistra della lente: $p > 0$

- Se l'oggetto è a destra della lente: $p < 0$
- Se l'immagine è a destra della lente: $q > 0$
- Se l'immagine è a sinistra della lente: $q < 0$

Nel caso di una lente sottile, p , q e f sono legati dalla seguente relazione (*equazione delle lenti sottili*):

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (\text{XI.23})$$

Si possono quindi determinare le posizioni di p e q sull'asse ottico data una lente con focale f .

Nel caso di un oggetto esteso (con altezza y rispetto all'asse ottico), la costruzione grafica dell'immagine (di altezza y') avviene sfruttando i raggi che partono dal vertice dell'oggetto e passano (oppure i cui prolungamenti passano) per i fuochi e per il vertice. Infatti da ogni punto dell'oggetto passano dei raggi che vanno in ogni direzione e quindi se ne possono scegliere almeno due che permettono di costruire graficamente l'immagine. L'*ingrandimento* è dato da:

$$I = \frac{y'}{y} = \frac{q}{p} \quad (\text{XI.24})$$

Se $I > 0$, allora l'immagine ha lo stesso orientamento (in riferimento all'asse ottico) rispetto all'oggetto che l'ha generata. In caso contrario, l'immagine sarà ribaltata. Nelle figure XI.15,

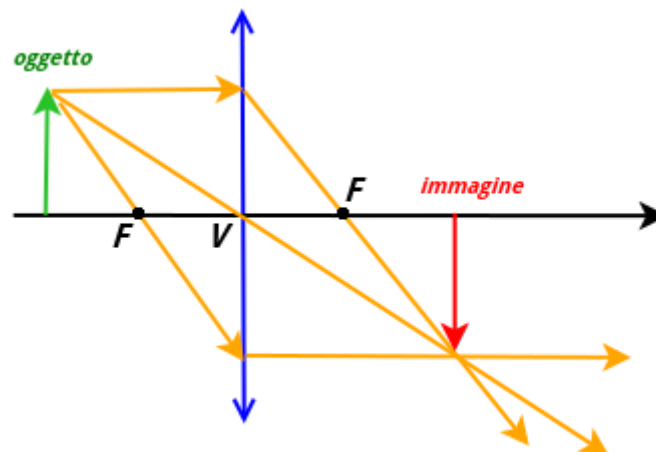


Figura XI.15: Caso di costruzione di immagine estesa per una lente convergente quando l'oggetto è distante dalla lente più del fuoco. In questo caso l'immagine è reale e $I < 0$. L'uso di 3 raggi per la costruzione grafica è sovrabbondante.

XI.16 e XI.17 sono rappresentati i tipici casi di costruzione di una immagine formata da una lente.

Nel caso in cui il sistema ottico sia formato da due o più lenti, la procedura prevede:

- 1) Trovare tramite la (XI.23) e la costruzione grafica q_1 e I_1 della prima lente

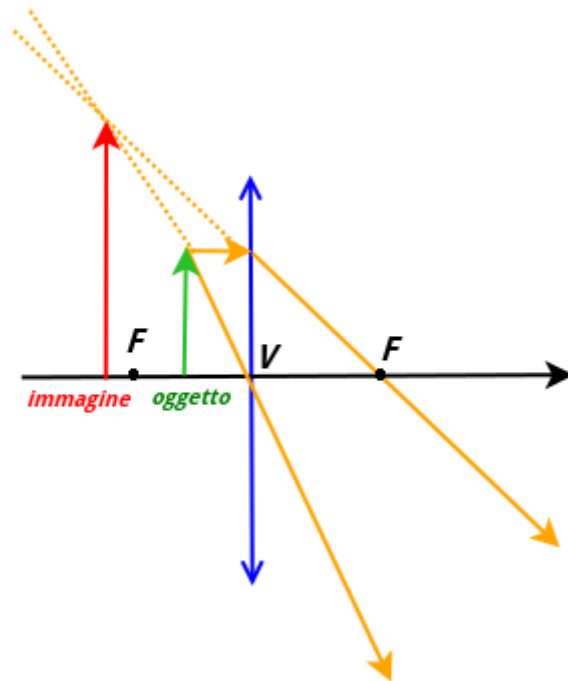


Figura XI.16: Caso di costruzione di immagine estesa per una lente convergente quando l'oggetto posto tra la lente e il suo fuoco. In questo caso l'immagine è virtuale e $I > 0$.

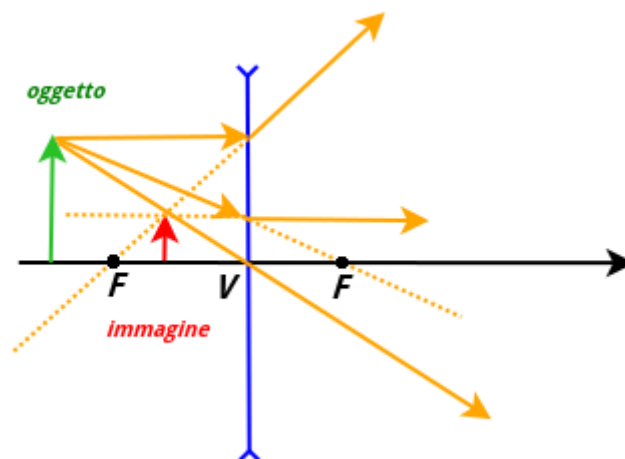


Figura XI.17: Caso di costruzione di immagine estesa per una lente divergente. In questo caso l'immagine è virtuale e $I > 0$. L'uso di 3 raggi per la costruzione grafica è sovrabbondante.

- 2) l'immagine trovata per la prima lente diventa l'oggetto per l'altra. Quindi, se L è la distanza tra le lenti, $p_2 = L - q_1$.
- 3) Si procede come per il punto 1) per la seconda lente. L'immagine finale sarà quella dall'ultima lente.
- 4) L'ingrandimento finale sarà dato dal prodotto di tutti gli ingrandimenti: $I = \prod_i I_i$

Riepilogo formule

- *velocità di un'onda elettromagnetica in un mezzo d indice di rifrazione n*

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n}$$

- *numero d'onda*

$$k = \frac{\omega}{c}$$

- *lunghezza d'onda*

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{\nu}$$

- *Intensità di un'onda elettromagnetica*

$$I \propto E_0^2$$

- *Legge di Malus*

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

per luce non polarizzata

$$I = I_0/2$$

- *Legge di Snell*

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$$

- *Equazione delle Lenti Sottili*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

- *Ingrandimento di una lente*

$$I = -\frac{q}{p}$$

Esercizi

* Esercizio 188

La *Relazione di Cauchy* è una formula empirica che approssima l'andamento dell'indice di rifrazione con la lunghezza d'onda:

$$n(\lambda) \simeq A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (\text{XI.25})$$

dove A e B sono due costanti che dipendono dal materiale. Un vetro crown borosilicato ha indice di rifrazione $n_1=1.50883$ a $\lambda_1=656.3$ nm e $n_2=1.51690$ a $\lambda_2=486.1$ nm. Stimare l'indice di rifrazione per $\lambda_3=600$ nm attraverso la relazione XI.25.

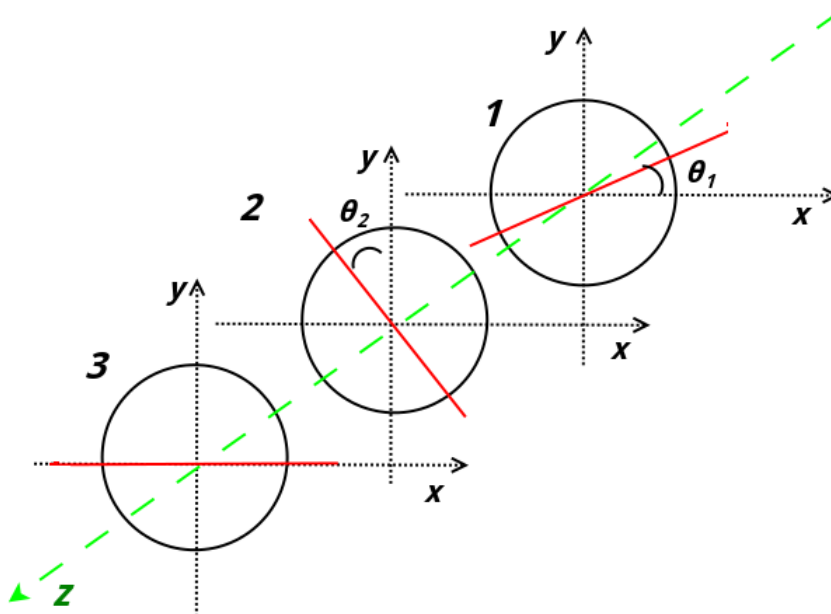


Figura XI.18

** Esercizio 189

Una radiazione non polarizzata passa attraverso 3 polarizzatori con gli assi disposti come in figura XI.18 (si propaga lungo z , perpendicolare ai piani x, y contenenti i polarizzatori). Quale sarà la polarizzazione finale e di quanto si sarà ridotta la sua intensità ($\theta_1 = 20^\circ$, $\theta_2 = 40^\circ$)?

*** Esercizio 190

Con riferimento alla figura XI.19, un raggio luminoso si propaga nel vuoto e raggiunge una lamina di indice di rifrazione $n = 1.6$ e spessore $D = 3.0$ cm con un angolo di incidenza $\alpha_1 = 45^\circ$. Trovare le caratteristiche del fascio in uscita.

* Esercizio 191

Una lente ha lunghezza focale di 20 cm. A quale distanza, al di là della lente, si forma l'immagine della sorgente, se l'oggetto è distante dalla lente 75 cm?

* Esercizio 192

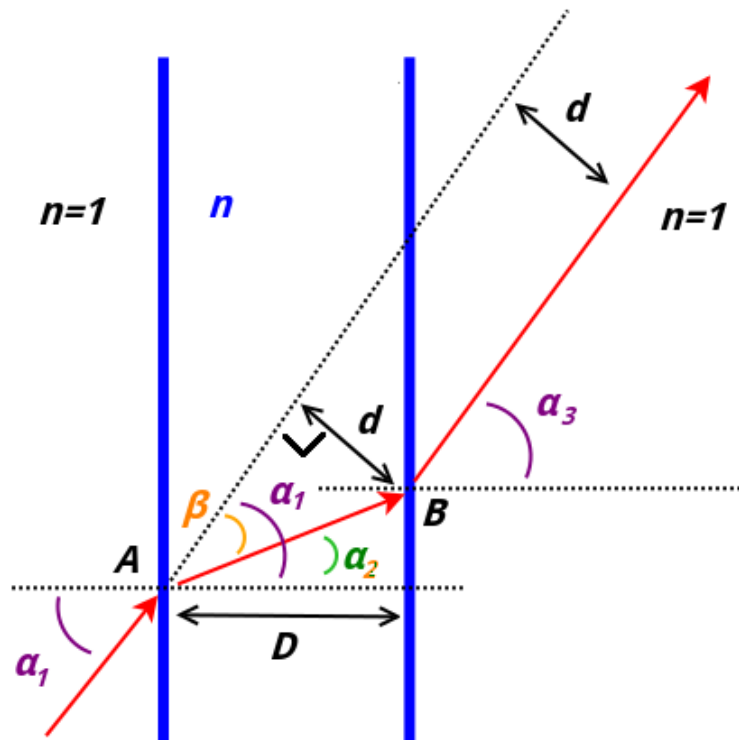


Figura XI.19

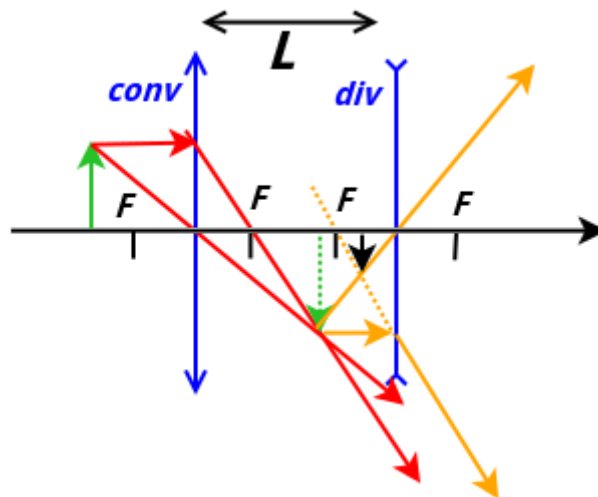


Figura XI.20

Un oggetto è posto a sinistra a 1 m da una lente e l'immagine si forma a 25 cm dal centro della lente (a sinistra). Calcola la distanza focale.

**** Esercizio 193**

Un oggetto viene posto a distanza 25.0 cm dalla prima di una coppia di lenti distanti $L = 50.0$ cm (figura XI.20). Entrambe hanno un potere diottrico 6.67 diottrie, ma una è convergente e una divergente. Nella figura l'oggetto esteso è la freccia verde. Dove si forma la sua immagine

e quanto è ingrandita?

Appendice A

Complementi sugli Urti

Urto elastico tra due punti materiali

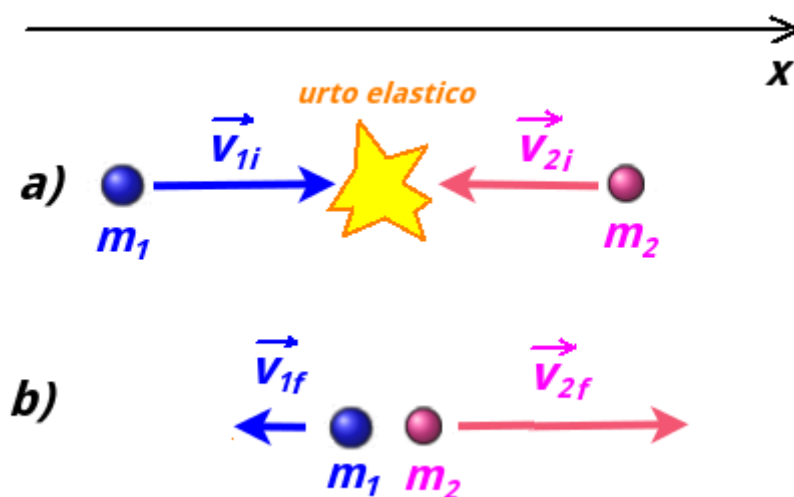


Figura A.1: Caso di un urto elastico. In a) siamo nell'istante immediatamente precedente l'urto e in b) in quello successivo.

Due masse (Fig. (A.1)) di massa m_1 e m_2 compiono un urto elastico con velocità iniziali di modulo v_{1i} e v_{2i} . Troviamo le velocità finali v_{1f} e v_{2f} .

Si conserva sia la quantità di moto complessiva che l'energia cinetica.

$$Q : \quad m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (\text{A.1})$$

$$K : \quad \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (\text{A.2})$$

Entrambe possono essere riscritte rispettivamente così:

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = -m_2 (v_{2i} - v_{2f}) \quad (\text{A.3})$$

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = -m_2(v_{2i}^2 - v_{2f}^2) \quad (\text{A.4})$$

Quest'ultima può essere riscritta così:

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f})(v_{2i} + v_{2f}) \quad (\text{A.5})$$

Quindi, dividendo la A.5 per la A.3 si ottiene:

$$v_{1i} - v_{1f} = v_{2i} + v_{2f} \quad (\text{A.6})$$

Da cui si ricava v_{1f} :

$$v_{1f} = v_{2i} + v_{2f} - v_{1i} \quad (\text{A.7})$$

che si può sostituire nella A.1, che semplificando diventa:

$$2m_1v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i} = (m_1 + m_2)v_{2f} \quad (\text{A.8})$$

Da cui si ricava v_{2f} . Fatta una procedura analoga per trovare v_{1f} , si trovano le seguenti due equazioni:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_{2i} \quad (\text{A.9})$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{2i} \quad (\text{A.10})$$

In genere, una delle due masse è ferma prima dell'urto (v_{1i} o v_{2i} uguale a 0) e le equazioni A.9 e A.10 si semplificano. Spesso, anche una delle due masse è \gg dell'altra.

Urto elastico 2D tra punto materiale e parete

Consideriamo una palla di massa m come un punto materiale che viene lanciato a velocità v contro un muro ($M \gg m$), colpendolo con un angolo α rispetto ad esso. L'urto è elastico. Si può determinare la direzione della velocità della palla dopo l'urto.

Indicando con v le velocità della palla e con V quelle del muro, la quantità di moto nelle due direzioni si conserva (y parallela al muro e x in direzione perpendicolare al muro e verso positivo verso di esso):

$$\begin{cases} x: & mv_{ix} = mv_{fx} + MV_{fx} \\ y: & mv_{iy} = mv_{fy} + MV_{fy} \end{cases}$$

Le due equazioni possono essere riscritte evidenziando gli impulsi scambiati tra la palla e il muro e relativa variazione della quantità di moto, che sono uno opposto all'altro. Per la geometria di impatto, l'impulso subito dalla particella ha direzione tale che $\vec{J} = J\hat{i}$.

$$\begin{cases} x: & J_x = m(v_{fx} - v_{ix}) = -MV_{fx} \\ y: & J_y = m(v_{fy} - v_{iy}) = -MV_{fy} = 0 \end{cases}$$

E quindi $v_{fy} = v_{iy}$, cioè la componente lungo il muro della velocità della palla rimane inalterata. Tenendo conto di ciò, si scrive la conservazione dell'energia cinetica:

$$m\frac{v_i^2}{2} - m\frac{v_f^2}{2} = M\frac{V_f^2}{2} = \frac{J^2}{2M} = \frac{m^2(v_{ix} - v_{fx})^2}{2M}$$

Il fatto che $v_{fy} = v_{iy}$, rende il primo membro dell'equazione:

$$m\frac{v_i^2}{2} - m\frac{v_f^2}{2} = \frac{m}{2}(\underbrace{v_{ix}^2 + v_{iy}^2}_{v_i^2} - \underbrace{v_{fx}^2 + v_{fy}^2}_{v_f^2}) = \frac{m}{2}(v_{ix} - v_{fx})(v_{ix} + v_{fx})$$

Quindi:

$$\frac{m}{2}(v_{ix} - v_{fx})(v_{ix} + v_{fx}) = \frac{m^2(v_{ix} - v_{fx})^2}{2M}$$

da cui si ricava v_{fx} :

$$v_{fx} = v_{ix} \frac{\frac{m}{M} - 1}{\frac{m}{M} + 1}$$

Essendo $M \gg m$:

$$v_{fx} \simeq -v_{ix}$$

Il caso $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (palla incidente normalmente sul muro), può essere ricavato direttamente in 1D dalle A.9 e A.10, imponendo che il corpo 1 sia la palla e il corpo 2 il muro, considerando la velocità iniziale del corpo 2 = 0 e inserendo le approssimazioni dovute a $M \gg m$. Si otterrebbe quindi $v_{1f} \simeq -v_{2i}$ e $V_2 \simeq 0$.

Appendice B

Dati Astronomici

Costanti e Unità di Misura

- *Costante di Gravitazione Universale*
 $G = 6.67408 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
- *Unità Astronomica* (distanza media Terra-Sole)
 $1 \text{ au} = 1.49597870700 \cdot 10^{11} \text{ m}$
- *Anno Luce*
 $1 \text{ ly} = 9.4607 \cdot 10^{15} \text{ m} = 6.3241 \cdot 10^4 \text{ au}$
- *Parsec*
 $1 \text{ pc} = 3.26156 \text{ ly}$

La Terra

- Simbolo: T, \oplus
- Massa (M_T): $5.9722 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$
- Raggio Medio (R_T): 6371 Km
- Semi-asse maggiore orbita (a_T): 1.0000 au
- Periodo orbita (T_T): 1 anno (1 yr)

La Luna

- Massa: $0.0123 M_T$
- Raggio Medio: $0.273 R_T$
- Semi-asse maggiore orbita: $384 \cdot 10^3$ km
- Periodo orbita: 27.3 giorni

Pianeti

Pianeta	Massa (M_T)	Raggio Medio (R_T)	a (au)	e	T (yr)
Mercurio ☿	0.0553	0.3829	0.387	0.206	0.241
Venere ♀	0.815	0.9499	0.723	$6.77 \cdot 10^{-3}$	0.615
Marte ♂	0.107	0.532	1.52	$9.34 \cdot 10^{-2}$	1.88
Giove ♃	318	11.0	5.20	$4.84 \cdot 10^{-2}$	11.9
Saturno ♄	95.2	9.14	9.55	$5.55 \cdot 10^{-2}$	29.5
Urano ♅	14.5	3.98	19.2	$4.64 \cdot 10^{-2}$	84.0
Nettuno ♆	17.1	3.86	30.1	$9.45 \cdot 10^{-2}$	165

Pianeti Nani

Pianeta	Massa (M_T)	a (au)	e	T (yr)
Cerere	$1.58 \cdot 10^{-4}$	2.76	$7.58 \cdot 10^{-2}$	4.60
Plutone	$2.18 \cdot 10^{-3}$	39.5	0.249	248
Haumea	$6.6 \cdot 10^{-4}$	43.2	0.191	284
Makemake	$<7.3 \cdot 10^{-4}$	45.7	0.156	309
Eris	$2.8 \cdot 10^{-3}$	67.8	0.441	558

Il Sole

- Simbolo: ☉
- Tipo: stella nana gialla (G) - sequenza principale
- Massa (M_\odot): $1.989 \cdot 10^{30}$ kg = $3.330 \cdot 10^5 M_T$
- Raggio Medio (R_\odot): $6.957 \cdot 10^5$ km = $109 R_T$
- Temperatura Superficiale: 5800°K

- Temperatura al centro: $1.57 \cdot 10^7$ °K
- Età: 4.6 Gyr
- $k'_s = 2.97 \cdot 10^{-19} \text{s}^2 \text{m}^{-3}$

Stelle

Stella	Tipo	T. (°K)	Mas. (M_{\odot})	Rag. (R_{\odot})	Dist. (ly)	Età
Trappist-1	rossa s.p.	2550	0.08	0.12	40	500 Myr
Proxima Centauri	rossa s.p.	3042	0.12	0.14	4.3	4.8 Gyr
Epsilon Eridani	arancio s.p.	5084	0.82	0.74	10	500 Myr
Sirio A	bianca s.p.	9602	2.04	1.7	8.6	230 Myr
Sirio B	nana bianca	25200	0.98	$8.4 \cdot 10^{-3}$	8.6	120 Myr
Vega	bianca s.p.	9602	2.1	2.5	25	460 Myr
Rigel A	bianco-blu s.p.	12100	23	79	860	8 Myr
10 Lacertae	blu s.p.	36000	26.9	8	2300	<10 Myr
Aldebaran	gigante rossa	3910	1.13	45	65	7 Gyr
Betelgeuse	supergig. rossa	3590	12	887	640	7 Myr
Antares	supergig. rossa	3400	12	883	550	8 Myr
VY Canis Mayor	ipergig. rossa	3490	17	1400	3840	10 Myr
RMC 13601	wolf-reyet	53000	315	33	$1.6 \cdot 10^5$	<0.8 Myr
PSR B1257+12	stella neutroni	28856	1.4	$1.5 \cdot 10^{-5}$	2300	1 Gyr

Appendice C

Momenti di Inerzia

Momento d'inerzia $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots + m_N r_N^2 = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$ ($kg \cdot m^2$)

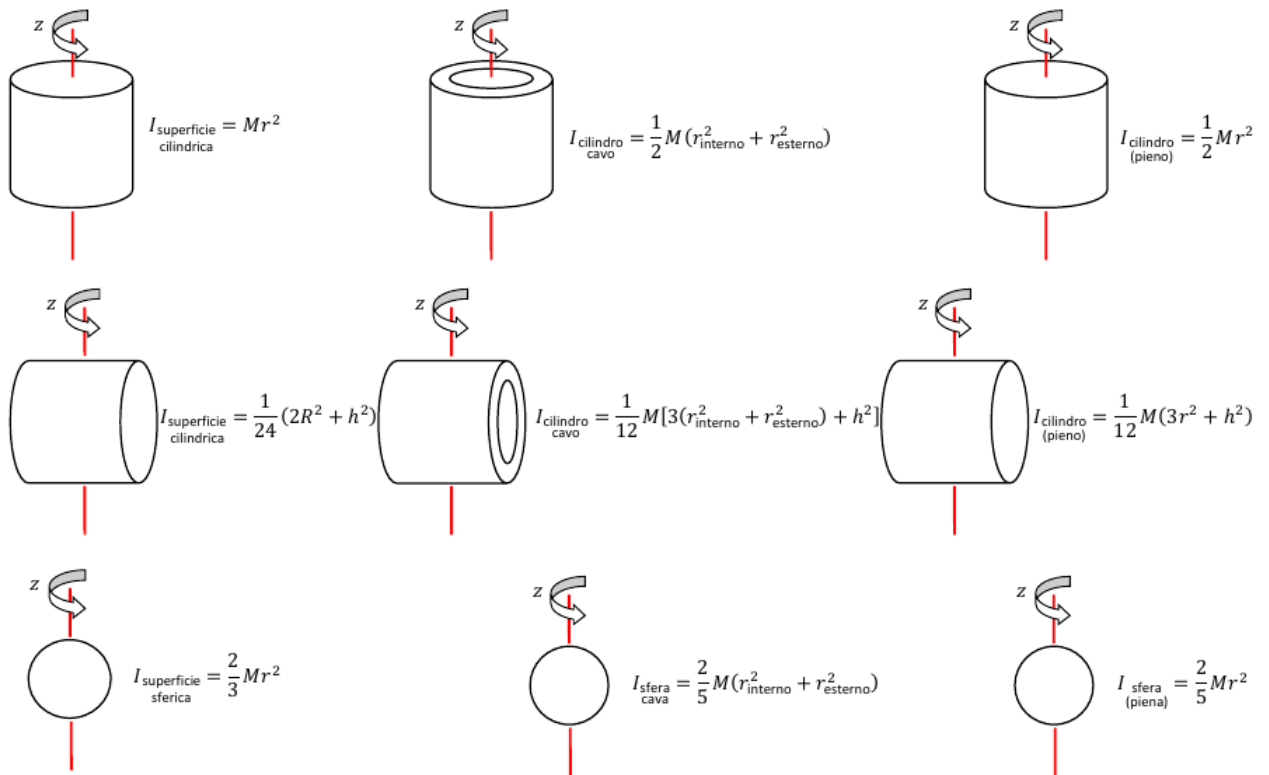


Figura C.1

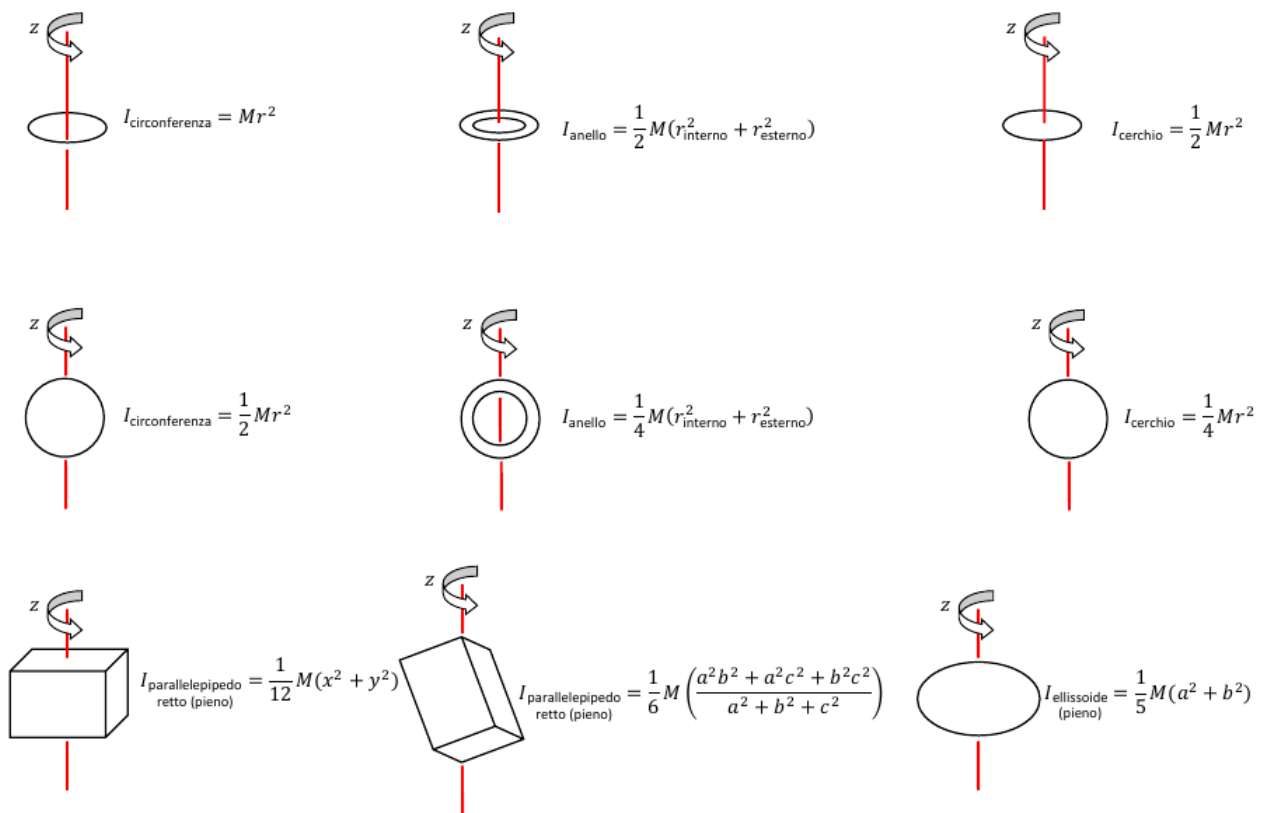


Figura C.2

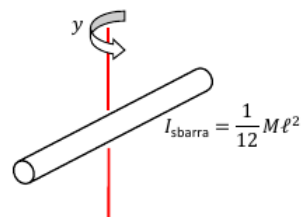
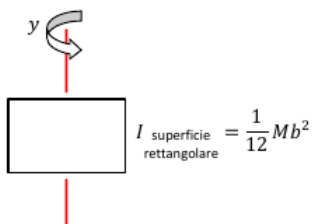
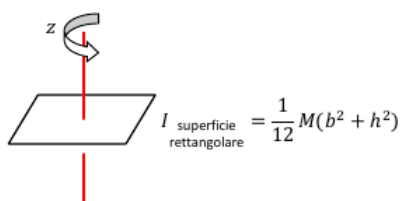
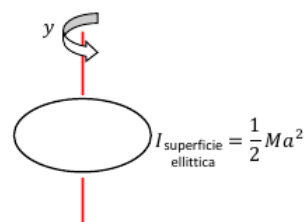
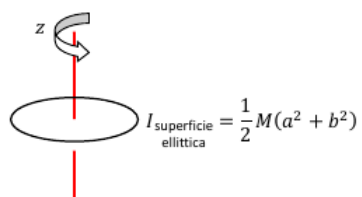
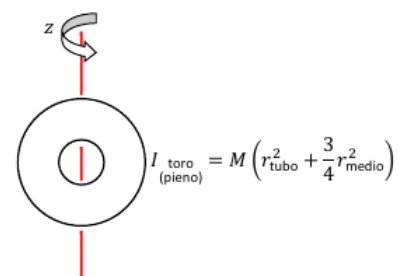
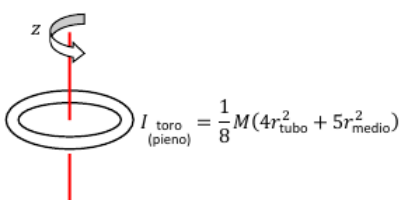
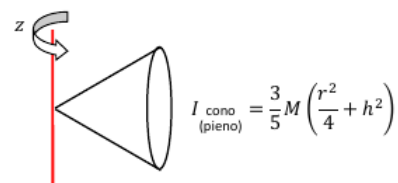
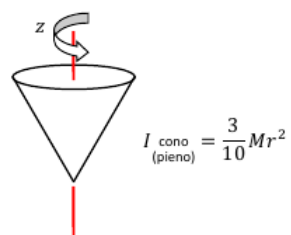


Figura C.3

Indice analitico

- accelerazione
 - angolare, 64, 149
 - centripeta, 39
 - di gravità, 84
 - istantanea, 31, 37
 - media, 30, 37
 - tangenziale, 150
- accuratezza, 9
- Ampere
 - legge di, 259, 276
 - unità di misura, 244
- ampere
 - unità di misura, 233, 261
- ampiezza, 33
- analisi dimensionale, 5
- approssimazione
 - di piccole oscillazioni, 65
- Archimede
 - legge di, 176
- Aristotele, 56, 58, 69, 124
- asse
 - di rotazione, 142
- asse ottico, 285
- assi cartesiani, 16
- atmosfera, 175
- attrito
 - radente, 153
 - volvente, 153
- Avogadro
 - legge di, 196
 - numero di, 189
- bar, 172
- barometro, 175
- Bernoulli
 - equazione di, 178
 - teorema di, 180
- bersaglio, 112
- Biot-Savart
 - legge di, 258
- bobina, 257
- Boltzmann
 - costante di, 197
- Boyle
 - legge di, 196, 204, 207
- braccio, 144
 - della coppia, 145
- calamita, 252
- calore, 77, 199
 - latente, 195
 - specifico, 206
 - a pressione costante, 193
 - a volume costante, 194
 - molare a pressione costante, 194, 205, 206
 - molare a volume costante, 194, 205, 206
- caloria, 194
- campo, 84
 - di forza, 84, 132, 234
 - di induzione magnetica, 252
 - elettrico, 234, 240, 252
 - elettromagnetico, 276
 - gravitazionale, 84, 132, 133, 234
 - scalare, 84
 - vettoriale, 84, 237
- campo scalare, 87
- capacità elettrica, 241
- capacità termica, 194
- capillare, 182
- caratteristica volt-amperometrica, 247
- carica elettrica, 229, 231
- Carnot
 - macchina di, 212
 - teorema, 213
- carrello delle masse, 55
- cavallo vapore (CV), 82

- Celsius
 - grado, 192
- centro
 - di oscillazione, 32
 - di riduzione, 143
- cerchio osculatore, 40
- chilowattora, 82
- chilowattora (kWh), 82
- cifre significative, 13
- cinematica, 27
- circuito elettrico, 246, 247
- Claperyon
 - diagramma di, 199
- Clausius
 - enunciato di, 210
 - teorema di, 214
- coefficiente di dilatazione termica
 - cubica, 192
 - lineare, 192
- coefficiente di prestazione, 210
- coerenza, 280
- Colladon, Jean Daniel, 284
- collimatore, 285
- condensatore, 241, 251
- conduttività elettrica, 245
- conduttore, 240, 243
- conduttori, 231
- conduzione, 193
- consistenza, 11, 12
- continuità
 - di continuità, 178
 - equazione di, 177, 178, 181
- convezione, 193
- coppia, 145, 257
- corpi puntiformi, 28
- corpo
 - omogeneo, 141
 - rigido, 63, 140
- corrente
 - concatenata, 259
 - densità di, 243, 256
 - elettrica, 243, 244, 256
 - intensità di, 244
- corrente elettrica, 233
- costante
 - di pressione interna, 197
 - dielettrica, 243
 - dielettrica del vuoto, 233, 242
 - dielettrica relativa, 242
 - elastica, 59
 - gravitazionale, 129
 - universale dei gas, 196, 206
- costante dielettrica del vuoto, 233
- Coulomb
 - Charles Augustin, 233
 - forza di, 255
 - legge di, 233
- coulomb
 - unità di misura, 233, 261
- covarianza, 46
- covolume, 197
- densità, 170
 - assoluta, 171
 - di corrente, 243
 - lineare di massa, 141
 - relativa, 171
 - superficiale di massa, 141
 - volumica di massa, 140
 - volumica media, 140
- deviazione standard, 11
- diagramma
 - di corpo libero, 63
- dielettrico, 242
- differenza
 - vettoriale, 15
- diffrazione, 282
- dilatazione termica lineare, 192
- dimensioni, 5, 6
- dinamica, 53
 - molecolare, 189
- dinamica dei sistemi
 - prima equazione della , 110
 - seconda equazione della, 157
- dinamometro a deformazione, 54
- diottria, 285
- dipolo
 - elettrico, 242, 258
 - magnetico, 252
- direzione, 14

- discrepanza, 12
- dispersione ottica, 283
- dispositivo monotermeo, 209
- distanza focale, 285
- Einstein, Albert, 46
- elettromagnetismo, 229
- elettroni di conduzione, 243
- elettroscopio a foglie, 231
- elettrostatica, 229
- energia, 77
 - potenziale elastica, 87
 - potenziale gravitazionale, 86
 - cinetica, 78
 - interna, 94, 197, 203, 204
 - meccanica, 88, 94
 - potenziale, 84
 - potenziale elettrica, 235, 247
 - potenziale gravitazionale, 131
 - potenziale, 88
 - totale, 94
- energia
 - cinetica, XV
- entalpia, 205
- entropia, 213, 214, 216
- equazione delle lenti sottili, 287
- equilibrio, 59, 62, 66
 - stabile, 92
 - instabile, 92
 - posizione di, 91
 - rotatorio, 146
 - statico, 146
 - termico, 190, 216
 - termodinamico, 189
 - traslatorio, 146
- errore, 9
 - assoluto, 10
 - casuale, 9
 - quadratico della media, 12
 - relativo, 10
 - sistematico, 9
- espansione libera, 208, 209, 217
- esperimento, 5
- Faraday
 - legge di, 276
- fase, 33
- fattore di conversione, 6
- fibra ottica, 284
- fisica, 4
 - aristotelica, 57, 58, 125
 - classica, 57, 59
- fluido, 169
 - ideale, 177, 178
- flusso, 237, 261
 - linea di, 177
 - tubo di, 177
- focale, 285
- forza, 54
 - apparente, 63, 66, 67
 - centrale, 130, 234
 - centrifuga, 68
 - centripeta, 59, 68, 254
 - conservativa, 84, 85
 - di adesione, 182
 - di attrito, 60, 62, 94
 - di coesione, 181
 - di Coriolis, 66
 - di Coulomb, 233
 - di inerzia, 67
 - di Lorentz, 253, 256
 - di marea, 126
 - di taglio, 170
 - di tensione, 60, 68
 - elastica, 55, 59, 65, 81, 87
 - elettromotrice, 246
 - esterna, 106
 - gravitazionale, 58, 233
 - impulsiva, 111
 - interna, 106
 - non conservativa, 94
 - normale, 60, 61
 - peso, 58, 61, 86
 - vincolare, 111
- forza peso, 79
- fotone, 7
- Fraday
 - legge di, 261, 262
- frequenza, 33, 278
- Fresnel
 - riflessione di, 279, 283

- fronte d'onda, 276
funzione di stato, 81, 204, 205, 214
fuoco di una lente, 285
- Galilei, Galileo, 46, 54, 56, 58, 69
gas perfetto, 192, 196, 204
 equazione di stato, 196
gas reale, 197
Gaus
 distribuzione di, 11
Gauss
 Carl Friedrich, 237
 teorema, 237
 teorema di, 237, 240, 241, 276
 teorema di per il campo magnetico, 253
gauss
 unità di misura, 254
Gay-Lussac
 legge di, 196
Giove, 125
gittata, 42
gradiente, 87, 236
grado di libertà, 60, 142
grandezza
 derivate, 5
 estensiva, 189
 fisica, 7
 fondamentale, 5, 6
 intensiva, 189
 ordine di, 4
 scalare, 14
 vettoriale, 14
grandezza fisica, 5, 46
gravità
 centro di, 147
gravitazione, 123
gravitazione universale, 59
- Hooke
 legge di, 59
Huygens
 principio di, 280
Huygens-Steiner
 teorema di, 152
immagine, 285, 286
impulso di una forza, 109
incertezza, 9
indice di rifrazione, 276, 283
induzione
 elettrostatica, 231, 251
induzione totale, 241
inerzia
 termica, 194
ingrandimento, 287
integrale di linea, 81
interferenza, 280, 282
invarianza, 46
irraggiamento, 193
isolante, 231
- Joule
 effetto, 247
 esperimento di, 194
 James Prescott, 194
 unità di misura, 78, 194
- König
 teorema di, 154
Kelvin
 grado, 191
Kelvin-Plank
 enunciato di, 209
Keplero
 prima legge di Keplero, 127
 seconda legge di Keplero, 127
 terza legge di, 134
 terza legge di Keplero, 128
Keplero, Giovanni, 125
Kirkhoff
 I° legge di, 248, 249
 II° legge di, 248, 249
- laser, 279
lavoro, 77–79, 200
 infinitesimo, 81
 motore, 78
 resistente, 78
legge
 dei periodi, 134
legge di gravitazione universale, 125, 128
legge fisica, 5, 7, 46

- proprietà predittiva della, 5, 126
- legge oraria, 28, 32, 42
- lente, 284
 - convergente, 284
 - divergente, 284
 - sottile, 284, 287
- Lenz
 - legge di, 262
- linee di flusso, 84
- Lorentz
 - forza di, 253
- lunghezza, 6
- lunghezza d'onda, 277
- macchina
 - frigorifera, 208, 210
 - termica, 204, 208, 210
- maglia, 248
- magnetismo, 229
- magnetite, 252
- Malus
 - legge di, 279
- manometro, 175, 196
- Marte, 124
- massa, 6, 55
 - centro di, 104, 140, 147
 - gravitazionale, 59
 - inerziale, 55, 59, 66
 - spettrometro di, 254
- materia
 - quantità di, 217
- Maxwell
 - equazioni di, 229, 276
 - James Clerk, 276
- Mayer
 - relazione di, 206
- meccanica, 27
 - newtoniana, 54
 - quantistica, 54
- media, 10
- metodo
 - punta coda, 15
 - scientifico, 4
- misura, 5
- modello fisico, 4
- modulo, 14
- mole, 189
- momento d'inerzia, 151
- momento
 - d'inerzia, 158
 - di dipolo elettrico, 242, 243
 - torcente, 143, 242
- momento angolare, 156
- momento d'inerzia, 158
- momento di dipolo magnetico, 258
- montacarichi, 83
- moto
 - armonico, 32, 65
 - circolare, 66
 - circolare uniforme, 37
 - laminale, 177
 - parabolico, 41, 106
 - quantità di, 103
 - relativo, 45, 54, 67
 - rettilineo uniforme, 28, 29, 41
 - rotatorio, 142
 - rototraslatorio, 142, 153
 - stazionario, 177
 - traslatorio, 142
 - turbolento, 177
 - uniformemente accelerato, 31, 41
- Nettuno, 126
- Newton
 - Isaac, 125, 128
 - prima legge di, 56, 107
 - seconda legge di, 57, 105, 108
 - terza legge di, 57, 58, 106, 129, 171, 233, 261
 - unità di misura, 57
- Newton, Isaac, 54, 56–58, 69
- nodo, 248
- notazione scientifica, 4
- numero d'onda, 277
- Oersted
 - esperimento di, 253
- oggetto, 286
- Ohm
 - legge di, 246, 247
 - legge per la conduttività elettrica, 245

- unità di misura, 246
- onda
 - longitudinale, 277, 279
 - trasversale, 276, 279
- onda elettromagnetica, 229, 276
 - intensità di, 278
- onde piane, 276
- onde sferiche, 276
- ottica, 275
 - geometrica, 282
- parete
 - adiabatica, 190
- partitore di tensione, 250
- Pascal
 - principio di, 173
- pascal, 172
- pendolo
 - balistico, 112
 - di Foucault, 66
 - semplice, 8
- periodo, 33, 65, 66, 278
- permeabilità magnetica del vuoto, 258
- permittività elettrica, 233
- pianeta, 124
- piano di oscillazione, 279
- piano inclinato, 61
- Poiseuille
 - legge di, 183
- Poisson
 - equazione di, 207
- polarizzatore, 279
- polarizzazione
 - circolare, 279
 - della radiazione elettromagnetica, 279
 - ellittica, 279
 - in un dielettrico, 243
 - lineare, 279
- poli magnetici, 252
- portata
 - massica, 178
 - volumica, 178
- posizione, 28, 35
- potenza, 82
 - istantanea, 82
 - media, 82
- potenziale elettrostatico, 236
- potenziometro, 251
- Poynting
 - vettore di, 278
- precisione, 9, 10
- pressione, 170, 171, 189
 - idrostatica, 173
 - relativa, 175
- principio
 - di conservazione dell'energia, 77
 - di conservazione dell'energia meccanica, 89
 - di indipendenza delle azioni simultanee, 81
 - di conservazione del momento angolare, 159
 - di conservazione dell'energia, 204
 - di conservazione della carica, 244
 - di conservazione della carica elettrica, 232
 - di conservazione della quantità di moto, 110, 159
 - di equipartizione dell'energia, 197
 - di equivalenza, 59
 - di inerzia, 56
 - di misura, 9
 - di relatività, 46
 - di sovrapposizione, 130, 234
- prisma, 283
- prodotto
 - di un vettore per uno scalare, 17
 - scalare, 17
 - vettoriale, 18, 143
- propagazione
 - dell'errore, 10, 12
- pulsazione, 33, 40, 64, 66, 277
- punto
 - fisso, 191
 - triplo dell'acqua, 191, 192
- punto di equilibrio, 91
- punto materiale, 53, 60, 63, 77, 104
- quantità di moto, 108, 156
- raggio di curvatura, 40
- raggio ottico, 282
- ramo, 248

- reazione vincolare, 60
regola
 del parallelogramma, 15
 della mano destra, 18
relatività
 galileiana, 54
 ristretta, 54
rendimento, 210
resistenza, 245, 247
 ohmica, 247
resistività elettrica, 245
resistore, 246
rete elettrica, 248
riflessione, 283
riflessione totale, 284
rifrazione, 283
rotolamento, 153
 puro, 153
scalare, 14
scarto massimo, 10
scarto quadratico medio, 11
scienza, 4, 126
sistema
 chiuso, 105
 di punti materiali, 103
 idrostatico, 195
 isolato, 107, 159
sistema di riferimento, 35, 45
 inerziale, 57, 66–68
 non inerziale, 63, 67
sistema metrico
 cgs, 6
 internazionale (S.I.), 6
sistema termodinamico, 189
sistemi
 isolati, 111
Snell
 legge di, 283
somma
 vettoriale, 15
specchio piano, 285
spettro, 278
spira, 256
spostamento, 28, 35
statica, 53
stato
 equazione di, 190
 termodinamico, 189
Stevino
 legge di, 173
superficie
 gaussiana, 237, 253
superficie orientata, 237
T-S
 diagramma, 214
temperatura, 189, 190, 197, 217
 assoluta, 192
 empirica, 191
tempo, 6, 28
 di ascesa, 42
 di volo, 42
 intervallo di, 28
tensione, 236
 caduta di, 246
tensione di vapore, 175
tensione superficiale, 181
teorema
 dell'impulso, 109, 171
 delle forze vive, 79, 88
teorema degli assi paralleli (Huygens-Steiner),
 152
teorema del centro di massa, 110
 primo, 110
 secondo, 110
termodinamica, 187
 primo principio della, 202
 principio 0 della, 190
 secondo principio della, 209, 216
termometro, 191
termostato, 204
tesla
 unità di misura, 254
Tolomeo, 124
torchio idraulico, 174
Torricelli
 Evangelista, 175
traiettoria, 36, 40
trasformazione, 190, 198

- adiabatica, 194, 206, 214
- ciclica, 198, 208
- isobara, 196, 199, 201, 205, 216
- isocora, 196, 199, 201, 204, 215
- isoentropica, 214
- isoterma, 195, 196, 199, 202, 204, 215
- politropica, 207
- quasi statica, 190, 198

- Urano, 126
- urto, 103, 111
 - anelastico, 112
 - centrale, 114
 - completamente anelastico, 112
 - elastico, I, 114

- vacuometro, 175
- valore vero, 9
- van der Waals
 - equazione di, 197
- variabile di stato, 189
- velocità
 - angolare, 40, 149
 - areolare, 127
 - di deriva, 243
 - di fuga, 131
 - istantanea, 29, 36
 - media, 29, 36
 - scalare media, 29
 - selettore di, 255
 - tangenziale, 38, 40
- Venturi
 - equazione dell'effetto, 180
 - tubo di, 181
- verifica sperimentale, 5
- verso, 14
- versore, 14
- vettore, 14
 - applicato, 14
 - componente di un, 16
 - libero, 14
- vettore d'onda, 277
- vincolo, 62
- viscosità, 170, 177, 183
- volt, 236
- Volta
 - Alessandro, 236
- Watt
 - unità di misura, 82
- weber
 - unità di misura, 254
- Young, Thomas, 280

- zero assoluto di temperatura, 192