Corso di Laurea in
Tecnologie Alimentari

Fisica

Soluzione degli Esercizi

Federico Tommasi
federico.tommasi@unifi.it

Versione aggiornata al 20-12-2017

Anno 2017/2018

Capitolo I

Concetti di Base

Notazione Scientifica

Soluzione dell'esercizio 1

$$v = (1.5 \cdot 10^3 m) \cdot (1.0 \cdot 10^{-1} s^{-1}) = 1.5 \cdot 10^2 \text{ m/s}$$

Soluzione dell'esercizio 2

$$k = \frac{1.5 \cdot 10^3 m \times (2.0 \cdot 10^4 m s^{-1})^2}{3.0 \cdot 10^6 m^2}$$

$$k = \frac{1.5 \cdot 10^3 m \times 4.0 \cdot 10^4 m^2 s^{-2}}{3.0 \cdot 10^6 m^2}$$

$$k = \frac{1.5 \times 4.0}{3.0} \cdot 10^{3+8-6} m \cdot \cancel{m^2} s^{-2} \cdot \cancel{m^{-2}}$$

$$k = 2.0 \cdot 10^5 m/s^2$$

Soluzione dell'esercizio 3

$2.5 \cdot 10^{-8} m^{-2} s$

Soluzione dell'esercizio 4

$1.2 \cdot 10^{-8} m^4$

Unità di Misura e Analisi Dimensionale

Soluzione dell'esercizio 5

$$p = mv$$

$$[p] = [m] \cdot [v]$$

$$[p] = [M^1 L^0 T^0] \cdot [M^0 L^1 T^{-1}] = [M^1 L^1 T^{-1}]$$

Nel sistema SI, la quantità di moto si misura in kg·m/s.

Soluzione dell'esercizio 6

$$\begin{aligned}
[a] &= [M^0 L^1 T^- 1] \\
[b] &= [M^1 L^0 T^0] \\
[c] &= [M^0 L^0 T^1] \\
[k] &= [M^\alpha L^\beta T^\gamma]
\end{aligned}$$

$$[k] = \frac{[M^0 L^1 T^- 1]([M^1 L^0 T^0])^2}{[M^0 L^0 T^1]}$$

$$[k] = [M^{0+2-0} L^{1+0-0} T^{-1+0-1}]$$

Quindi le tre soluzioni sono:

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -2 \end{cases}$$

$$[k] = [M^2 L^1 T^{-2}]$$

Nel S.I., la grandezza k si misura in $\mathrm{Kg^2ms^{-2}}$.

Soluzione dell'esercizio 7

$[\alpha] = [M^0 L^0 T^{-1}]$

Soluzione dell'esercizio 8

$[G] = [M^{-1} L^3 T^{-2}]$. In S.I. con 4 cifre significative è $6.674 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{Kg^{-1}m^3s^{-1}}$.

Soluzione dell'esercizio 9

$$\begin{aligned}
[m] &= [M^1 L^0 T^0] \\
[h] &= [M^0 L^1 T^0] \\
[g] &= [M^0 L^1 T^{-2}]
\end{aligned}$$

La dipendenza funzionale generica sarà del tipo:

$$t \propto m^\alpha h^\beta g^\gamma$$

Procediamo quindi all'analisi dimensionale, elevando $[m], [h], [g]$ ai relativi coefficienti incogniti:

$$[t] = [M^0L^0T^1] = [m^\alpha h^\beta g^\gamma] = [M^\alpha L^0T^0][M^0L^\beta T^0][M^0L^\gamma T^{-2\gamma}] = [M^\alpha L^{\beta+\gamma}T^{-2\gamma}]$$

Il sistema da risolvere è:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -2\gamma = 1 \end{cases}$$

Da cui si ricava: $\alpha = 0, \beta = 1/2, \gamma = -1/2$:

$$[t] = [m^0 h^{1/2} g^{-1/2}]$$

quindi la dipendenza funzionale di t sarà del tipo:

$$t = k\sqrt{\frac{h}{g}}$$

dove k è una costante adimensionale. Dalla teoria del moto uniformemente accelerato si ha infatti che $h = \frac{1}{2}gt^2$, trovando conferma del risultato trovato ponendo la costante $k = \sqrt{2}$.

Soluzione dell'esercizio 10

$F = km\frac{v^2}{r}$, con k costante adimensionale.

Cifre Significative e Incertezze

Soluzione dell'esercizio 11

- 1 cifra $\rightarrow$ 3
- 2 cifre $\rightarrow$ 3.1
- 3 cifre $\rightarrow$ 3.14
- 4 cifre $\rightarrow$ 3.142
- 5 cifre $\rightarrow$ 3.1416
- 6 cifre $\rightarrow$ 3.14159

Soluzione dell'esercizio 12

- 3 cifre significative
- 4 cifre significative
- 2 cifre significative

- 4 cifre significative
- 3 cifre significative

Soluzione dell'esercizio 13

- 0.35 m $\rightarrow$ 2 cifre significative
- 2.10 g $\rightarrow$ 3 cifre significative
- 0.08 s $\rightarrow$ 1 cifra significativa
- $3.45 \cdot 10^{-3}$ V $\rightarrow$ 3 cifre significative
- $2.6 \cdot 10^{2}$ Kg $\rightarrow$ 2 cifre significative

Soluzione dell'esercizio 14

- (27.8+3.175+42.24) m= 73.215 m $\rightarrow$ 73.2 m
- (142-3.264) s = 138.736 s $\rightarrow$ 139 s
- (5.326 ml$\cdot$ 1.16 g/ml)= 6.1782 g $\rightarrow$ 6.18 g
- $\log_{10} 3.35 = 0.525$

Soluzione dell'esercizio 15

$5 \cdot 10^2$,$5.1 \cdot 10^2$,$5.06 \cdot 10^2$

Soluzione dell'esercizio 16

$$4.25 \text{ inch} = \frac{0.0254 \text{ m}}{1 \text{ inch}} = 0.108 \text{ m} = 10.8 \text{ dm}$$

Soluzione dell'esercizio 17

Per prima cosa si riporta tutto alla stessa unità di misura: 441 mm=0.441 m. L'incertezza deve avere una sola cifra significativa, quindi si arrotonda a 0.4 m. Di conseguenza all'incertezza si arrotonda in modo corretto la misura:

$$\ell = (3.1 \pm 0.4)\text{m}$$

L'incertezza relativa è infine: (0.4/3.1)=0.12903 $\rightarrow$ 0.13 $\rightarrow$ 13%

Soluzione dell'esercizio 18

$$\ell = (3.10 \pm 0.09)\text{m}$$

Soluzione dell'esercizio 19

$$\ell = (3.102 \pm 0.016)\text{m}$$

Soluzione dell'esercizio 20

La media è 45.48 s. Lo scarto massimo è quindi 0.41 s. Quindi la misura viene riportata come:

$$t = (45.5 \pm 0.4)\text{s}$$

Soluzione dell'esercizio 21

Portiamo tutto in *ml*:

$$a = (200 \pm 5)\ \text{ml}$$

$$b = (230 \pm 1)\ \text{ml}$$

$$c = a + b = (200 + 230)\ \text{ml} = 430\ \text{ml}$$

$$\Delta c = \Delta a + \Delta b = (1 + 5)\ \text{ml} = 6\ \text{ml}$$

$$c = (430 \pm 6)\text{ml}$$

In *l*:

$$c = (0.430 \pm 0.006)\text{l}$$

Soluzione dell'esercizio 22

$$z = x/y = \frac{56\ \text{cm}}{23\ \text{s}} = 2.4348\ \text{cm/s}$$

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{2\ \text{cm}}{56\ \text{cm}} + \frac{1\ \text{s}}{23\ \text{s}} \simeq 0.0357 + 0.04348 \simeq 0.07912 \simeq 0.08 = 8\%$$

$$\Delta z = \frac{\Delta z}{z} \cdot z = 0.08 \cdot 2.4348\ \text{cm/s} = 0.19478 \simeq 0.19\ \text{cm/s}$$

$$z = (2.43 \pm 0.19)\ \text{cm/s} = (2.43 \pm 0.19) \cdot 10^{-2}\ \text{m/s}$$

Conversioni

Soluzione dell'esercizio 23

$$120\frac{\text{km}}{\text{h}} = 120\cdot 10^3\frac{\text{m}}{\text{h}} = 1.2\cdot 10^5\frac{\text{m}}{\text{h}} = 1.2\cdot 10^5\frac{\text{m}}{\text{h}}\cdot\left(\frac{1\ \text{h}}{3.6\cdot 10^3\ \text{s}}\right) = \frac{1.2}{3.6}\cdot 10^2\ \text{m/s} \simeq 33.3\ \text{m/s}$$

Soluzione dell'esercizio 24

1 litro corrisponde a 1 dm^3. Quindi:

$$m = V\rho = 1\ \text{m}^3\frac{1\ \text{kg}}{1\ \text{dm}^3} = (10\ \text{dm})^3\frac{1\ \text{kg}}{1\ \text{dm}^3} = 10^3\ \cancel{\text{dm}^3}\frac{1\ \text{kg}}{1\ \cancel{\text{dm}^3}} = 10^3\ \text{kg} = 1\ \text{tonnellata}$$

Soluzione dell'esercizio 25

Nel primo caso:

$$9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9.81\frac{10^{-3}\ \text{km}}{\text{s}^2\cdot\left(\frac{1\ \text{h}}{3.6\cdot 10^3\ \text{s}}\right)^2} = 9.81\cdot 10^3\ \text{km}\frac{1}{\frac{1\ \text{h}^2}{(3.6)^2\cdot 10^6}} =$$

$$= 9.81\cdot 10^3(3.6)^2\cdot 10^6\ \text{km/h}^2 = 9.81\cdot(3.6)^2\cdot 10^3\ \text{km/h}^2 \simeq 127\cdot 10^3\ \text{km/h}^2 = 1.27\cdot 10^5\ \text{km/h}^2$$

Nel secondo caso:

$$9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9.81\cdot 10^2\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$$

Scalari e Vettori

Nota: dove non specificato, i moduli dei vettori sono dati in unità arbitrarie.

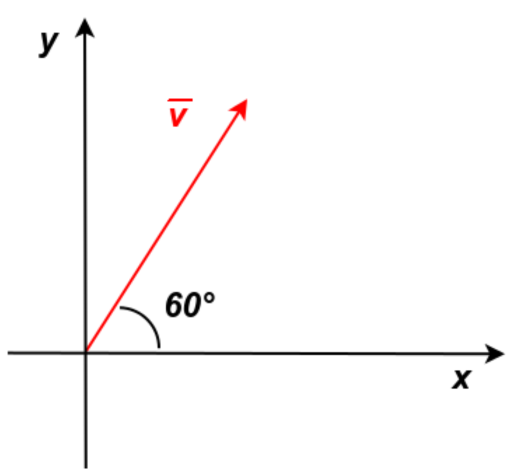


Figura I.1

Soluzione dell'esercizio 26

$$\vec{v} = \frac{v}{2}\hat{i} + v\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}$$

Soluzione dell'esercizio 27

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{3.0^2 + 2.0^2} = 3.6$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 7.0$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{vu} = 7.0/(3.6 \cdot 2.1) = 0.93$$

$$\theta = \arccos(0.93) = 0.39 = 22°$$

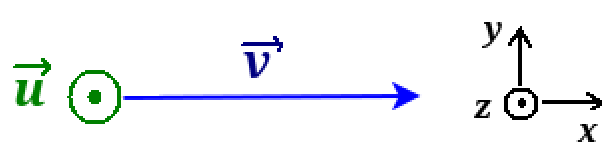


Figura I.2

Soluzione dell'esercizio 28

a) 0, b) $|\vec{w}| = 8$ con $\vec{w}$ diretto come l'asse y e con verso negativo, c) $|\vec{h}| = 8$ con $\vec{h}$ diretto come l'asse y e con verso positivo.

Soluzione dell'esercizio 29

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}\right) = 70.5°$$

Soluzione dell'esercizio 30

a) $\vec{c} = 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $|\vec{c}| = 7$
b) $\vec{d} = 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $|\vec{d}| = 5$
c) 8

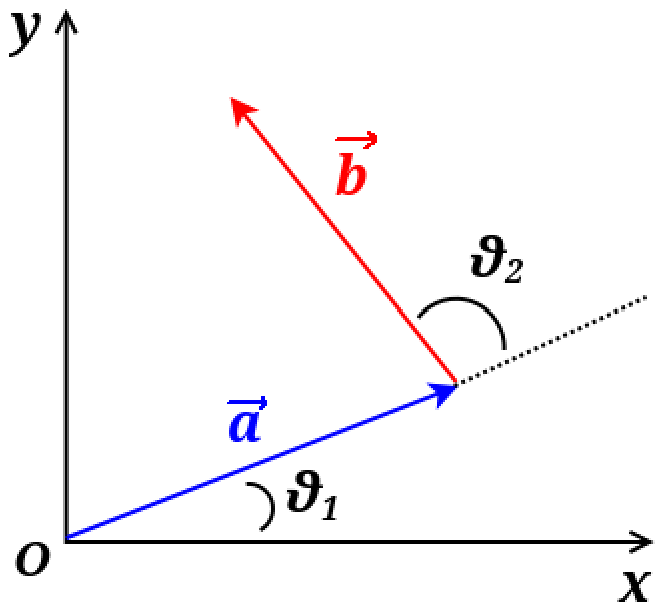


Figura I.3

Soluzione dell'esercizio 31

Disegnando il vettore somma $\vec{r}$ con il metodo "punta-coda" si osserva che i tre vettori formano un triangolo isoscele. Il vertice del triangolo isoscele si trova calcolando l'angolo supplementare di θ_2, trovando 75°. I due angoli α alla base sono quindi 52.5°. L'angolo che $\vec{r}$ forma con l'asse x si trova facendo $\alpha + \theta_1 = 82.5°$. Il vettore $\vec{b}$ forma con l'asse x un angolo $\gamma = \theta_1 + \theta_2 = 135°$. Quindi, indicando con a=$|\vec{a}| = |\vec{b}|$:

$$\vec{a} = a\cos\theta_1\hat{i} + a\sin\theta_1\hat{j}$$
$$\vec{b} = a\cos\gamma\hat{i} + a\sin\gamma\hat{j}$$

$$\vec{r} = \underbrace{a(\cos\theta_1 + \cos\gamma)}_{r_x}\hat{i} + \underbrace{a(\sin\theta_1 + \sin\gamma)}_{r_y}\hat{j}$$

$$r_x = a(\cos\theta_1 + \cos\gamma) = 1.59 \text{ m}$$
$$r_y = a(\sin\theta_1 + \sin\gamma) = 12.1 \text{ m}$$

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = 12.2 \text{ m}$$

Soluzione dell'esercizio 32

$$\vec{r}\cdot\vec{s} = (4.50)(7.30)\cos(320° - 85.0°) = -18.8$$

o equivalentemente:

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = (4.50)(7.30)\cos(360° - 320° + 85.0°) = -18.8$$

$$|\vec{r} \wedge \vec{s}| = |(4.50)(7.30)\sin(360° - 320° + 85.0°)| = 26.9$$

Il verso di $\vec{r} \wedge \vec{s}$ è dato dalla regola della mano destra ed è quello dell'asse z.

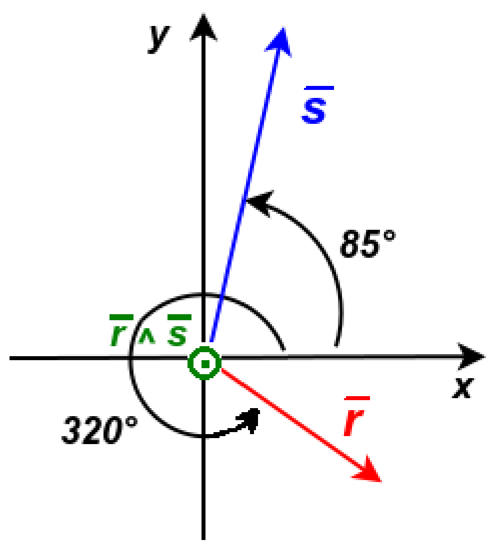


Figura I.4

Soluzione dell'esercizio 33

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} = q(v_yB_z - B_yv_z)\hat{i} + q(B_xv_z - v_xB_z)\hat{j} + q(v_xB_y - B_xv_y)\hat{k}$$

Sostituendo i valori:

$$\begin{cases} 4.0 = 2(4.0B_z - 6.0B_y) \\ -20 = 2(6.0B_x - 2.0B_z) \\ 12 = 2(2.0B_y - 4.0B_x) \end{cases}$$

Essendo $B_x = B_y$, dalla terza si ottiene $B_y = -3.0$ e quindi $B_z = -4,0$. Quindi:

$$\vec{B} = -3.0\hat{i} - 3.0\hat{j} - 4.0\hat{k}$$

Capitolo II

Cinematica

Cinematica 1D

Soluzione dell'esercizio 34

Le leggi orarie dei due ciclisti :

$$s_1(t) = v_1 t + l$$
$$s_2(t) = v_2 t$$

Nell'istante del sorpasso (avendo preso l'istante iniziale $t_0 = 0$, l'intervallo di tempo $\Delta t = t' - t_0$ coincide quantitativamente con t'):

$$v_1 t' + l = v_2 t'$$

$$t' = \frac{l}{v_2 - v_1} = \frac{0.450 \text{ km}}{(45 - 30) \text{ km/h}} = 3.00 \cdot 10^{-2} \text{ h} = 108 \text{ s}$$

$$\Delta l_1 = s_1(t') - s_1(0) = \underbrace{v_1 t' + l}_{s_1(t')} - \underbrace{l}_{s_1(0)} = v_1 t' = 900 \text{ m}$$

$$\Delta l_2 = s_1(t') - s_2(0) = v_2 t' = 1350 \text{ m}$$

Soluzione dell'esercizio 35

Il moto si svolge in un'unica dimensione (asse x). Prendiamo la direzione positiva dell'asse x quella data dalla velocità. Abbiamo quindi un modo uniformemente decelerato. Si impone che la velocità finale sia zero.

$$0 = {v_0}^2 + 2ad$$

$$a = -\frac{v_0}{2d}$$

Si ricava t, sempre imponendo che la velocità finale sia 0:

$$0 = at + v_0$$

$$t = -\frac{v_0}{a}$$

Sostituendo a:

$$t = \frac{{v_0}^2}{2d}$$

Prima di sostituire i valori, convertiamo v_0 in m/s:

$$50\text{Km/h} \cdot (3600\text{s/h})^{-1} \cdot 1000\text{m/Km} = 14\text{m/s}$$

$$a = 4.9\text{ms}^{-2}$$

$$t = 2.9\text{s}$$

Soluzione dell'esercizio 36

Prendendo il sistema di riferimento con verso ascendente

$$v_f = v_i - g_p t_1$$

$$g_p = \frac{v_i - v_f}{t_1} = \frac{(30 - 21)\text{ m/s}}{5.0\text{ s}} 1.8\text{ m/s}^2$$

La quota massima (ponendo il suolo alla coordinata $y = 0$) si trova imponendo la velocità finale uguale a 0:

$$0 = v_i^2 - 2g_p h$$

$$h = \frac{v_i^2}{2g_p} = \frac{(3 \cdot 10^1\text{ m/s})^2}{2 \cdot 1.8\text{ m/s}^2} = \frac{(9.0 \cdot 10^2\text{ m}^2/\text{s}^2)}{2 \cdot 3.6\text{ m/s}^2} = 2.5 \cdot 10^2\text{ m}$$

Soluzione dell'esercizio 37

Mettiamo il sistema di riferimento y in verso ascendente. Quindi v_a è positiva e l'accelerazione di gravità è $-g$. La velocità iniziale del sasso è la stessa dell'aerostato, mentre la sua coordinata iniziale è h, ponendo il suolo alla coordinata $y = 0$:

$$0 = h + v_a t - \frac{1}{2} g t'^2$$

Prendendo la radice positiva per riferirci al valore positivo di t':

$$t' = \frac{v_a + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} = 5.4\text{ s}$$

La sua velocità finale sarà data da:

$$v_f = v_a - gt' = -41\text{ m/s}$$

Moto Armonico

Soluzione dell'esercizio 38

Scegliamo come verso positivo dell'asse x quello concorde con il segno di $\vec{v}$, che da ora in poi scriveremo come v, essendo il problema 1D. Per quanto riguarda l'origine, scegliamo il centro di oscillazione. Avremo:

$$x(t) = l\sin(\omega t + \phi) + x_0$$

$$v(t) = l\omega\cos(\omega t + \phi)$$

Avendo scelto $x_0 = 0$ ed essendo in $t = 0$ la particella nel centro:

$$0 \text{ cm} = l\sin(\omega 0 \text{ s} + \phi)$$

Quindi, essendo l non nullo, la fase ϕ o è 0 o π. Dato che però nel primo tratto v è positiva, la fase non può essere π, perché altrimenti in t_1, secondo l'espressione di $v(t)$, la velocità sarebbe negativa. Quindi $\phi = 0$ rad.

Considerando la velocità, in un moto armonico la velocità si annulla negli estremi e quindi la velocità si annulla la prima volta dopo $T/4$, dove T è il periodo. Quindi:

$$t_2 = T/4 = \frac{\pi}{2\omega}$$

e quindi:

$$\omega = \frac{\pi}{2t_2} = 0.31 \text{ rad/s}$$

Conoscendo ora ω, si sostituisce nell'espressione della velocità insieme a t_1 e v:

$$v = \frac{\pi l}{2t_2}\cos\left(\frac{\pi t_1}{2t_2}\right)$$

$$l = \frac{2vt_2}{\pi\cos\left(\frac{\pi t_1}{2t_2}\right)} = 38 \text{ cm}$$

Cinematica 2D e 3D

Soluzione dell'esercizio 39

$$\vec{v}(t)4t\hat{i} + 2\hat{j}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{16t^2 + 4} = 2\sqrt{4t + 1}$$

$$v_x \tan\theta = v_y$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{2t}\right)$$

Soluzione dell'esercizio 40

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}(\hat{\imath} + 4t^2\hat{\jmath} + t\hat{k}) = 8t\hat{\jmath} + \hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}(8t\hat{\jmath} + \hat{k}) = 8\hat{\jmath}$$

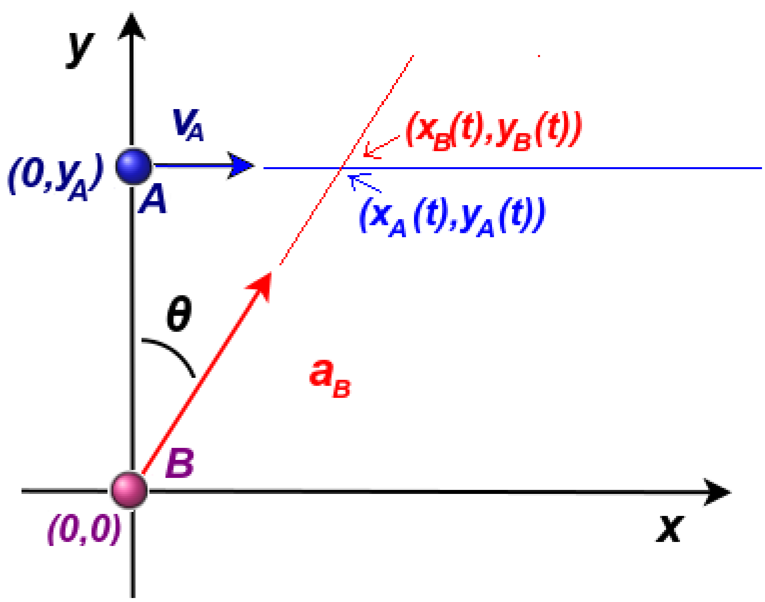


Figura II.1

Soluzione dell'esercizio 41

Il moto può essere scomposto lungo l'asse x e lungo l'asse y:

$$v_x = v_0 + a_x t$$
$$v_y = a_y t$$

Si nota che la componente dell'accelerazione sull'asse x e la velocità sull'asse x hanno segno opposto. Quindi il moto lungo x è uniformemente decelerato. Per trovare il tempo impiegato perché si raggiunga la coordinata massima x_m, si impone quindi che la velocità finale sia 0.

$$0 = v_0 + a_x t_m$$

$$t_m = -\frac{v_0}{a_x}$$

Quindi si va a trovare la componente v_y in quell'istante:

$$v_y(t_m) = a_y\left(-\frac{v_0}{a_x}\right) = -0.500\text{ms}^{-2} \cdot \left(\frac{3.00\text{ms}^{-1}}{1.00\text{ms}^{-2}}\right) = -1.50\text{ms}^{-1}$$

Quindi la velocità nella coordinata x_m e istante t_m (che si trova essere 3.00 s) è:

$$\vec{v}(t_m) = -1.50\hat{j}$$

Il vettore posizione nell'istante t_m è:

$$\vec{r}(t_m) = \vec{v_0}t_m + \frac{1}{2}\vec{a}{t_m}^2$$

$$\begin{aligned}\vec{r}(t_m) =&(3.00\hat{i}\text{ms}^{-1}) \cdot (3.00\text{s}) + \frac{1}{2}(-1.00\hat{i} - 0.50\hat{j})\text{ms}^{-2} \cdot (3.00\text{s})^2\\ =&(9.00\hat{i} + \frac{1}{2}(-9.00\hat{i} - 4.50\hat{j}))\text{m} =\\ =&(9.00\hat{i} - 4.50\hat{i} - 2.25\hat{j})\text{m} = (4.50\hat{i} - 2.25\hat{j})\text{m}\end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 42

Le due particelle si scontreranno se ad un istante t le loro coordinate coincideranno. Quindi bisogna imporre questa uguaglianza al tempo t:

$$\begin{cases} x_A(t) = x_B(t) \rightarrow v_A t = \frac{1}{2}(a_B \sin\theta)t^2 \\ y_A(t) = y_B(t) \rightarrow y_A = \frac{1}{2}(a_B \cos\theta)t^2 \end{cases}$$

Dalla seconda si ricava t:

$$t = \frac{2v_A}{a_B \sin\theta}$$

e si sostituisce nella prima e semplificando si ottiene:

$$y_A = \frac{2{v_A}^2 \cos\theta}{a_B \sin\theta^2}$$

Sostituendo $\sin\theta^2 = 1 - \cos\theta^2$:

$$\cos\theta^2 - \frac{2{v_A}^2}{y_A a_B}\cos\theta - 1 = 0$$

Considerando $\cos\theta$ come variabile si prende la radice positiva dell'equazione di secondo grado [1]:

$$\cos\theta = -\frac{v_A^2}{y_A a_B} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2v_A^2}{y_A a_B}\right)^2) + 4}$$

[1]Le soluzioni di $ax^2 + bx + c = 0$ sono:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Verifichiamo che i termini numerici siano adimensionali (dato che dobbiamo ottenere un coseno):

$$\frac{2v_A^2}{y_A a_B} = \frac{2 \cdot 3.0^2 \mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-2}}{30\mathrm{m}0.40\mathrm{ms}^{-2}}$$

Sostituendo i dati numerici:

$$\cos\theta = -0.75 + \frac{1}{2}\sqrt{2.25 + 4.0} = 0.50$$

Quindi:

$$\theta = \arccos(0.50) = 60°$$

Soluzione dell'esercizio 43

La componente v_x rimane costante e uguale a v_0, mentre v_y diminuisce:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = -gt \end{cases}$$

Quindi la posizione in funzione del tempo:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Quindi basta calcolare al tempo $t = 2$ s:

$$\begin{cases} x' = x(t) = 40\mathrm{m} \\ y' = y(t) = 30\mathrm{m} \end{cases}$$

Per trovare il raggio di curvatura R' della traiettoria in (x', y'), bisogna calcolare la componente normale a_n dell'accelerazione alla traiettoria in quel punto. Questa sarà infatti l'accelerazione centripeta. Guardando il disegno in figura II.2, si vede che:

$$a_n = g\cos\alpha = \frac{v'^2}{R'}$$

$$R' = \frac{v^2}{g\cos\alpha}$$

con:

$$v' = \sqrt{{v_0}^2 + (gt')^2}$$

Manca di conoscere α. Con riferimento alla figura II.2, dato che $\vec{a_n}$ è perpendicolare a v' e $\vec{g}$ è perpendicolare a v_0. Si trova $\cos\alpha$ come:

$$\cos\alpha = v_0/v'$$

Quindi:

$$R' = \frac{{v_0}^2 + (gt')^2}{g} \cdot \frac{v'}{v_0} = 110\mathrm{m}$$

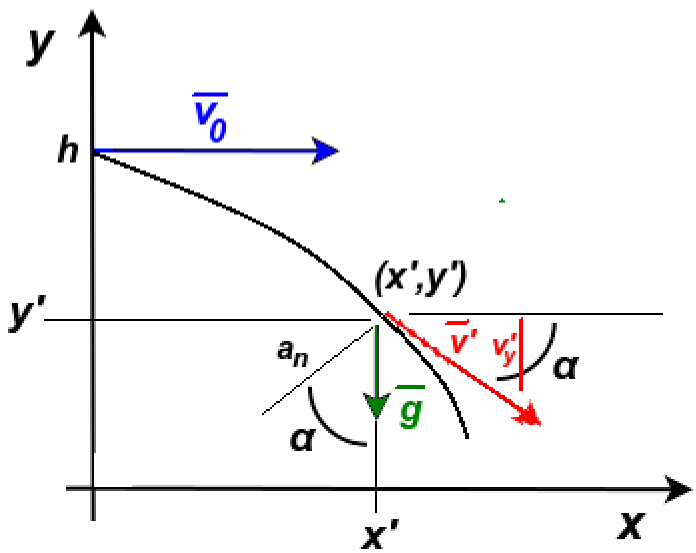


Figura II.2

Moto Circolare Uniforme

Soluzione dell'esercizio 44

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a_t}\,\hat{t} + \underbrace{\frac{v^2}{R}}_{a_n}\,\hat{n} \tag{II.1}$$

$$v = \omega R = Rkt^2 \tag{II.2}$$

Quindi:

$$a_t = \frac{d}{dt} = 2kRt \tag{II.3}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = k^2Rt^4 \tag{II.4}$$

Soluzione dell'esercizio 45

Dato che il modulo non cambia e date le direzioni e versi dei vettori di velocità iniziale e finale, si deduce che la virata può essere schematizzata come 1/4 di circonferenza. Il moto è quindi un moto circolare. Indicando con T il periodo, il raggio di curvatura R è dato da:

$$T = 2\pi\frac{R}{v}$$

$$R = v\frac{T}{2\pi}$$

Si trova l'accelerazione centripeta:

$$a = \frac{v^2}{R} = 2\pi\frac{v}{T}$$

Quindi si trova il periodo:

$$T = 2\pi\frac{v}{a}$$

Dovendo fare solo 1/4 di traiettoria e sostituendo ad a 4g:

$$t = \frac{1}{4}2\pi\frac{v}{4g} = \frac{1}{8}\pi\frac{4.0 \cdot 10^2 \mathrm{ms}^{-1}}{9.8\mathrm{ms}^{-2}} = 16\mathrm{s}$$

Soluzione dell'esercizio 46

Dal momento della rottura della corda, il moto del sasso diventa parabolico, con velocità iniziale orizzontale uguale alla velocità tangenziale nel moto circolare. Se t è il tempo di caduta al suolo:

$$\begin{cases} d = vt \\ h = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Ricavando t nella prima e sostituendolo nella seconda:

$$h = \frac{1}{2}g\frac{d^2}{v^2}$$

$$v = d\sqrt{\frac{g}{2h}} = 15.7\mathrm{m/s}$$

Quindi:

$$a = \frac{v^2}{l} = 160\mathrm{ms}^{-2}$$

Soluzione dell'esercizio 47

Il moto dei punti è circolare uniforme. Essi si muovono con velocità angolare data da:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Dato che i raggi delle due traiettorie sono differenti, le due velocità angolari saranno diverse:

$$\omega_1 = \frac{v}{R_1} = 1.0\mathrm{rad/s}$$
$$\omega_2 = \frac{v}{R_2} = 0.56\mathrm{rad/s}$$

Possiamo descrivere il moto circolare uniforme dei due punti mediante le leggi orarie angolari:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) =&\theta_{10} + \omega_1 t\\ \theta_2(t) =&\theta_{20} + \omega_2 t\end{aligned}$$

dove sono state inserite le posizioni angolari all'istante $t = 0$ s. Scegliamo l'origine del sistema di riferimento in modo che coincida con la posizione dei due punti all'istante $t = 0$:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) =&\omega_1 t\\ \theta_2(t) =&\omega_2 t\end{aligned}$$

All'istante τ la posizione di quei punti differirà di un angolo π:

$$\theta_1(\tau) - \theta_2(\tau) = \omega_1\tau - \omega_2\tau = \pi$$

da cui:

$$\tau = \frac{\tau}{\omega_1 - \omega_2} = 7.1\text{s}$$

Moto Parabolico

Soluzione dell'esercizio 48

$$\vec{v_i} = v_i\hat{\imath}$$

non c'è quindi componente lungo y nella velocità iniziale ($\theta = 0$).

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3.03 \text{ s}$$

La distanza percorsa in orizzontale in questo tempo è:

$$d = v_i t = (250 \text{ m/s}) \cdot (3.03 \text{ s}) = 758 \text{ m}$$

Soluzione dell'esercizio 49

Una volta lanciata la bomba manterrà la componente v_x della velocità dell'aereo, mentre v_y sarà sottoposta ad un moto uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla. Scegliendo il verso positivo dell'asse y verso il basso, questa accelerazione $g = g\hat{\jmath}$ è positiva. Il vettore $\vec{d}$ si scompone nelle componenti lungo i due assi:

$$\vec{d} = d\sin\theta\hat{\imath} - d\cos\theta\hat{\jmath}$$

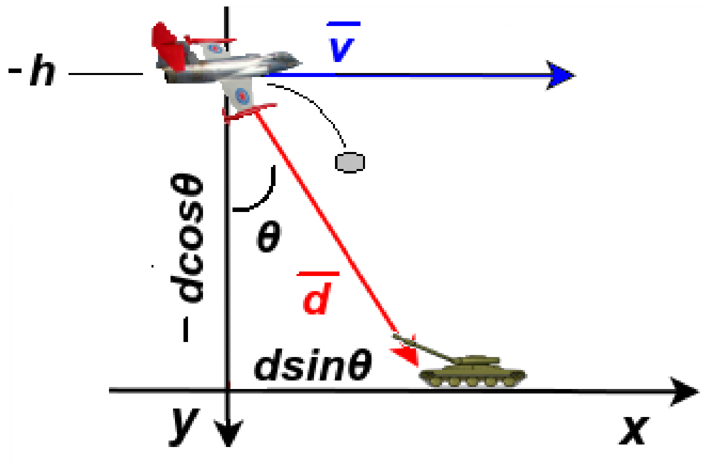


Figura II.3

Quindi all'istante t di impatto della bomba con il bersaglio, la distanza coperta da questa lungo i due assi sarà:

$$\begin{cases} \text{asse } x\text{:} \quad vt = d\sin\theta \\ \text{asse } y\text{:} \quad \frac{1}{2}gt^2 = d\cos\theta \end{cases}$$

Si ricava t dalla prima e si mette nella seconda:

$$\frac{1}{2}g\frac{d^2 \sin\theta^2}{v^2} = d\cos\theta$$

Sfruttando il fatto che $d\sin\theta = h$:

$$\cos\theta = \frac{h}{d}$$
$$\sin\theta^2 = \left(1 - \frac{h^2}{d^2}\right)$$

Quindi:

$$\frac{1}{2}g\frac{d^2\left(1 - \frac{h^2}{d^2}\right)}{v^2} = \cancel{d}\frac{h}{\cancel{d}}$$

Si ricava v:

$$v = \sqrt{\frac{1}{2}g\frac{d^2 - h^2}{h}} =$$
$$= \sqrt{0.5 \cdot 9.8\text{ms}^{-2} \cdot \frac{(2.4^2 - 0.8^2) \cdot 10^6\text{m}^2}{0.8 \cdot 10^3\text{m}}} =$$
$$= 180\text{m/s} = 640\text{Km/h}$$

Soluzione dell'esercizio 50

La componente orizzontale della velocità non cambia, quindi:

$$d = (v_0 \cos\theta)t'$$

$$t' = \frac{d}{v_0 \cos\theta} = \frac{22.0\text{m}}{(25.0\text{m/s})\cos 40^\circ} = 1.15\text{s}$$

Per trovare di quanto sia variata la quota rispetto a quella iniziale:

$$\Delta h = (v_0 \sin\theta)t' - \frac{1}{2}gt'$$

$$h' = \Delta h + h_0 = 12.0\text{m} + 1.50\text{m} = 13.5\text{m}$$

La componente verticale della velocità nel punto di impatto è data da:

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt = 4.80\text{m/s}$$

Il fatto che questa componente è maggiore di 0 ci dice subito che la traiettoria non ha ancora raggiunto il vertice, perché avrebbe dovuto aver già invertito la la velocità lungo y (fase discendente). Per trovare a che distanza sarebbe stato il vertice in assenza del muro, si impone:

$$v_y = 0 = v_0 \sin\theta - gt_m$$

$$t_m = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

Quindi:

$$d_v = (v_0 \cos\theta) * t_m = \frac{(v_0 \cos\theta) \cdot (v_0 \sin\theta)}{g} = \frac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{2g} = 31.4\text{m}$$

Per la variazione di quota in corrispondenza del vertice si impone:

$${v_y}^2 = 0 = {v_0}^2 \sin\theta - 2g\Delta h$$

$$\Delta h = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}$$

$$h_v = \Delta h + h_0 = 14.7\text{m}$$

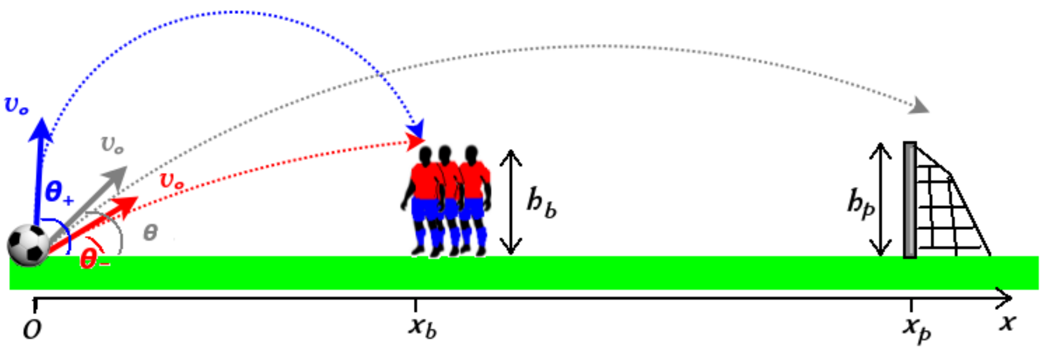


Figura II.4

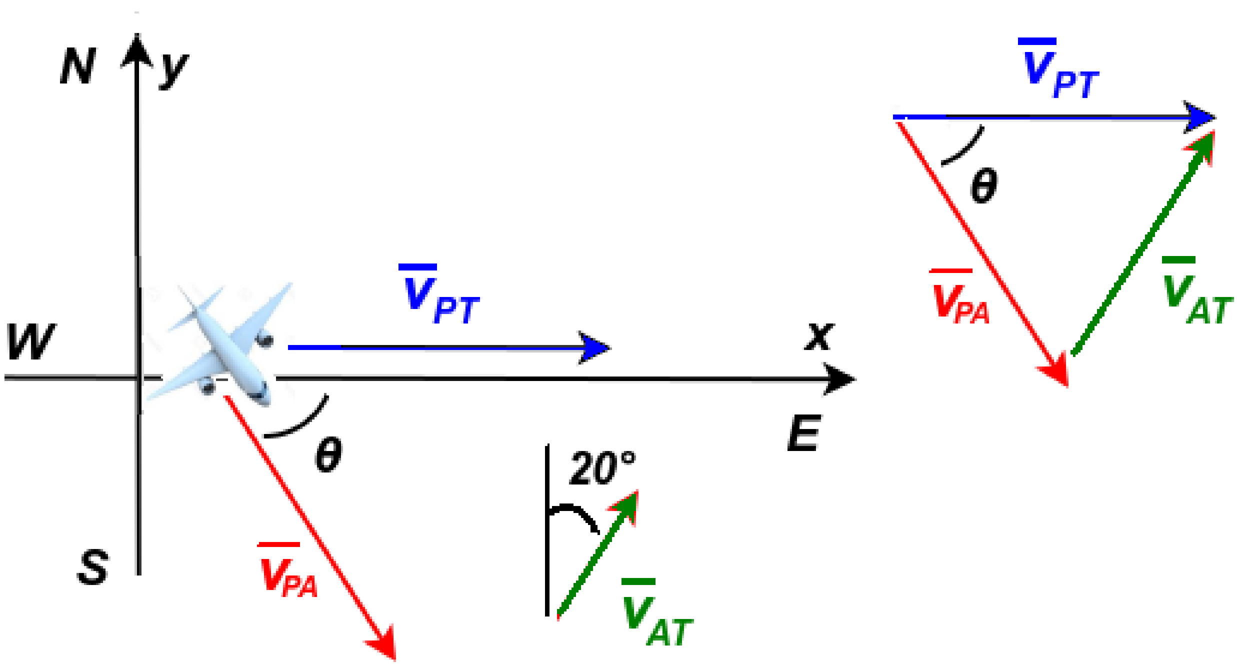


Figura II.5

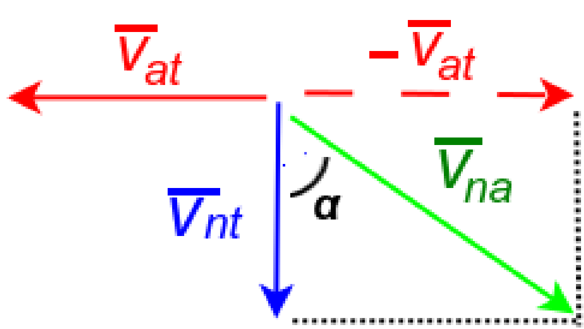


Figura II.6

Soluzione dell'esercizio 51

L'angolo θ_m è quello che permette di raggiungere il punto della traiettoria parabolica del pallone di coordinate (x_b, h_b):

$$\begin{cases} x_b = v_0 \cos\theta_m t \\ h_b = v_0 \sin\theta_m t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Sostituendo t ricavato dalla prima nella seconda si ricava l'equazione della traiettoria:

$$h_b = x_b \tan\theta_m - \frac{g {x_b}^2}{2(v_0 \cos\theta_m)^2}$$

Effettuando la sostituzione $\cos^2\theta_m = 1/(1+\tan^2\theta_m)$, si ottiene dopo qualche passaggio:

$$\tan^2\theta_m \underbrace{-\frac{2v_0^2}{g x_b}}_{b} \tan\theta_m + \underbrace{1 + \frac{2v_0^2}{g {x_b}^2} h_b}_{c} = 0$$

Troviamo due angoli che soddisfano l'equazione:

$$\theta_+ = \arctan\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}\right) = 82°$$

$$\theta_- = \arctan\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}\right) = 19°$$

Come si vede in figura II.4, ci sono quindi due traiettorie paraboliche che soddisfano l'equazione. Prendendo θ_- il pallone raggiunge la vetta della barriera nella sua fase ascendente, mentre prendendo θ_+ la raggiunge nella sua fase discendente (dopo quindi aver già raggiunto la quota massima [2]). Quindi, dovendo prendere l'angolo minino, $\theta_m = \theta_-$=19°.

Vediamo ora la seconda parte dell'esercizio. Dal risultato precedente troviamo che $\theta = 29°$. Troviamo quale sarà la quota incognita h della palla quando questa avrà percorso un tratto orizzontale lungo x_p:

$$\begin{cases} x_p = v_0 \cos\theta t \\ h = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava t e si inserisce nella seconda:

$$h = v_0 \sin\theta \frac{x_p}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x_p}{v_0 \cos\theta}\right)^2 = 3.8\text{m}$$

Essendo la porta h_p= 2.5 m, la palla va quindi alta sopra la traversa.

[2] Infatti nel caso con θ_+, la quota massima della traiettoria viene raggiunta quando la distanza x dal punto di partenza è:

$$x = \frac{v^2 \sin(2\theta_+)}{2g} = 5.1\text{m}$$

e quindi prima di raggiungere la barriera posta a 10 m.

Moti Relativi

Soluzione dell'esercizio 52

$$\vec{v_{PT}} = \vec{v_{PA}} + \vec{v_{AT}}$$

Per la componente y:

$$v_{yPT} = v_{yPA} + v_{yAT}$$

$$v_{yPT} = v_{yPA} + v_{yAT}$$

Dato che sappiamo che l'aereo si muove lungo la direzione Est (x), la componente lungo N-S è (y) nulla:

$$0 = -(215\text{Km/h})\sin\theta + (65.0\text{Km/h})\cos(20.0)$$

$$\theta = 16.5°$$

Per la componente x, essendo $\vec{v_{PT}}$ lungo x:

$$v_{PT} = v_{xPT} = v_{xPA} + v_{xAT}$$

$$v_{xPT} = (215\text{Km/h})\cos(16.5°) + (65.0\text{Km/h})(\sin(20.0)) = 228\text{Km/h}$$

$$\vec{v_{PT}} = 228\text{Km/h}\hat{i}$$

Soluzione dell'esercizio 53

I sistemi di riferimento sono a=auto e t=terreno. Con attenzione agli indici:

$$\vec{v}_{na} = \vec{v}_{nt} + \vec{v}_{ta}$$

$$\vec{v}_{na} = \vec{v}_{nt} - \vec{v}_{at}$$

Il vettore risultante si vede in figura II.6. Quindi l'angolo α si trova dal triangolo:

$$\alpha = \arctan v_{at}/v_{nt} = 57°$$

Capitolo III

Statica e Dinamica

Leggi di Newton

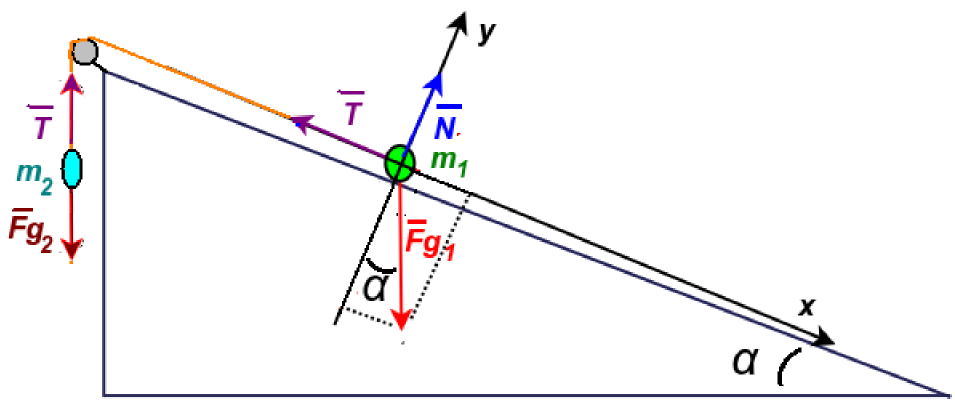


Figura III.1

Soluzione dell'esercizio 54

Considerando solo l'asse y:

$$m_1 g \sin\alpha = T = m_2 g$$

da cui:

$$\frac{m_2}{m_1} = \sin\alpha = \frac{1}{2}$$

Soluzione dell'esercizio 55

Prendiamo l'asse x lungo la guida diretto come $\vec{v}$ e l'asse y perpendicolare alla guida.

$$\begin{cases} x: \quad ma_x = -mg\cos\alpha - Fa \\ y: \quad N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

$$ma_x = -mg\sin\alpha - mg\cos\alpha\mu_d$$

$$a_x = -g(\sin\alpha + \mu_d \cos\alpha)$$

Abbiamo quindi un moto uniformemente decelerato. Dalle formule della cinematica:

$$v^2 + 2a_x l = 0$$

$$\frac{v^2}{2lg} = \sin\alpha + \mu_d \cos\alpha$$

$$\mu_d = \frac{v^2}{2lg\cos\alpha} - \tan\alpha = 0.16$$

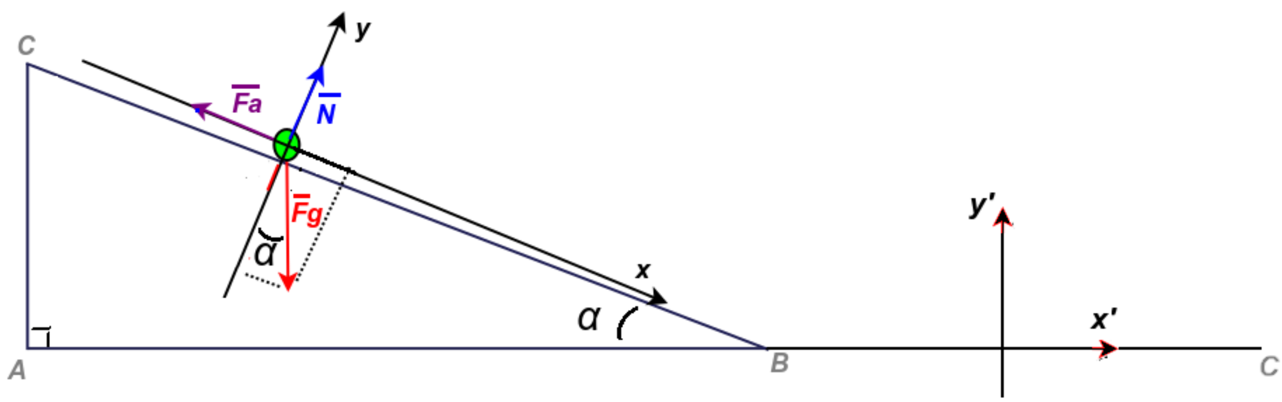


Figura III.2

Soluzione dell'esercizio 56

Si divide il problema in due parti (il tratto $\overline{AB}$ e quello $\overline{BC}$), ognuna con il suo sistema di riferimento. Nel primo caso avremo un moto uniformemente accelerato (abbiamo la componente della forza peso lungo la guida diminuita dalla forza di attrito), nel secondo un moto decelerato (in questo caso la forza peso è diretta perpendicolarmente al moto e rimane solo la forza di attrito). Quindi la velocità massima la troveremo nel punto B: $v_M = v_B$. Data la natura del raccordo in B, la velocità finale della prima parte sarà uguale a quella iniziale della seconda. Parte $\overline{AB}$: prendiamo gli assi xy diretti come in figura III.2. Si trova:

$$ma_x = mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha$$

$$a_x = g(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)$$

Il tratto percorso $\overline{AB}$=$h/\sin\alpha$. Quindi troviamo la velocità in B.

$$v_M^2 = 2g(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)\frac{h}{\sin\alpha}$$

$$v_M = \sqrt{2gh(1 - \mu_d \cot\alpha)} = 5.3\text{m/s}$$

Parte $\overline{BC}$:
Prendiamo gli assi $x'y'$ come in figure III.2.

$$ma_{x2} = -\mu_d mg$$

Imponiamo la condizione di velocità finale 0:

$$\overline{BC} = \frac{v_M^2}{2g\mu_d}$$

Il percorso totale è quindi:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \frac{h}{\sin\alpha} + \frac{v_M^2}{2g\mu_d} = 11\text{m}$$

Soluzione dell'esercizio 57

Nel tratto $\overline{BC}$ il moto è uniformemente decelerato con accelerazione di modulo:

$$a = g(\sin\beta + \mu_d \cos\beta)$$

quindi si trova il percorso massimo l fatto nel tratto $\overline{BC}$:

$$l = \frac{v_M^2}{2a}$$

La quota h_2 raggiunta sarà quindi:

$$h_2 = l\sin\beta = \frac{v_M^2}{2g(\sin\beta + \mu_d\cos\beta)}\sin\beta = 1.1\text{m}$$

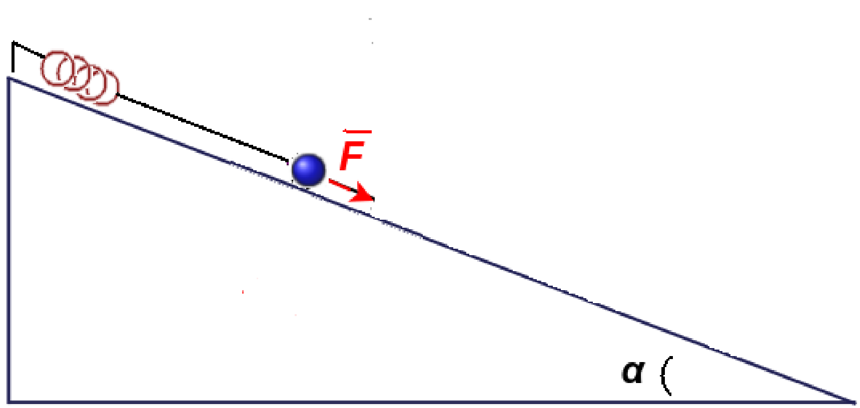


Figura III.3

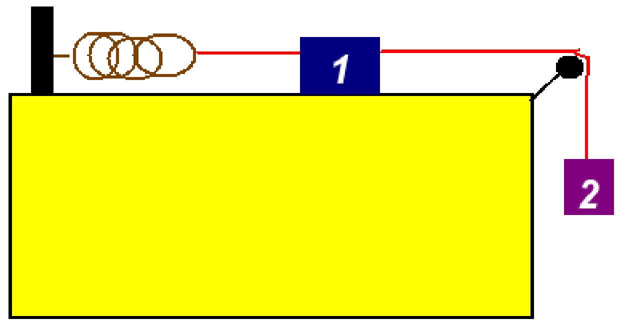


Figura III.4

Soluzione dell'esercizio 58

Lungo l'asse x lungo il piano inclinato, le componenti che devono annullarsi sono:

$$mg\sin\alpha + F = kx$$

$$k = \frac{mg\sin\alpha + F}{x} = 263\text{N/m}$$

Soluzione dell'esercizio 59

Lungo l'asse x lungo il piano inclinato, le componenti che devono annullarsi sono:

$$mg\sin\alpha + F = kx$$

$$k = \frac{mg\sin\alpha + F}{x} = 263\text{N/m}$$

Soluzione dell'esercizio 60

Le componenti delle forze agenti sul corpo 1 sono: Perpendicolari al piano:

$$N_1 = m_1 g$$

Parallele al filo:

$$F_e + \mu_s N_1 = T$$

Il modulo di T sarà uguale a $m_2 g$, disegnando il diagramma delle forze sul corpo 2. Quindi si trova:

$$kx + \mu_s m_1 g = m_2 g$$

$$x = \frac{g}{k}(m_2 - m_1) = 9.3 \cdot 10^{-2}\text{m}$$

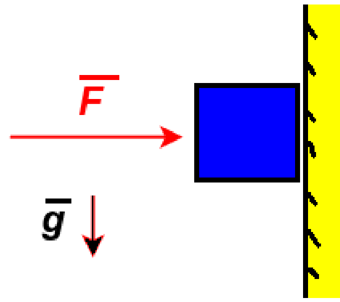


Figura III.5

Soluzione dell'esercizio 61

Disegnando il diagramma delle forze con asse x perpendicolare al muro e l'asse y lungo il muro e diretto verso il basso, si trova:

$$\begin{cases} x: & F = N \\ y: & mg = F_a \end{cases}$$

Dalla prima si trova:

$$F_a = \mu_s N = \mu_s F$$

Sostituendo:

$$m = \frac{\mu_s F}{g} = 0.82\text{Kg}$$

In caso di riduzione di F (F'=17 N), si ha sull'asse y:

$$ma_y = mg - \mu_d F'$$

$$a_y = g - \frac{\mu_d F'}{m} = 5.0\text{ms}^{-2}$$

Soluzione dell'esercizio 62

Scomponendo le forze che agiscono sul blocco nelle componenti orizzontali (asse x) e ortogonali al piano (asse y), troviamo su y:

$$F \sin\theta + N - mg = 0$$

poiché il corpo non si solleva ($F \sin\theta < mg$). Sull'asse x, dato che il corpo si muove a velocità costante, l'accelerazione è anch'essa di modulo 0:

$$F \cos\theta - F_a = 0$$

Poiché il corpo è in movimento siamo quindi in condizioni di equilibrio dinamico e non statico. Quindi il coefficiente che ci serve per calcolare il modulo della forza di attrito F_a è quello dinamico.

$$F \cos\theta - \mu_d N = F \cos\theta - \mu_d(mg - F \sin\theta) = 0$$

Quindi si trova:

$$\mu_d = \frac{F\cos\theta}{mg - F\sin\theta} = 0.067$$

$$\mu_s = 1.2\mu_d = 0.080$$

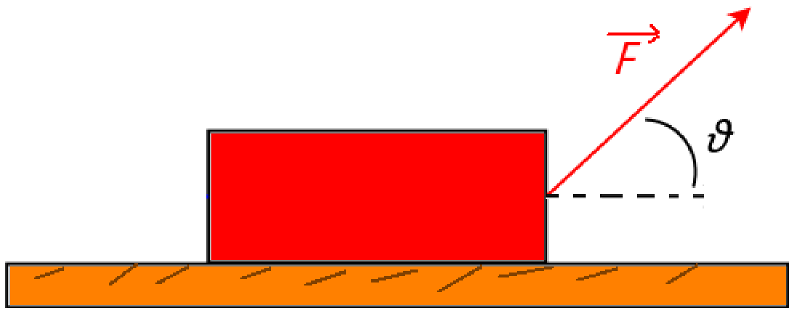


Figura III.6

Soluzione dell'esercizio 63

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_a + m\vec{g} + \vec{N}$$

Prendendo l'asse x orizzontale con verso positivo verso destra e l'y verticale ascendente, consideriamo le proiezioni delle forze sugli assi:

$$\begin{cases} x: & F\cos\theta - F_a = ma \\ y: & F\sin\theta + N - mg = 0 \end{cases}$$

dalla seconda:

$$N = (mg - F\sin\theta)$$

quindi:

$$Fa = \mu_d(mg - F\sin\theta)$$

Sull'asse x quindi:

$$ma = F\cos\theta - \mu_d(mg - F\sin\theta)$$

sapendo che $F = mg/2$:

$$ma = \frac{1}{2}mg\cos\theta - \mu_d mg(1 - \frac{1}{2}\sin\theta)$$

$$a = \frac{1}{2}g\cos\theta - \mu_d g(1 - \frac{1}{2}\sin\theta) = 4.1\ \text{m/s}^2$$

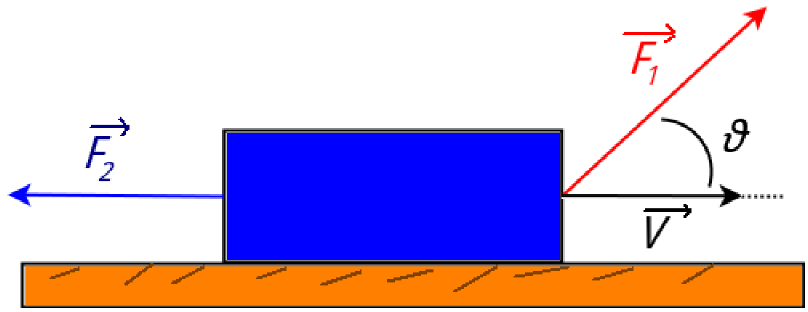


Figura III.7

Soluzione dell'esercizio 64

Per il primo principio:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_a + \vec{N} + \vec{F}_g = 0$$

dove $\vec{F}_a$ e $\vec{N}$ sono rispettivamente la forza di attrito e la forza normale. Prendendo l'asse x orizzontale con verso positivo verso destra e l'y verticale ascendente, consideriamo le proiezioni delle forze sugli assi:

$$\begin{cases} x: & F_1 \cos\theta - F_a - F_2 = 0 \\ y: & F_1 \sin\theta + N - mg = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda si trova N:

$$N = mg - F_1 \sin\theta$$

quindi:

$$F_a = \mu_d N = \mu_d(mg - F_1 \sin\theta)$$

Sostituendo nell'equazione delle forze lungo l'asse x:

$$F_1 \cos\theta = F_2 + \mu_d(mg - F_1 \sin\theta)$$

da cui:

$$F_1 = \frac{F_2 + mg\mu_d}{cos\theta + \mu_d \sin\theta} = 113 \text{ N}$$

Terza Legge di Newton

Soluzione dell'esercizio 65

I due blocchi devono avere la stessa accelerazione, essendo a contatto. Quindi, si può considerare il corpo come unico al fine di calcolarne l'accelerazione:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = 9.1 \text{ m/s}^2$$

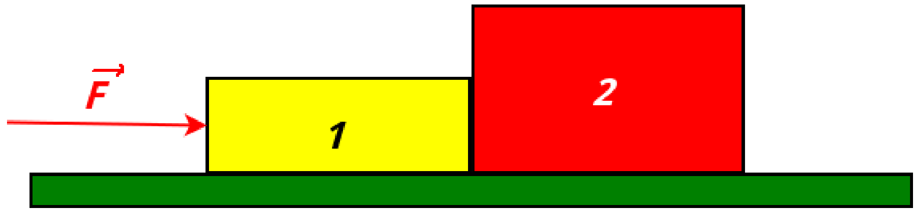


Figura III.8

La forza di contatto è interna ai due blocchi, quindi dobbiamo trattare i corpi separatamente, ognuno come un punto materiale sottoposto ad una forza risultante. Costruiamo quindi il diagramma di corpo libero di ciascun blocco (Fig. (III.13)). Su entrambi gli assi y le forze si annullano. Sull'asse x del primo corpo abbiamo:

$$F - f_{21} = m_1 a$$

Sul secondo:

$$f_{12} = m_2 a$$

Le forze f_{12} e f_{21} son dovute alla terza legge di Newton e hanno stesso modulo che poniamo uguale a f, stessa direzione, verso opposto e applicate su corpi diversi. Prendendo l'equazione dinamica per m_1:

$$f = F - m_1 a$$

sostituiamo l'accelerazione trovata prima:

$$f = F - m_1 \frac{F}{m_1 + m_2} = F\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) = 23\ \mathrm{N}$$

Figura III.9

Soluzione dell'esercizio 66

Consideriamo solo le forze orizzontali (positive verso destra):
sul blocco 1 agisce ($|f_{12}| = |f_{21}| = f$):

$$F - F_{a1} - f = m_1 a_1$$

Sul 2:

$$f - F_{a2} = m_2 a_2$$

I corpi sono a contatto, quindi: $a_1 = a_2 = a$. La massa totale: $M = m_1 + m_2$.
La forza di attrito totale: $F_a = F_{a1} + F_{a2}$. Quindi:

$$a = \frac{F - F_a}{m_1 + m_2}$$

Tornando alla dinamica del blocco 2:

$$f = F_{a2} + m_2 a = F_{a2} + m_2 \frac{F - F_a}{m_1 + m_2} = 8.5 \text{ N}$$

Sistemi di Riferimento Non Inerziali

Soluzione dell'esercizio 67

Nel sistema di riferimento non inerziale del filo, la tensione $\vec{T}$ del filo deve equilibrare la forza peso $m\vec{g}$ e una forza apparente di trascinamento $-m\vec{a}$. Indicando con θ l'angolo cercato, si scrive la condizione di staticità delle componenti lungo l'asse y (normale al suolo):

$$T \cos\theta = mg$$

Sull'asse x:

$$T \sin\theta = ma$$

Da queste si ricava:

$$\theta = \arctan\left(\frac{a}{g}\right) = 5.8°$$

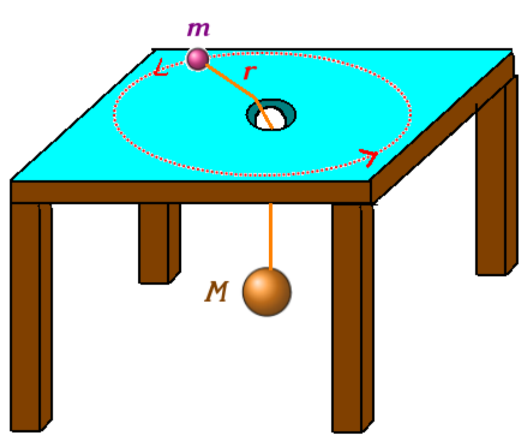


Figura III.10

Soluzione dell'esercizio 68

Perché M stia in equilibrio, il modulo della tensione T della corda deve essere uguale a Mg.

Mettiamoci ora nel sistema di riferimento non inerziale solidale con la palla che ruota. In questo sistema di riferimento abbiamo una forza apparente centrifuga che viene annullata dalla tensione del filo.

$$T = F_\tau = \frac{mv^2}{r}$$

Per le proprietà ideali del filo:

$$T = \frac{mv^2}{r} = Mg$$

$$v = \sqrt{\frac{Mgr}{m}} = 1.81 \text{ m/s}$$

Soluzione dell'esercizio 69

Ci troviamo in un sistema di riferimento non-inerziale in cui la persona risente di una forza apparente di trascinamento diretta verso il basso $\vec{F_a} = ma$.

1 Kgp=9.82 N

Chiamiamo F il modulo della forza diretta verso il basso che causa la lettura del peso sulla bilancia.

$$F = 9.82\frac{\text{N}}{\text{Kgp}} * 1.02 \cdot 10^2\text{Kg} = 1.01 \cdot 10^3\text{N}$$

$$F = mg + ma$$

$$m = \frac{F}{g + a} = 78.8\text{Kg}$$

Soluzione dell'esercizio 70

Considerando il sistema non inerziale solidale con la palla, troviamo il sistema descritto tramite gli assi y e r riportati in figura III.11. Sui due assi avremo:

$$\begin{cases} y: & T\cos\alpha = mg \\ r: & T\sin\alpha = F_\tau \end{cases}$$

F_τ è la forza centrifuga che compare nel sistema di riferimento non inerziale.

$$F_\tau = \frac{mv^2}{R} = \frac{mv^2}{l\sin\alpha}$$

Si ricava T dall'equazione sull'asse y e si inserisce in quella per l'asse y:

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

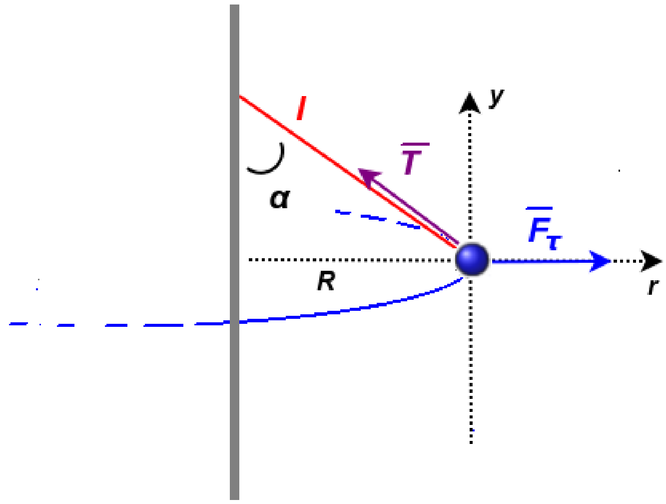


Figura III.11

$$mg\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{mv^2}{l\sin\alpha}$$

$$\frac{v^2}{gl} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cos^2\alpha + \frac{v^2}{gl}\cos\alpha - 1 = 0$$

Da cui, prendendo la soluzione positiva (α è compreso tra 0 e 90°, quindi $\cos\alpha > 0$):

$$\alpha = \arccos\left[\frac{-\frac{v^2}{gl} + \sqrt{\left(\frac{v^2}{gl}\right)^2 + 4}}{2}\right] = 60°$$

Soluzione dell'esercizio 71

Prima di tutto notiamo che le due corde e la sbarra formano un triangolo equilatero. Quindi l'angolo $\alpha = 60°$.

$$R = l\sin(60°)$$

Ci mettiamo nel sistema di riferimento non inerziale del corpo in rotazione. L'equazione vettoriale perché questo resti in rotazione è:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_\tau + m\vec{g} = 0$$

Sull'asse y:

$$T_1\cos\alpha = T_2\cos\alpha + mg$$

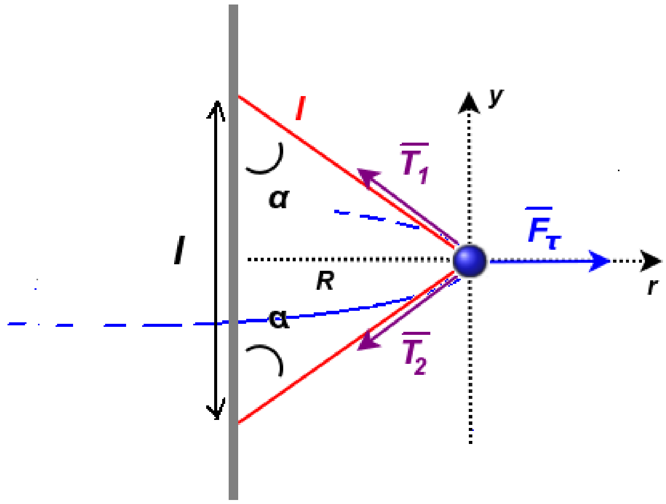


Figura III.12

$$T_1 = T_2 + \frac{mg}{\cos\alpha} = 35.1\text{N}$$

Sull'asse r, le componenti delle due tensioni annullano la forza centrifuga.

$$T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\alpha = \frac{mv^2}{l \sin\alpha}$$

$$T_1 + T_2 = \frac{mv^2}{l(\sin\alpha)^2}$$

$$v = \sin\alpha \sqrt{\frac{(T_1 + T_2)l}{m}} = 6.45\text{m/s}$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare considerando un sistema di riferimento inerziale, nel quale le due componenti sull'asse r delle tensioni sono responsabili di introdurre un'accelerazione sempre diretta lungo $\hat{r}$, quindi centripeta e responsabile di un moto circolare uniforme. Sull'asse r abbiamo:

$$T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\alpha = ma_c = m\frac{v^2}{R}$$

Che porta allo stesso risultato per v.

Soluzione dell'esercizio 72

Parte 1:
Possiamo scegliere di studiare il problema in un sistema di riferimento inerziale (figura III.14 a sinistra) oppure in uno non-inerziale solidale all'auto (figura III.14 a destra). Nel disegno la strada viene vista in spaccato e quindi diventa un piano inclinato.
Nel primo caso scegliamo gli assi nel sistema di riferimento uno normale al piano orizzontale

(asse y) e uno parallelo (asse r). Quest'ultimo ha direzione e verso coincidente di quello del raggio di curvatura della curva. Avremo:

$$\begin{cases} r: & N\sin\theta = ma_r \\ y: & N\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

Nel caso sull'asse y, abbiamo la statica lungo l'asse y. Lungo l'asse r, nell'equazione 1D $F = ma$, l'accelerazione risultante ha la direzione del raggio di curvatura della traiettoria e verso opposto. Quindi si tratta di una accelerazione centripeta $a_r = {v_m}^2/r$. Detto in altro modo, la componente lungo il raggio di curvatura di $\vec{N}$ agisce come forza centripeta. Quindi, si ricava:

$$N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta = m\frac{{v_m}^2}{r}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{{v_m}^2}{rg}\right) = 43°$$

Allo stesso risultato possiamo arrivare considerando un sistema di riferimento non-inerziale solidale con l'automobile. Quest'ultima infatti risentirà di una forza centrifuga $\vec{F_\tau}$, diretta secondo il raggio di curvatura della traiettoria. Perché non sbandi verso la parte superiore della curva, F_τ deve essere equilibrata da una forza uguale ed opposta. Scegliamo gli assi uno parallelo alla strada (s) e uno normale all'asfalto n. Studieremo quindi questo problema come un problema di statica (nel caso inerziale era di dinamica lungo l'asse r) lungo entrambi questi assi[1]. Avremo:

$$\begin{cases} n: & N - mg\cos\theta - F_\tau\sin\theta = 0 \\ s: & F_\tau\cos\theta - mg\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda e sostituendo F_τ con $m{v_m}^2/r$, si ottiene:

$$\theta = \arctan\left(\frac{{v_m}^2}{rg}\right) = 43°$$

Parte 2:
Studiamo il problema nel riferimento non inerziale dell'auto. Quando la velocità risulta minore di v_m, l'auto scivolerà verso il basso uscendo di strada, poiché la forza centrifuga non sarà più sufficiente ad equilibrare la componente lungo la strada della forza peso. Data una velocità minima di v_1 di 50 Km/h si può trovare un coefficiente di attrito statico per la strada che fa in

[1]Potevamo anche sceglire di mantenere gli stessi assi. In quel caso avremmo avuto:

$$\begin{cases} r: & N\sin\theta - F_\tau = 0 \\ y: & N\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

che avrebbe portato agli stessi risultati.

modo di trovare l'equilibrio per velocità comprese tra v_1 e v_m. Il coefficiente di attrito è quello statico, poiché lungo l'asse s il problema è di statica. Dato che l'auto tende a scivolare verso il basso, lungo l'asse s avremo una componente aggiuntiva di forza di attrito con verso $\hat{s}$. Quindi la forza di attrito va ad aggiungersi alla forza centrifuga $F_{1\tau}$ per contrastare la forza peso:

$$s: \quad F_{1\tau} \cos\theta + F_{1a} - mg \sin\theta = 0$$

Bisogna trovare $\vec{F}_{1a} = \mu_s N \hat{s}$. Sull'asse n:

$$n: \quad N - mg\cos\theta - F_{1\tau}\sin\theta = 0$$

$$N = mg\cos\theta + m\frac{v_1^2}{r}\sin\theta$$

Si ricava quindi:

$$mg\sin\theta = m\frac{v_1^2}{r} + \mu_s\left(mg\cos\theta + \frac{v_1^2}{r}\sin\theta\right)$$

$$\mu_s = \frac{g\tan\theta - \frac{v_1^2}{r}}{g + \frac{v_1^2}{r}\tan\theta} = 0.68$$

Parte 3:
Aumentando ora la velocità sopra v_m, la forza centrifuga prevale sulla forza peso, facendo uscire l'auto di strada verso l'alto. L'attrito quindi in questo caso sarà diretto lungo $-\hat{s}$. Dato il coefficiente di attrito precedentemente trovato, ci sarà una velocità massima v_2 entro la quale l'attrito, insieme alla forza peso, riesce a contrastare la forza centrifuga. Analogamente al caso precedente, le nuove condizioni di equilibrio saranno:

$$\begin{cases} s: \quad F_{2\tau}\cos\theta - F_{2a} - mg\sin\theta = 0 \\ n: \quad N - mg\cos\theta - F_{2\tau}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

che portano a:

$$N = mg\cos\theta + m\frac{v_2^2}{r}\sin\theta$$

e quindi a:

$$mg\sin\theta + \mu_s\left(mg\cos\theta + m\frac{v_2^2}{r}\sin\theta\right) = m\frac{v_2^2}{r}\cos\theta$$

da cui:

$$v_2 = \sqrt{gr\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}} = 260\text{Km/h}$$

Quindi la velocità può essere aumentata di 140 Km/h sopra v_m.

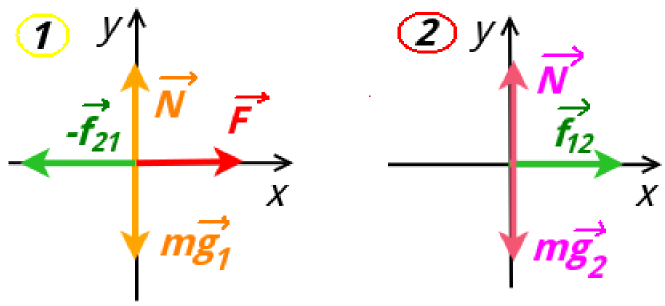


Figura III.13: Diagramma di corpo libero per il problema in Fig. (III.8)

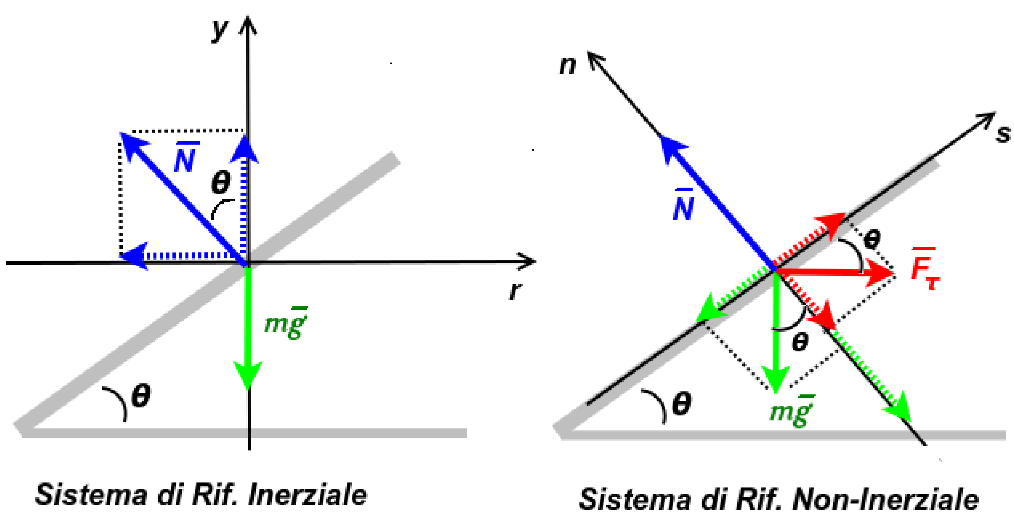


Figura III.14: Diagrammi di corpo libero per l'auto in curva sopraelevata (senza attrito).

Capitolo IV

Energia

Energia e Lavoro

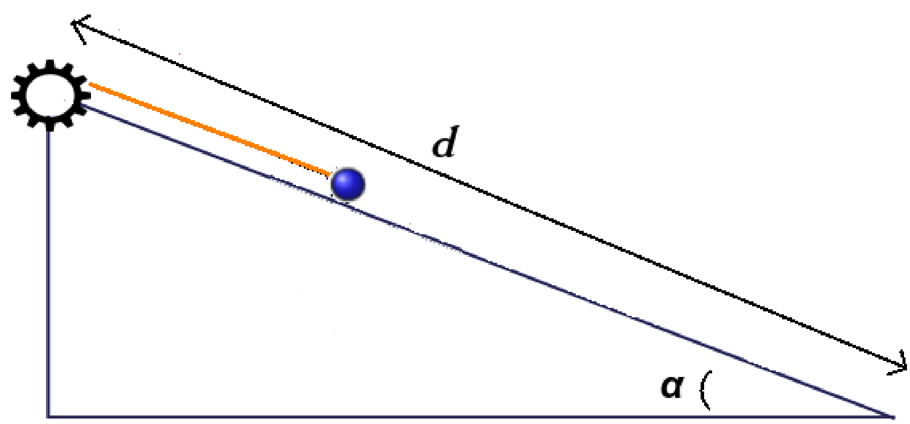


Figura IV.1

Soluzione dell'esercizio 73

$$L_N = \vec{N} \bullet \vec{d} = 0$$

Il lavoro della forza peso può essere calcolato in due modi:
1)

$$L_g = F_g d \cos\frac{2\pi}{3} = -2.5 \cdot 10^2 \text{ J}$$

2)

$$L_g = -mgd \sin\frac{\pi}{6} = -2.5 \cdot 10^2 \text{ J}$$

La variazione di energia cinetica è nulla. Quindi:

$$\Delta K = L_g + L_N + L_T = 0$$

$$L_T = -L_g = 2.5 \cdot 10^2 \text{ J}$$

Soluzione dell'esercizio 74

$$L = \int_{2\text{ m}}^{-4\text{ m}} 2x\text{ N/m} + \int_{3\text{ m}}^{-3\text{ m}} 3\text{ N} = x^2\text{ N/m}\Big|_{2\text{ m}}^{-4\text{ m}} + 3x\text{ N}\Big|_{3\text{ m}}^{-3\text{ m}} = (16-4)\text{ Nm} + 3(-6)\text{ Nm} = -6\text{ J}$$

Soluzione dell'esercizio 75

$$L = \vec{F} \bullet \vec{d}$$

$$y = (-5.00, 5.00, 4.00)\text{ N} \bullet \begin{pmatrix} 2.00 \\ 2.00 \\ 7.00 \end{pmatrix}\text{ m} = [(-5.00)(2.00) + (5.00)(2.00) + (4.00)(7.00)]\text{ Nm} = 28\text{ J}$$

Soluzione dell'esercizio 76

Convertiamo la velocità in SI:

$$v = 20.0\text{ m/s}$$

a)

$$\Delta k = \frac{1}{2}mv^2 = 332\text{ kJ}$$

b)

$$\mathcal{P}_m = \frac{\Delta L}{\Delta t} = 10\text{ kW}$$

c)

$$a = \frac{v}{t}$$

$$\mathcal{P}_i(t = 33\text{ s}) = Fv = mav = m\frac{v^2}{t} = 20\text{ kW}$$

Soluzione dell'esercizio 77

Se introduciamo l'attrito dinamico:

$$L_T = -L_a - L_g = mgd(\mu\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}) = 2.9 \cdot 10^2\text{ J}$$

Soluzione dell'esercizio 78

Il lavoro compiuto dalla forza peso durante il tratto $\overline{AB}$ è dato da:

$$L_p = mgh$$

Il lavoro della forza di attrito è invece:

$$L_a = F_a \frac{h}{\sin\alpha} = \mu_d mgh \cot\alpha$$

La variazione di energia cinetica (il corpo parte da fermo) è:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_M^2$$

Quindi:

$$\Delta K = L_p - L_a = mgh(1 - \mu_d \cot\alpha)$$

$$v_M = \sqrt{2gh(1 - \mu_d \cot\alpha)} = 5.3\text{m/s}$$

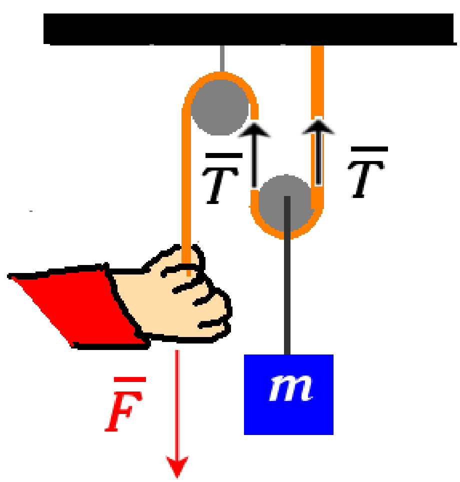


Figura IV.2

Soluzione dell'esercizio 79

a) La tensione della fune contribuisce due volte al sollevamento del corpo (il sistema è un "moltiplicatore di forza"). Dato che il corpo sale a v costante, le due forze equilibrano la forza peso (per il primo principio della dinamica).

$$2T = mg$$

$$F = \frac{mg}{2}$$

b) Per far salire salire di d la massa, i due tratti di corda della puleggia a destra devono accorciarsi entrambe della stessa quantità. Conservando la lunghezza totale del filo, la mano si sarà quindi abbassata di una quantità $2d = 4.00$ cm.
c)

$$L_F = F2d = 3.9 \text{ J}$$

d) Per il teorema delle forze vive ($\Delta K = 0$):

$$L_g = -3.9 \text{ J}$$

Energia Meccanica

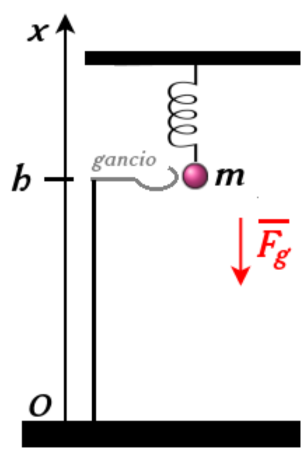


Figura IV.3

Soluzione dell'esercizio 80

Il gancio fa sì che il corpo venga rilasciato con velocità nulla. Ponendo l'energia potenziale in O uguale a zero:

$$U_g(x) = mgx$$

Mentre l'energia potenziale elastica:

$$U_e(x) = \frac{1}{2}k(x-h)^2$$

Essendo tutte forze conservative:

$$\text{In } x = h \quad E = U_g(h) = mgh$$

$$\text{In } x = 0 \quad E = U_e(0) = \frac{1}{2}kh^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}kh^2$$

$$k = 2\frac{mg}{h} = 98.1\ \mathrm{N/m}$$

Per trovare k, non possiamo semplicemente uguagliare i moduli delle due forze in gioco in O, perché non si tratta di un problema di statica da calcolare in quel punto. Il fenomeno si è svolto a partire da una quota h con velocità iniziale nulla. Il corpo è stato prima accelerato e poi frenato fino ad arrivare sulla quota O con velocità zero.

Soluzione dell'esercizio 81

Nei punti di massima elongazione:

$$E = U = \frac{1}{2}kd^2$$

Nell'origine:

$$E = K = \frac{1}{2}mv^2$$

Nel punto x', $U(x') = K(x')$:

$$E = \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}kx'^2 + \frac{1}{2}mv(x)^2$$

Per l'uguaglianza di K e U in quel punto:

$$E = \frac{1}{2}kd^2 = kx'^2$$

$$x' = \pm\frac{d}{\sqrt{2}} = 2.1\ \mathrm{cm}$$

Soluzione dell'esercizio 82

Allungando le molle in un punto generico dell'asse x verso l'alto oltre l'origine, ogni molla si allunga di una quantità Δl data da:

$$\Delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l$$

La forza di richiamo sviluppata da ciascuna molla avrà modulo:

$$|\vec{F}| = -k\Delta l = -k(\sqrt{l^2 + x^2} - l)$$

Le due componenti lungo l'asse y di queste forze si annulleranno a vicenda, mentre si sommano le componenti lungo l'asse x. Per un x generico, il seno dell'angolo θ compreso tra le molle e l'asse y è dato:

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}$$

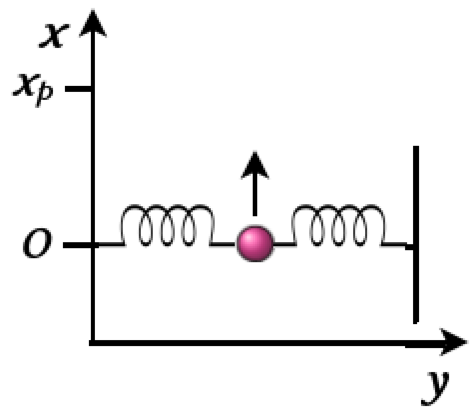


Figura IV.4

Quindi la forza risultante sarà:

$$R = -2F_x = -2k\Delta l \sin\theta = -2k(\sqrt{l^2 + x^2} - l)\frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}$$

Che si può riscrivere, introducendo la quantità adimensionale x/l (che faciliterà i calcoli finali) come:

$$R = -2kl\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{l}\right)^2}}\right)\left(\frac{x}{l}\right)$$

Il lavoro totale fatto dalle molle sarà:

$$L_e = \int_0^{x_p} R(x)dx$$

$$L = -L_e = 2kl\left[\int_0^{x_p} \frac{x}{l}dx - \int_0^{x_p} \frac{\frac{x}{l}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{l}\right)^2}}dx\right]$$

$$L = 2kl^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x_p}{l}\right)^2 - \sqrt{1 + \left(\frac{x}{l}\right)^2} + 1\right] = 2.5 \cdot 10^{-3}\mathrm{J}$$

Soluzione dell'esercizio 83

Nell'istante finale la velocità è nulla perché la caduta della massa viene arrestata dall'intervento della molla. Il totale la massa è caduta coprendo un tratto verticale lungo $(l + h)$. Quindi l'energia potenziale gravitazionale si è convertita in energia potenziale elastica:

$$mg(l + h) = \frac{1}{2}kl^2$$

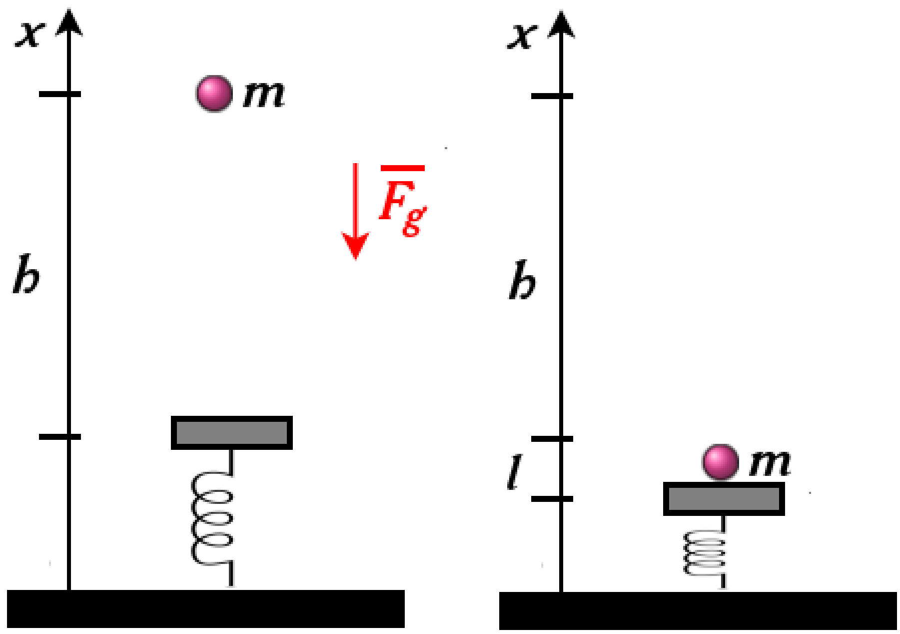


Figura IV.5

Quindi:

$$\frac{1}{2}kl^2 - mgl - mgh = 0$$

$$l = \frac{mg + \sqrt{(mg)^2 + 2kmgh}}{k} = 7.51 \cdot 10^{-3}\text{m}$$

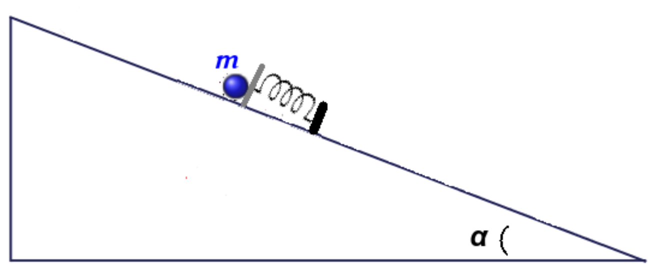


Figura IV.6

Soluzione dell'esercizio 84

a) U_e:

$$U_e = \frac{1}{2}kl^2 = 39.2\text{J}$$

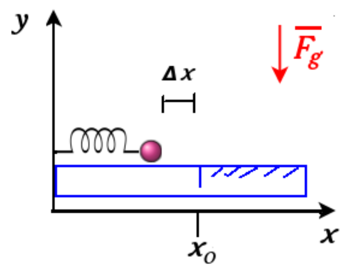


Figura IV.7

b) Dal principio di conservazione dell'energia:

$$\underbrace{K_0}_{0} + U_0 = \underbrace{K_f}_{0} + U_f$$

Poiché nell'istante finale si ha solo energia gravitazionale

$$\frac{1}{2}kl^2 = mgh = 39.2\text{J}$$

c) Dall'ultima relazione:

$$h = \frac{Uf}{mg}$$

L'intero tragitto L:

$$L = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{Uf}{mg\sin\theta} = 4.00\text{m}$$

Soluzione dell'esercizio 85

a) Lungo l'asse y:

$$N = mg$$

quindi una volta oltrepassato x_0, l'attrito sarà:

$$\vec{F}_a = -\mu_d mg\hat{i}$$

L'energia dissipata sarà uguale al lavoro della forza di attrito:

$$\Delta E_m = -L_a = \mu_d mgD = 67\text{J}$$

b) l'energia cinetica massima si avrà in corrispondenza di x_0. In quel punto infatti tutta l'energia meccanica (che fino a quel momento si è conservata, essendo l'attrito nullo) sarà tutta nell'energia cinetica del corpo.

$$E_m = K_{max} = 67\text{J}$$

c) Nell'istante iniziale, tutta l'energia meccanica era in energia potenziale (il corpo era fermo):

$$E_m = K_{max} = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{2K_{max}}{k}} = 0.46\text{m/s}$$

Soluzione dell'esercizio 86

La differenza di quota durante il moto:

$$\Delta h = (d + x)\sin\theta$$

Scegliamo il punto ad energia potenziale gravitazionale uguale a 0 quello in cui la molla rimane a riposto. In questo l'energia gravitazionale iniziale si è trasformata in energia potenziale elastica:

$$mg(d + x)\sin\theta = \frac{1}{2}kx^2$$

$$d = \frac{kx^2}{2mg\sin\theta} = 1.2\cdot 10^{-2}\text{ m}$$

Punti di Equilibrio

Soluzione dell'esercizio 87

$$\left.\frac{dU(x)}{dx}\right|_{r_0} = 0$$

$$-\frac{12k_1}{{r_0}^{13}} + \frac{6k_2}{{r_0}^{7}} = 0$$

$$-\frac{1k_1}{{r_0}^{6}} + k_2 = 0$$

$$r = \sqrt[6]{\frac{2k_1}{k_2}}$$

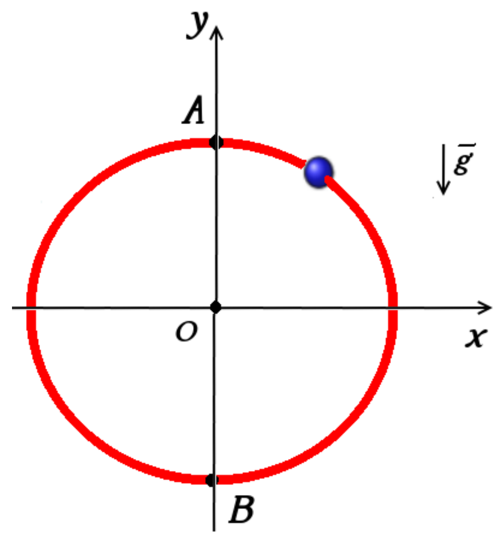


Figura IV.8

Soluzione dell'esercizio 88

Assumiamo la quota del punto B come il potenziale gravitazionale 0. Indicando con θ l'angolo che il raggio che indica la posizione della massa sul cerchio forma con l'asse x (θ quindi è 0 quando la massa si trova sull'estremo destro del cerchio). Un generico punto sul cerchio avrà quota:

$$y = r + r\sin\theta$$

Quindi il potenziale:

$$U = mgy = mgr(1 + \sin\theta)$$

Al variare di θ tra 0 e 2π quindi vengono descritti tutte le possibili quote. Uguagliamo la derivata rispetto a θ di U a 0 per trovare i punti di equilibrio:

$$\frac{dU}{d\theta} = mgr\cos\theta = 0$$

Si trovano quindi i punti di equilibrio:

$$\begin{cases} A \equiv \theta = \frac{\pi}{2} \\ B \equiv \theta = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Facendo:

$$F = -\frac{dU}{d\theta} = -mgr\cos\theta = 0$$

si trova la forza, che è la componente tangenziale al cerchio della forza peso, mentre quella radiale viene annullata dalla reazione vincolare. Facciamo la derivata della forza rispetto a θ per vedere se è crescente o decrescente nei punti di equilibrio A e B:

$$\frac{dF}{d\theta} = mgr\sin\theta$$

In A:

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_A = mgr\sin\frac{\pi}{2} = mgr > 0$$

quindi A è un punto di equilibrio instabile, perché F è crescente in quel punto.
In B:

$$\left.\frac{dF}{d\theta}\right|_B = mgr\sin\frac{3\pi}{2} = -mgr < 0$$

quindi B è un punto di equilibrio stabile, poiché F e decrescente in quel punto. Quindi per piccoli spostamenti intorno a B la forza riporta la massa verso la posizione di equilibrio.

Capitolo V

Quantità di Moto e Urti

Centro di Massa

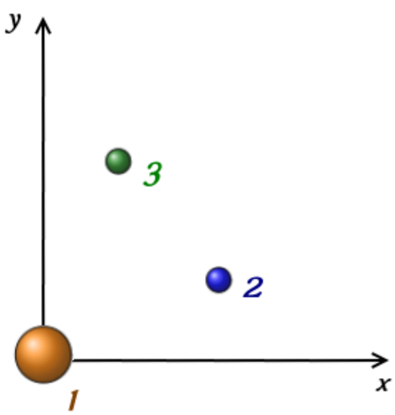


Figura V.1

Soluzione dell'esercizio 89

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0.5 \text{ m}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0.6 \text{ m}$$

Soluzione dell'esercizio 90

Scegliendo il sistema di riferimento come in figura V.2:

$$x_{cm} = \frac{m(+L) + m(0) + 3m(+L/2)}{5m} = 0.5L = 11 \text{ cm}$$

$$y_{cm} = \frac{M(-L/2) + M(-L/2) + 3M(0)}{5m} = -L/5 = -4.4 \text{ cm}$$

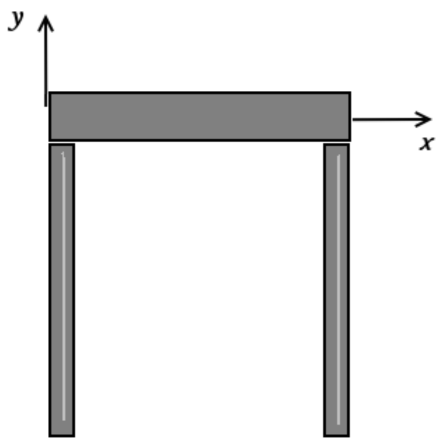


Figura V.2

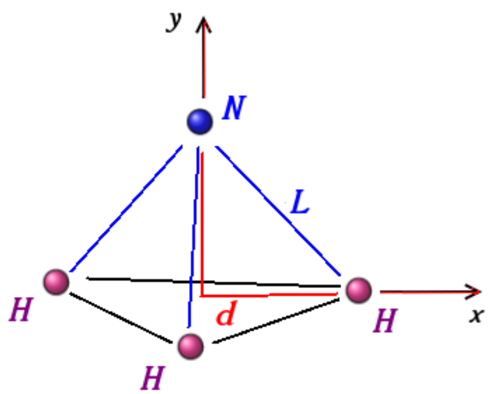


Figura V.3

Soluzione dell'esercizio 91

Per ragioni di simmetria, il centro di massa sarà sull'asse y, quindi $x_{cm} = 0$. Ponendo uguale a 0 la coordinata y degli atomi di idrogeno:

$$y_{cm} = \frac{m_N y_N}{m_N + 3m_H}$$

dove Y_N è la coordinata dell'atomo di azoto, che si trova con il teorema di Pitagora:

$$y_N = \sqrt{L^2 - d^2}$$

Quindi:

$$y_{cm} = \frac{13.9 m_H \sqrt{L^2 - d^2}}{13.9 m_H + 3m_H} = 3.3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Seconda Legge di Newton per sistemi

Soluzione dell'esercizio 92

La forza totale è:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-1.0\hat{\imath} + 1.0\hat{\jmath})\ \mathrm{N}$$

La massa totale è: $M = m_1 + m_2 = 2.00$ kg.

$$M\vec{a}_{cm} = \vec{F}$$

$$\vec{a}_{cm} = (-0.5\hat{\imath} + 0.5\hat{\jmath})\ \mathrm{m}/^2$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}_{cm}t^2 = (1.0\hat{\imath} + 2.0\hat{\jmath})\ \mathrm{m} + \frac{1}{2}(-0.5\hat{\imath} + 0.5\hat{\jmath})\ \mathrm{m}/^2(16)\ \mathrm{s}^2$$

$$\vec{r}_f = (1.0\hat{\imath} + 2.0\hat{\jmath})\ \mathrm{m} + (-4.0\hat{\imath} + 4.0\hat{\jmath})\ \mathrm{m} = (-3.0\hat{\imath} + 6.0\hat{\jmath})$$

Impulso

Soluzione dell'esercizio 93

La quantità di moto iniziale è:

$$\vec{q}_i = m\vec{v}_i$$

quella finale:

$$\vec{q}_f = m\vec{v}_f$$

L'impulso è:

$$\vec{-j}_f = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) = 2.64 \cdot 10^4\hat{\imath}\ \mathrm{kg{\cdot}m/s}$$

La forza media è:

$$\langle F \rangle = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 1.76 \cdot 10^2\hat{\imath}\ \mathbf{N}$$

Conservazione della Quantità di Moto

Soluzione dell'esercizio 94

Poniamo l'origine di un sistema di riferimento x, y nel cannone. Troviamo le coordinate del vertice della traiettoria. Il tempo di arrivo al vertice del proiettile è:

$$t_v = v\frac{\sin\theta}{g}$$

Quindi:

$$x_v = v^2 \frac{\sin 2\theta}{2g}$$

mentre

$$y_v = v^2 \frac{\sin^2 \theta}{2g}$$

Prima e dopo l'esplosione, la quantità di moto totale si conserva. Considerando che uno dei frammenti ha velocità nulla e dato che la velocità al momento dell'esplosione ha componente nulla lungo y (essendo il vertice di una traiettoria di un moto parabolico):

$$mv \cos \theta \hat{i} = \frac{m}{2} V \hat{i}$$

dove m è la massa totale della granata e $\vec{V} = V\hat{i}$ è la velocità del proiettile con velocità non nulla. Si ricava che:

$$V = 2v \cos \theta = t_v$$

Entrambi i proiettili (dato che la componente della velocità lungo y della velocità iniziale di entrambi è nulla) cadranno in un tempo:

$$t = \sqrt{2y_v g}$$

Il primo frammento, mantenendo una velocità 0 lungo x cade ad una distanza $x_v = 18$ m. L'altro compie una distanza orizzontale aggiuntiva x' dalla coordinata x_v del vertice:

$$x' = 2v \cos \theta * t_v.$$

Dal cannone quindi cadrà ad una distanza:

$$d = x_v + x' = 53 \text{ m}$$

Soluzione dell'esercizio 95

a) L'esplosione che porta allo sparo non altera la quantità di moto perché è figlia di forze interne al sistema (cannone più proiettile). Tuttavia il sistema non è completamente isolato, perché ci sono delle forze esterne (forza peso e reazione vincolare del suolo). La reazione vincolare esercita una reazione impulsiva durante l'urto. Le due forze esterne tuttavia non hanno componente lungo l'asse x orizzontale e quindi la componente su x della quantità di moto di conserva:

$$Q_x = \text{costante} = 0$$

Indichiamo con $\vec{V} = V\hat{i}$ la velocità di rinculo del cannone dopo lo sparo rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. $\vec{v_0}$ è la velocità del proiettile rispetto al cannone. Rispetto al sistema di riferimento inerziale la componente lungo x di questa velocità è $v_{0x} + V_x$. La conservazione della quantità di moto lungo x dà:

$$m(v_{0x} + V_x) + MV_x = 0$$

da cui:

$$V_x = -\frac{mv_0 \cos\theta}{M+m} = -0.58 \text{ m/s}$$

b) Indichiamo con d l'accorciamento:

$$\frac{1}{2}MV_x = \frac{1}{2}kd^2$$

$$d = \left|\sqrt{\frac{M}{k}}V_x\right| = 0.58 \text{ m}$$

Soluzione dell'esercizio 96

Si applica la conservazione della quantità di moto:

$$(M+m)v_0 = mv + M(v - v_r)$$

da cui:

$$v = v_0 + \frac{Mv_r}{M+m} = 4.4 \cdot 10^4 \textbf{ km/h}$$

Soluzione dell'esercizio 97

Essendoci solo forze interne la quantità di moto si conserva:

$$\vec{v}_0(m_1 + m_2) = \vec{v}_1 m_1 + \vec{v}_2 m_2$$

Indicando con $m = m_1 + m_2$ la massa totale:

$$\vec{v}_0 m = 0.60m\vec{v}_1 + 0.40m\vec{v}_2$$

Lungo l'asse x:

$$v_0 = 0.60v_1 + 0.40v_{2x}$$

lungo l'asse y:

$$0 = 0 + 0.40v_{2y}$$

quindi $v_{2y} = 0$ e

$$v_{2x} = \frac{v_0 - 0.60v_1}{0.40} = -12 \text{ m/s}$$

Quindi:

$$\vec{v}_2 = -12\hat{\imath} \text{ m/s}$$

Soluzione dell'esercizio 98

La quantità di moto si conserva nel lancio (la reazione vincolare e la gravità sono normali a $\vec{v}$):

$$0 = M\vec{V} + m\vec{v}$$

Considerando solo il problema in una dimensione:

$$0 = MV + mv$$

$$V = -\frac{m}{M}v$$

Appena dopo il lancio, l'energia cinetica sarà:

$$K = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}M\left(-\frac{m}{M}v\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{(mv)^2}{M}$$

Il pattinatore si fermerà dopo che questa energia verrà dissipata per attrito:

$$F_a d = K$$

$$\mu_d M g d = \frac{1}{2}\frac{(mv)^2}{M}$$

$$d = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{M}\right)^2 v^2 \frac{1}{\mu_d g} = 30 \text{ dm}$$

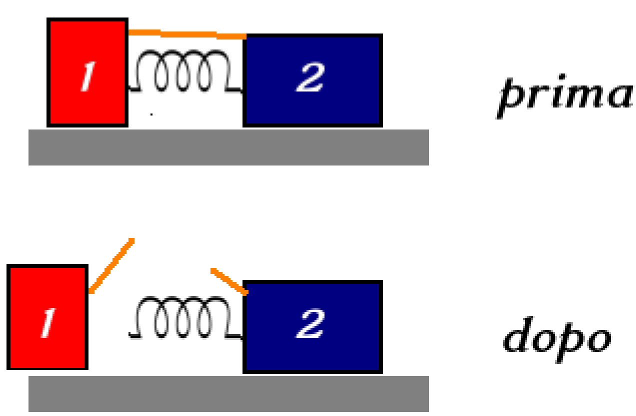


Figura V.4

Soluzione dell'esercizio 99

a) Tutte le forze in gioco sono interne al sistema, poiché la forza di gravità e la reazione vincolari sono normali alle velocità che si creeranno dopo la rottura della corda. La quantità di moto si conserva:

$$Q_i = Q_f$$

$$0 = mv_1 + 3mv_2$$

$$v_1 = -6.00\, m/s$$

b) L'energia meccanica si conserva nel processo, quindi l'energia potenziale della molla è andata in energia cinetica dei blocchi:

$$K = \frac{1}{2}mv^2{}_1 + \frac{3}{2}mv^2{}_2$$

$$k = \frac{2}{d^2} = 1.68 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

Urti

Soluzione dell'esercizio 100

Per trovare la velocità della massa 1 al momento dell'urto applichiamo la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = m_1gh$$

$$v_1 = \sqrt{2gh} = v_{1i}$$

Data la rapidità dell'urto, possiamo considerare il sistema isolato durante lo stesso. La tensione della corda e la forza di gravità sono entrambe perpendicolari a $\vec{v_{1i}}$ nel momento dell'urto. Essendo l'urto elastico si conserva sia la quantità di moto che l'energia cinetica complessive del sistema delle due masse e quindi valgono le equazioni **??** e **??**. Da queste, considerando che la massa 2 è ferma prima dell'urto ($v_{2i} = 0$):

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{2gh} = -0.54 \text{ m/s}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gh} = 0.72 \text{ m/s}$$

Soluzione dell'esercizio 101

Durante l'urto, la forza di gravità e la tensione delle funi si bilanciano. L'impulso netto sul sistema blocco-proiettile è nullo. Il sistema è dunque isolato e la quantità di moto si conserva. Indicando con v_p il modulo della velocità del proiettile e con V la velocità del sistema legno + proiettile dopo l'urto completamente anelastico:

$$mv_p = (M + m)V$$

$$V = \frac{mv_p}{M + m}$$

Dall'istante successivo della formazione del corpo legno+proiettile, l'energia meccanica si conserva e il corpo si comporta come un pendolo. Si assume 0 l'energia potenziale gravitazionale del pendolo a riposo. Conservazione energia meccanica:

$$\frac{1}{2}(M + m)^2 = (M + m)gh$$

Sostituendo V:

$$\frac{1}{2}\frac{m^2 {v_p}^2}{(M + m)^2}$$

$$v_p = \frac{M + m}{m}\sqrt{2gh} = 630 \text{ m/s}$$

Soluzione dell'esercizio 102

$$Q_i = m_2 v_2$$

$$Q_f = (m_1 + m_2)v_f$$

$$Q_f = Q_i$$

$$v_f = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 6.67 \text{ m/s}$$

Soluzione dell'esercizio 103

Possiamo considerare il sistema isolato nell'istante dell'urto. La quantità di moto e la velocità del centro di massa si conservano:

$$\begin{cases} x: \quad m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v_{cm}\cos\theta \\ y: \quad m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v_{cm}\sin\theta \end{cases}$$

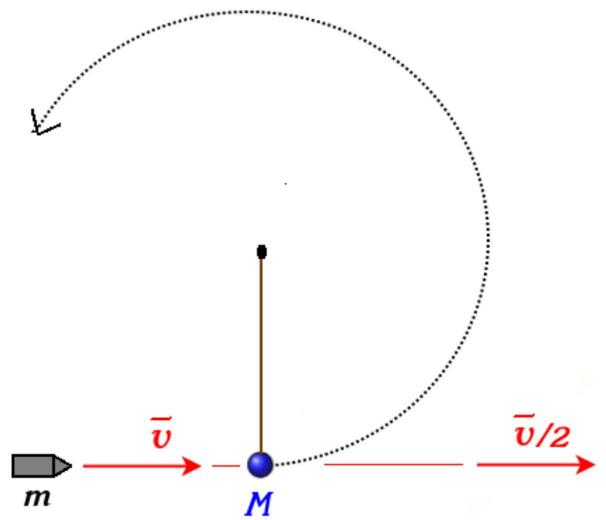


Figura V.5

Si divide membro a membro, ottenendo:

$$\frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} = \cot\theta$$

da cui:

$$v_1 = v_2 \frac{m_2}{m_1} \cot\theta = 166 \text{ km/h}$$

L'energia cinetica trasformata in altra forma:

$$\Delta k = \left(\frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v_2}^2\right) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2){v_{cm}}^2 = 717 \text{ kJ}$$

Soluzione dell'esercizio 104

Perché riesca a fare almeno un giro, dopo l'urto la massa M deve avere velocità tale da raggiungere la quota più alta. Con una velocità leggermente maggiore di questa, la massa riuscirà quindi a descrivere un cerchio ricadendo verso il basso. Dopo l'urto l'energia meccanica si conserva e questo ci serve per trovare la velocità minima v_M. Poniamo la quota iniziale della massa M ad energia potenziale 0. La quota più alta sarà più alta di $2l$

$$\underbrace{\frac{1}{2} M {v_M}^2}_{K_i} + \underbrace{0}_{U_i} = \underbrace{0}_{K_f} + \underbrace{Mg(2l)}_{U_f}$$

$$v_M = 2\sqrt{gl}$$

Durante l'urto si conserva la quantità di moto del sistema:

$$\underbrace{mv}_{q_{im}} + \underbrace{0}_{q_{iM}} = \underbrace{m\frac{v}{2}}_{q_{fm}} + \underbrace{M2\sqrt{gl}}_{q_{fM}}$$

$$v = \frac{4M}{m}\sqrt{gl}$$

Soluzione dell'esercizio 105

a)

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_2} v_{1i}$$

da cui:

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{1f} = m_1 v_{1i} - m_2 v_{1i}$$

$$m_2 = \frac{v_{i1} - v_{1f}}{v_{1i} + v_{1f}} m_1 = 9.9 \cdot 10^{-2}\ \text{kg}$$

b)

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = 1.9\ \text{m/s}$$

c) Lo stesso risultato si trova usando o le velocità iniziali o le velocità finali:

$$(m_1 + m_2) v_{cm} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$$

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = 0.93\ \text{m/s}$$

Capitolo VI

Gravitazione

Soluzione dell'esercizio 106

Esprimiamo T in s:

$$(76 \text{ yr}) \cdot (365 \text{ d/yr}) \cdot (24\text{h/d}) \cdot (3600 s/h) = 2.5 \cdot 10^9 \text{ s}$$

Dalla figura **??** si trova che:

$$R_a + R_p = 2a$$

Dalla legge dei periodi **??**:

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k'_s}} = 2.8 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

$$R_a = 2a - R_p = 5.4 \cdot 10^1 2 \text{ m} = 29 \text{ au}$$

Per l'eccentricità, dalla figura **??**:

$$ea = a - R_p$$

$$e = 1 - \frac{R_p}{a} = 0.97$$

Soluzione dell'esercizio 107

Il punto P di accensione del razzo sarà il punto in comune tra la vecchia orbita circolare e la nuova orbita ellittica. In questo punto abbiamo una energia potenziale data da:

$$U = -\frac{GM_T m}{r} = -2.49 \cdot 10^{11} \text{ J}$$

Troviamo la velocità v dopo l'accensione del raggio, indicando con v_0 la velocità nell'orbita circolare.

$$v = v_0(1 - 0.05) = 0.95 v_0$$

Essendo inizialmente in un'orbita circolare, abbiamo:

$$v = 0.95 v_0 = 0.95 \frac{2\pi r}{T_0}$$

La nuova energia cinetica nel punto P dopo l'accensione del razzo di frenata è:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (0.95)^2 \left(\frac{2\pi r}{T_0} \right)^2 = 1.12 \cdot 10^1 1 \text{ J}$$

La nuova energia della navicella sarà:

$$E = K + U$$

Dalla formula **??** dell'energia di legame si trova il semiasse maggiore a della nuova orbita:

$$a = -\frac{G M_T m}{2E} = -\frac{G M_T m}{2(K+U)} = 7.30 \cdot 10^6 \text{m}$$

Infine, dalla legge dei periodi **??**, si trova il periodo:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G M_T} a^3} = 6.20 \cdot 10^3 \text{ s}$$

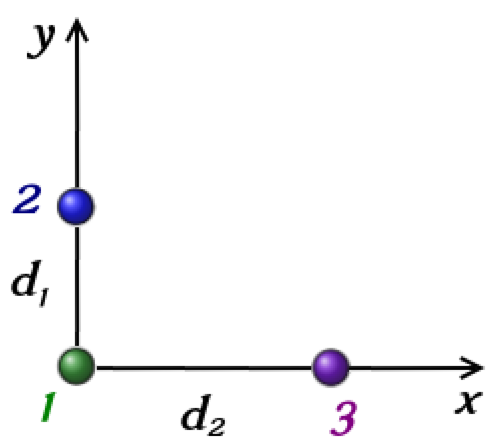


Figura VI.1

Soluzione dell'esercizio 108

Troviamo i moduli:

$$F_{12} = \frac{G m^2}{{d_1}^2} = 1.85 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

$$F_{13} = \frac{G m^2}{{d_2}^2} = 1.04 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

$$\vec{F} = F_{13} \hat{\imath} + F_{12} \hat{\jmath}$$

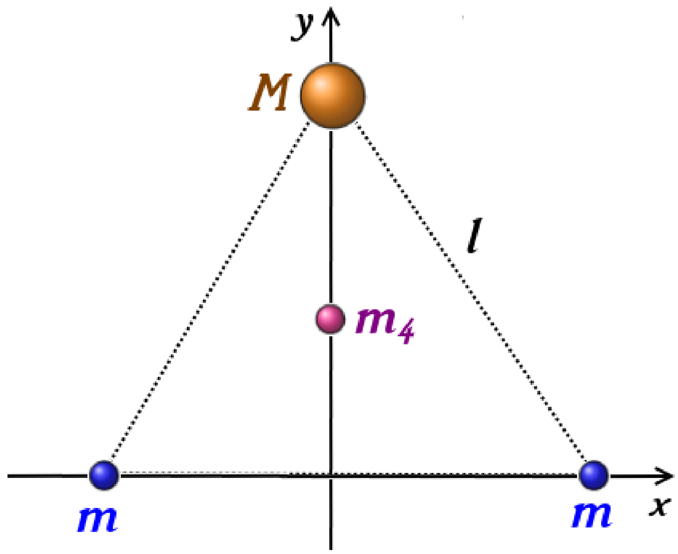


Figura VI.2

Soluzione dell'esercizio 109

Lungo l'asse y, le due masse m esercitano una forza che si somma (lungo l'asse x si cancellano a vicenda):

$$-2F_{mx} = 2\left(\frac{Gm_4 m}{l/\sqrt{(3)}}\right)\sin 30^\circ = 3\frac{Gm_4 m}{l^2}$$

Quella della massa M:

$$F_{My} = \frac{GMm_4}{l/\sqrt{3}}$$

La forza totale:

$$F = F_{My} - 2F_{mx} = 3\frac{Gm_4}{l^2}(M - m)$$

Soluzione dell'esercizio 110

$$g(h) = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$$

$$h = \sqrt{\frac{GM_T}{g(h)}} - R_T = 2.56 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Soluzione dell'esercizio 111

Per avere a_g di ogni corpo in termini di $g = 9.80$ m/s^2 terrestre:

$$a_g = \frac{Gm}{r^2}\frac{1}{g}$$

dove m e r sono rispettivamente la massa e il raggio dell'astro. Dall'Appendice **??** si ricavano la massa e il raggio dei corpi a partire da quelli della Terra, per Mercurio e Marte, e del Sole, per le due stelle degeneri. Bisogna ricordarsi di esprimere tutte le grandezze in SI, quindi le masse in kg e i raggi in m. Otteniamo [1]:
Marte: 0.379 g
Mercurio: 0.378 g
Sirio B: $3.9{\cdot}10^5$ g
PSR B1257+12: $1.8{\cdot}10^{11}$ g

Soluzione dell'esercizio 112

L'energia di legame per la superterra alla pulsar è:

$$E_p = -\frac{G 1.4 M_\odot 4.3 M_T}{2 \cdot 0.36 a}$$

dove $M_\odot$, M_T e a sono rispettivamente la massa del Sole, la massa della Terra e il semiasse dell'orbita della Terra attorno al Sole (1.0 au). Sostituendo i valori (con le unità di misura in SI):

$$E_p = -4.4 \cdot 10^{34} \text{ J}$$

Il rapporto con quella della Terra E_T:

$$\frac{E_p}{E_T} = \frac{1.4 * 4.3}{0.36} = 17$$

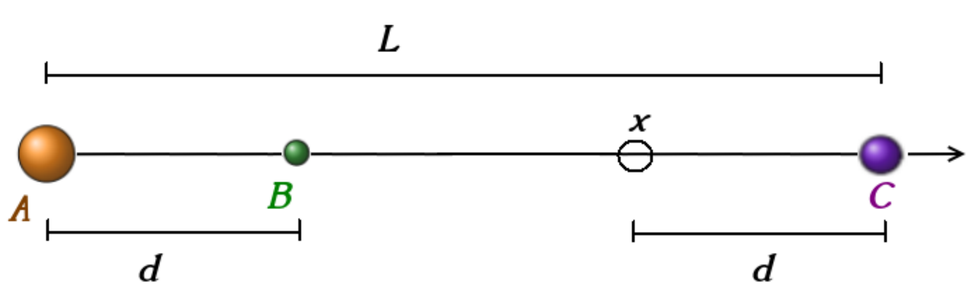


Figura VI.3

[1]Naturalmente, a scanso di equivoci, in questo caso g è il modulo del campo gravitazionale sulla superficie terrestre e non 'grammi'"!

Soluzione dell'esercizio 113

Essendo la variazione di energia cinetica nulla, il lavoro sarà uguale alla variazione di energia potenziale:

$$U_i = -G\frac{m_A m_B}{d} - G\frac{m_A m_C}{L} - G\frac{m_B m_C}{L-d}$$

$$U_f = -G\frac{m_A m_B}{L-d} - G\frac{m_A m_C}{L} - G\frac{m_B m_C}{d}$$

$$L = -\Delta U = -(U_f - U_i) = -G m_B\left(-\frac{m_A}{L-d} - \frac{m_c}{d} + \frac{m_A}{d} + \frac{m_C}{L-d}\right)$$

$$L = -G m_B\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{L-d}\right)(m_A - m_C) = 1.6 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J}$$

Soluzione dell'esercizio 114

Il periodo T dell'orbita è uguale ad 1 d=86400 s. La velocità v su tale orbita sarà:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Uguagliamo la forza centripeta alla forza gravitazionale:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM_T}{r^2}$$

$$v^2 = G\frac{M_T}{r}$$

Sostituendo la prima equazione:

$$\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = G\frac{M_T}{r}$$

Da cui si ricava r:

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}$$

L'energia di legame E:

$$E = -G\frac{M_T m}{2r} = -4.7 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$$

Soluzione dell'esercizio 115

Dalla legge dei periodi troviamo la massa del pianeta:

$$M = \frac{4\pi^2}{GT^2}r^3$$

L'accelerazione di gravità sulla superficie del pianeta:

$$a_g = \frac{GM}{R^2}$$

Sostituendo M:

$$R = \sqrt{\frac{4\pi^2}{a_g T^2}r^3} = 5.82 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Soluzione dell'esercizio 116

Convertiamo T in s:

$$T = 11.2 \text{ d} = 9.68 \cdot 10^5 \text{ s}$$

e troviamo la massa M_p della stella:

$$M_p = 0.12 M_\odot = 2.4 \cdot 10^{29} \text{ kg}$$

Troviamo il semiasse maggiore a dalla legge dei periodi:

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM_pT^2}{4\pi^2}}$$

Dalla figura **??** si riava:

$$R_p = a(1-e)$$

$$R_p = (1-e)\sqrt[3]{\frac{GM_pT^2}{4\pi^2}} = 4.7 \cdot 10^9 \text{ m} = 0.031 \text{ au}$$

Soluzione dell'esercizio 117

a) La particella sfugge se la sua velocità minima è tale da poter raggiungere una distanza infinità con velocità uguale a zero. Essendo l'energia potenziale all'infinito nulla, avremo, per la conservazione dell'energia, che E è:

$$E = K + U = 0$$

$$-\frac{GM\cancel{m}}{R} + \frac{1}{2}\cancel{m}{v_F}^2 = 0$$

Dato che conosciamo a_g e R, scriviamo:

$$a_g = \frac{GM}{R^2}$$

per sostituirla nell'equazione precedente:

$$-a_g R + \frac{1}{2} {v_F}^2 = 0$$

$$v_F = \sqrt{2 a_g R} = 1.2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

b) Inizialmente la particella è sulla superficie, con energia potenziale:

$$U_i = -\frac{GMm}{R}$$

e cinetica:

$$K_i = \frac{1}{2} m {v_i}^2$$

Ad una distanza h massima:

$$U_f = -\frac{GMm}{R+h}$$

$$K_f = 0$$

Per la conservazione dell'energia:

$$-\frac{GMm}{R} + K_i = \frac{1}{2} m {v_i}^2 = U_f = -\frac{GMm}{R+h}$$

Sostituendo l'espressione per a_g:

$$-a_g R + \frac{1}{2} {v_i}^2 = \frac{-R^2 a_g}{R+h}$$

$$h = \frac{2 a_g R^2}{2 a_g R - {v_i}^2} - R = 1.2 \cdot 10^4 \text{ m}$$

c) In h_2:

$$U_2 = -\frac{GMm}{R+h_2}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m {v_2}^2$$

Arrivato sulla superficie:

$$U_3 = -\frac{GMm}{R}$$

$$K_3 = \frac{1}{2}m{v_3}^2$$

L'energia si conserva:

$$-\frac{GMm}{R+h_2} + K_2 = \frac{1}{2}m{v_2}^2 = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}m{v_3}^2$$

$$-2GM\left(\frac{1}{R+h_2} - \frac{1}{R}\right) + {v_2}^2 = {v_3}^2$$

Sostituendo:

$$GM = a_g R^2$$

$$v_3 = \sqrt{-2a_g R^2\left(\frac{1}{R+h_2} - \frac{1}{R}\right) + {v_2}^2} = 870 \text{ m/s}$$

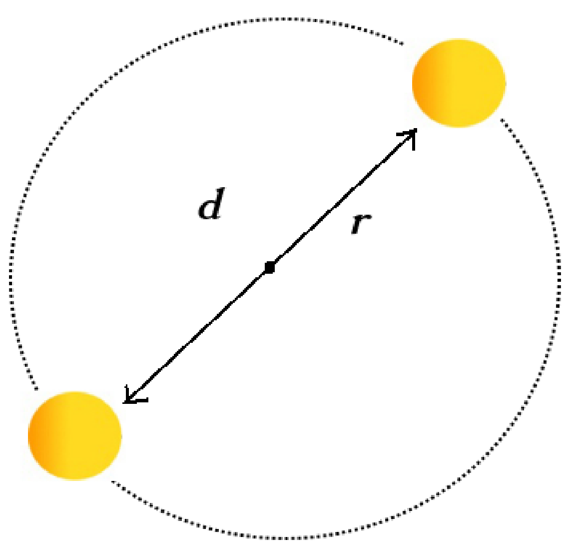


Figura VI.4

Soluzione dell'esercizio 118

Essendo le stelle uguali, il centro della traiettoria si troverà ad una distanza $r = d/2$=1 au. La loro massa m è $0.80M_\odot$:

$$m = 0.80 * 2.0 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 1.6 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$d = 2 \text{ au} = 2 \text{ au} \cdot 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m/au} = 3.0 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

La velocità nell'orbita:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{\pi d}{T}$$

L'espressione della forza centripeta che risente ciascuna stella:

$$\frac{Gmm}{d^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Sostituendo v e r:

$$\frac{Gm}{d^2} = \left(\frac{\pi d}{T}\right)^2 \frac{1}{d/2}$$

$$T = \sqrt{\frac{2\pi^2 d^3}{Gm}} = 7.1 \cdot 10^7 \text{ s} = 2.2 \text{ yr}$$

Soluzione dell'esercizio 119

Indicando con r la distanza Terra-Sole, che in media è 1 au=$1.50 \cdot 10^{11}$:

$$v_{fT} = \sqrt{\frac{2M_\odot G}{r}} = 4.22 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Indicando una nuova distanza con λr, dove λ è un parametro adimensionale di scala:

$$v_f(\lambda) = \sqrt{\frac{2M_\odot G}{\lambda r}} = \frac{v_{fT}}{\sqrt{\lambda}}$$

Convertiamo la velocità v_V del Voyager alla distanza Sole-Giove in m/s:

$$v_V = 3.47 \text{ m/s}$$

Troviamo a quale λ la V_v diventa sufficiente per liberasi dall'influenza del Sole:

$$v_V = v_f(\lambda)$$

$$v_V = \frac{v_{fT}}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\lambda = \left(\frac{v_{fT}}{v_V}\right)^2 = 1.47$$

Quindi ad una distanza 1.47 volte la distanza Terra-Sole, v_V è sufficiente. Il Voyager aveva questa velocità presso l'orbita di Giove, quindi a più di 5.20 volte la distanza Terra-Sole.

Soluzione dell'esercizio 120

L'energia potenziale è:

$$U(r) = -\frac{GM_T m}{r}$$

Per avere l'energia totale bisogna trovare la velocità. Ricordiamo che in questo caso la forza centripeta è uguale alla forza gravitazionale:

$$F_c = F_g$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_T m}{r^2}$$

moltiplico per r entrambi i membri dell'equazione, ottenendo:

$$mv^2 = \frac{GM_T m}{r}$$

Fa comodo avere scritto questa espressione perché potremo direttamente sostituire mv^2 nell'espressione dell'energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2$:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GM_T m}{2r}$$

L'energia totale sarà:

$$E = K + U$$

$$E = \frac{GM_T m}{2r} - \frac{GM_T m}{r} = -\frac{GM_T m}{2r} = -2.1 \cdot 10^1 0 \text{ J} = -21 \text{ GJ}$$

b) Riprendendo l'espressione di prima per mv^2, la velocità del satellite nella sua orbita è:

$$\cancel{m}v^2 = \frac{GM_T \cancel{m}}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

La velocità di fuga partendo dall'orbita r si trova imponendo che l'energia totale all'infinito sia 0:

$$E = K + U = 0$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv_F(r)^2 - G\frac{Gm_T m}{r}$$

dalla quale si trova:

$$v_F(r) = \sqrt{2\frac{GM_T}{r}}$$

Facendo il rapporto tra le due velocità si trova il fattore k richiesto:

$$k = \frac{v_f(r)}{v} = \sqrt{2} \approx 1.41$$

Quindi, da un'orbita r il satellite per uscire dall'influenza dell'attrazione gravitazionale terrestre deve aumentare la sua velocità del 141%.

Capitolo VII

Statica e Dinamica dei Corpi Rigidi

Soluzione dell'esercizio 121

Un elemento infinitesimo di lunghezza dx della sbarretta individuato dalla coordinata x ha massa (definizione **??**):

$$dm = \lambda x = \lambda_0 \left(1 + \frac{\alpha x}{l}\right) dx$$

Quindi la massa totale della sbarretta è:

$$M = \int_0^l dm = \int_0^l \lambda_0 \left(1 + \frac{\alpha x}{l}\right) dx = \lambda_0 l \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$$

La coordinata del *cm*:

$$x_{cm} = \frac{\int_0^l x dm}{M} = \frac{1}{M} \int_0^l \lambda_0 \left(1 + \frac{\alpha x}{l}\right) x dx = \frac{l\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{3}\right)}{1 + \frac{\alpha}{2}}$$

Si nota che per $\alpha = 0$, abbiamo densità lineare costante $\lambda = \lambda_0$ e il centro di massa va a cadere al centro della sbarretta.

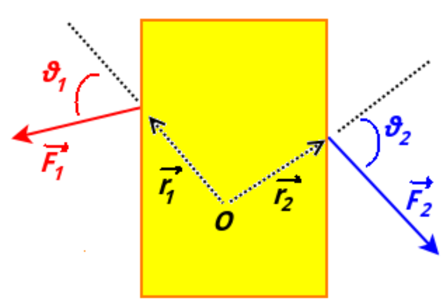


Figura VII.1

Soluzione dell'esercizio 122

τ_1 è diretto uscente dal foglio (asse z), mentre $\vec{\tau}_2$ entrante.

$$\vec{\tau} = F_1 r_1 \sin\theta_1 \hat{k} - F_2 r_2 \sin\theta_2 \hat{k} = -3.85 \hat{k} \text{ Nm}$$

Soluzione dell'esercizio 123

a)
Chiamiamo il punto in cui il tronco appoggia sul sostegno O. Su O risultano applicate la forza peso del tronco (verso il basso) e la reazione vincolare (verso l'alto). I pesi dei bambini sono verso il basso e applicati alle relative distanze da O. Il modulo della reazione normale è uguale alla somma dei moduli delle forze peso. b)
Prendendo come polo O:

$$m_1 g x_1 = m_2 g x_2$$

da cui:

$$X_2 = \frac{m_1 x_1}{m_2} = 1.40 \text{ m}$$

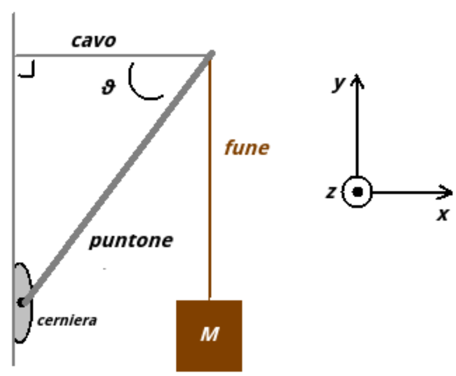


Figura VII.2

Soluzione dell'esercizio 124

Prendendo come polo la cerniera.

$$\vec{\tau}_c = T_c l \sin\theta \hat{k}$$
$$\vec{\tau}_f = -T_f l \sin(\pi/2 - \theta)\hat{k} = -T_f \cos\theta \hat{k}$$
$$\vec{\tau}_g = -mg\frac{l}{2}\sin(\pi/2 - \theta)\hat{k} = -mg\frac{l}{2}\sin\theta\hat{k}$$

Proiettando sull'asse z e imponendo l'equilibrio:

$$T_c l \sin\theta - T_f \cos\theta - mg\frac{l}{2}\sin\theta = 0$$

Dalla statica sulla massa M:

$$T_f = Mg$$

Sostituendo:

$$T_c = g(M + \frac{m}{2})\cot\theta = 1.87 \cdot 10^3 \text{ N}$$

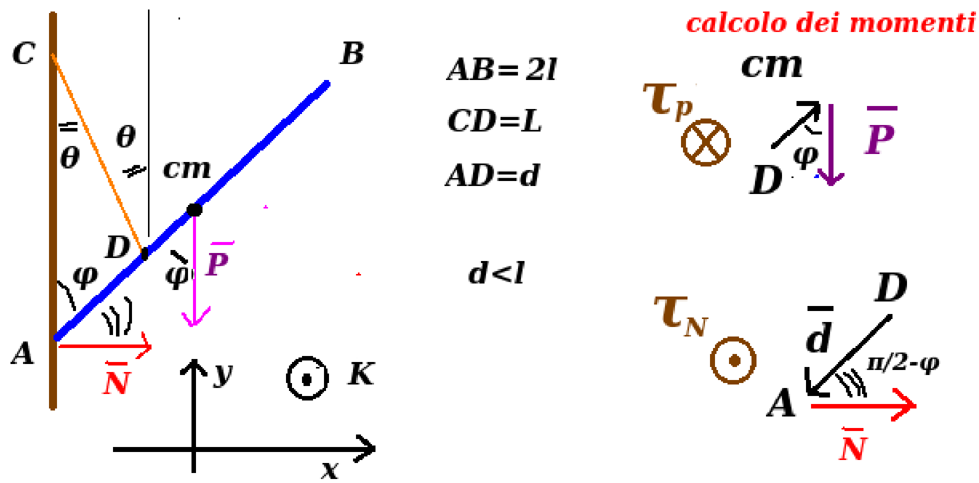


Figura VII.3

Soluzione dell'esercizio 125

Con riferimento alla figura VII.3. L'angolo ϕ individuerà le posizioni di equilibrio. Scegliamo D come centro di riduzione per il calcolo dei momenti:

$$\vec{\tau_P} = P(l-d)\sin\phi(-\hat{k})$$
$$\vec{\tau_N} = Nd\sin\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)\phi(\hat{k}) = Nd\cos\phi(\hat{k})$$

Proiettando sull'asse $\hat{k}$ si ottiene per l'equilibrio:

$$P(l-d)\sin\phi = Nd\cos\phi$$

Le forze si devono equilibrare:

$$N - T\sin\theta = 0$$
$$T\cos\theta - P = 0$$

La relazione tra ϕ e θ si trova dal teorema dei semi sul triangolo ACD:

$$\sin\theta = \frac{d}{L}\sin\phi$$
$$\cos\theta = \sqrt{1-\frac{d^2}{L^2}\sin^2\phi}$$

$$T = \frac{P}{\sqrt{1-\frac{d^2}{L^2}\sin^2\phi}}$$
$$N = \frac{d\sin\phi}{L}T = \frac{dP\sin\phi}{\sqrt{L^2-d^2\sin^2\phi}}$$

Dall'equazione dei momenti e dall'espressione per N ed elevando al quadrato:

$$(l-d)^2 \sin^2\phi(L^2 - d^2\sin^2\phi) = d^4\sin^2\phi\cos^2\phi$$

Prima di semplificare $sin^2\phi$ dobbiamo porre $\sin\phi \neq 0$ e vedere se esso è soluzione. Si tratta infatti di una soluzione banale del problema nel quale l'asta è sdraiata sul muro ($\phi = 0°$ e $\phi = 180°$). A questo punto, per $\sin\phi \neq 0$:

$$(l-d)^2 \cancel{\sin^2\phi}(L^2 - d^2\sin^2\phi) = d^4\cancel{\sin^2\phi}\cos^2\phi$$

$$\sin\phi = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{d^4 - (l-d)^2L^2}{l(2d-l)}}$$

Sostituendo si trova anche T:

$$T = \frac{P}{\sqrt{1 - \frac{d^4 - L^2(l-d)^2}{L^2 l(2d-l)}}}$$

$$\phi = 66°,30 \qquad (66°18')$$

$$T = 958 \text{ N}$$

Soluzione dell'esercizio 126

$$T_i = 30.0 \text{ d} = 2.59 \cdot 10^7 \text{ s}$$

Essendo forze centrali si conserva il momento angolare:

$$\omega_f = \left(\frac{r_i}{r_e}\right)^2 \omega_i = \left(\frac{r_i}{r_e}\right)^2 \frac{2\pi}{T_i} = 5.28 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

$$T_f = \frac{2\pi}{\omega_f} = 1.19 \text{ ms}$$

Indicando con $t = 1.00$ s:

$$n_p = t/T_f = \frac{t\omega_f}{2\pi} = 840$$

Soluzione dell'esercizio 127

Applichiamo due forza di uguale modulo che giacciono sul piano del volano, con punto di applicazione diametralmente opposto, stessa direzione e verso opposto. I due moduli sono tali che la loro somma è F. Sia $\vec{r_1}$ e $\vec{r_2}$ le distanze dal centro, con $r_1 = r_2$.

$$\vec{\tau} = \vec{r_1} \wedge \vec{F_1} + \vec{r_2} \wedge \vec{F_2}$$

Dati i versi dei vettori in gioco e i loro moduli:

$$\vec{\tau} = rF\hat{z}$$

dove $\hat{z}$ è il versore parallelo all'asse perpendicolare al volano e di verso opportuno. I versi delle forze saranno scelti in modo tale che $\hat{z}$=-$\hat{\omega}$, in modo da frenare il volano. Proiettando su $\hat{\omega}$:

$$-\tau = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

In analogia con il moto uniformemente accelerato, si usa la formula:

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$$

e si pone ω_f, $\omega_0 = \omega'$ a 0 e $\alpha = -\frac{\tau}{I}$. Si ricava quindi:

$$\tau = \frac{\omega' I}{t'} = 100 \text{ Nm}$$

Soluzione dell'esercizio 128

Il sistema piattaforma+uomo:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + mx^2$$

dove x è la distanza dell'uomo dal centro. Durante lo spostamento dell'uomo ci sono solo forze interne al sistema e il momento angolare si conserva:

$$\omega_i \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right) = \omega_f \left(\frac{1}{2}MR^2\right)$$

$$\omega_f = \frac{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)}{\frac{1}{2}MR^2}\omega_i = \frac{M + 2m}{M} = 2.30 \text{ rad/s}$$

Soluzione dell'esercizio 129

Proiettando lungo l'asse di rotazione:

$$\tau = rF$$

dove r è il raggio del disco. La dinamica viene determinata dalla seconda cardinale della dinamica:

$$\tau = \frac{d\ell}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt}$$

$$rF = I\frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{rF}{I}$$

$$\int_0^{\omega(t')} \frac{d\omega}{dt} = \int_0^{t'} \frac{rF}{I}$$

$$\omega(t') = \frac{rF}{I}t'$$

$$K(t') = \frac{1}{2}I\omega^2(t') = \frac{1}{2}I\left(\frac{rF}{I}\right)^2 (t')^2$$

Sostituendo $I = \frac{1}{2}mr^2$:

$$K(t') = \frac{(F^2t')^2}{m} = 2.0 \text{ kJ}$$

Soluzione dell'esercizio 130

Fissiamo un asse x e un asse k nelle direzioni e verso indicate in figura. Chiamiamo con $\vec{a}_1$ l'accelerazione del blocco piccolo e con $\vec{a}_2$ il quello grande. Il modulo dell'accelerazione si ricava dal moto uniformemente accelerato.

$$a = \frac{2h}{t^2} = 6.00 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

Secondo il verso scelto di x e proiettando le accelerazioni lungo questo asse:

$$a_1 = -a$$
$$a_2 = a$$

Per la legge di Newton e seguendo il verso dell'asse x:

$$\begin{cases} Mg - T_2 = Ma_2 \\ mg - T_1 = ma_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_2 = M(g - a_2) = M(g - a) = 4.87 \text{ N} \\ T_1 = m(g - a_1) = m(g + a) = 4.54 \text{ N} \end{cases}$$

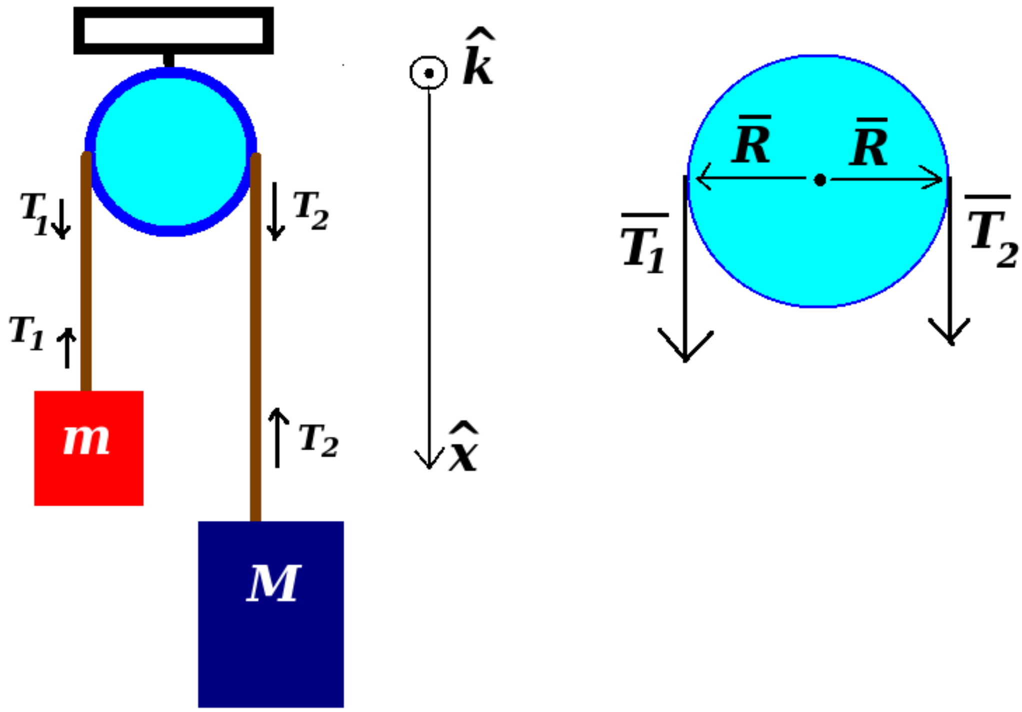


Figura VII.4

Per il modulo dell'accelerazione angolare:

$$R\theta = h$$
$$R\omega = v$$
$$R\alpha = a$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = 1.20 \text{ rad/s}$$

Per la direzione e verso di $\vec{\alpha}$ vediamo i momenti torcenti. Prendiamo il verso di $\hat{k}$ del disegno come positivo (uscente dal piano del disegno):

$$RT_1\hat{k} - RT_2\hat{k} = I\vec{\alpha}$$

Essendo $T_2 > T_1$:

$$\vec{\alpha} = -\alpha\hat{k}$$

Infine si può trovare I[1]:

$$I = \frac{T_1 - T_2}{-\alpha}R = 1.38 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$$

[1]Non è detto che la puleggia possa essere schematizzata come un disco ed avere il relativo I dato dalla tabella dei momenti di inerzia. Potrebbe ad esempio essere un disco con dei fori.

Soluzione dell'esercizio 131

Questo è un urto completamente anelastico che analizziamo usando la conservazione del momento angolare. Il momento angolare iniziale è:

$$\ell_0 = R m_p v_0 \sin(90^\circ - 37^\circ) = R m_p v_0 \sin(53^\circ)$$

Il verso di $\vec{p}_0$ è entrante al piano della giostra. Schematizzando la giostra come un disco, quello finale è:

$$\ell_f = \frac{1}{2} M R^2 \omega + (m_b + m_p) R^2 \omega$$

Il momento angolare si conserva:

$$R m_p v_0 \sin(53^\circ) = \frac{1}{2} M R^2 \omega + (m_b + m_p) R^2 \omega$$

$$\omega = \frac{m_p v_0 \sin(53^\circ)}{R(\frac{1}{2} M + m_b + m_p)} = 5.9 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s}$$

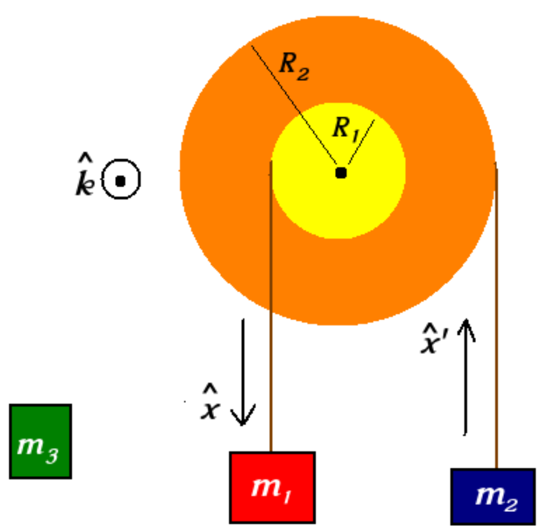


Figura VII.5

Soluzione dell'esercizio 132

Per avere le masse ferme:

$$m_1 g = T_1 \qquad m_2 g = T_2$$

dove T_1 e T_2 sono le tensioni dei fili e scegliendo assi lungo ogni filo. Perché il cm delle pulegge sia in equilibrio, la reazione vincolare N sul centro deve:

$$N = T_1 + T_2$$

Scegliendo come centro di riduzione il centro delle pulegge, il momento totale dovuto alle corde deve essere nullo:

$$\tau = \vec{R_1} \wedge \vec{T_1} + \vec{R_2} \wedge \vec{T_2} = \vec{0}$$

Proiettando la relazione sull'asse passante per il centro, perpendicolare e uscente dal disegno:

$$R_1 T_1 - R_2 T_2 = R_1 m_1 g - R_2 m_2 g$$

$$m_2 = m_1 \frac{R_1}{R_2} = 8.0 \text{ kg}$$

Se attacchiamo m_3, le masse iniziano a muoversi.
Le forze risultanti su $(m_1 + m_3)$ (proiettate sui relativi assi disegnati in figura):

$$x : \qquad (m_1 + m_3)g - T_1 = (m_1 + m_3)a_1$$

Su m_2:

$$x' : \qquad -m_2 g + T_2 = m_2 a_2$$

I momenti sulle pulegge (sull'asse in direzione uscente):

$$k : \qquad R_1 T_1 - R_2 T_2 = T\alpha$$

Se una puleggia ruota di un angolo θ, una massa sale o scende (essendo il filo inestensibile) di una quota d pari all'arco di circonferenza descritto da θ:

$$r\theta = d$$

derivando:

$$r\omega = v$$

$$r\alpha = a$$

Quindi:

$$a_1 = \alpha R_1 \qquad a_2 = \alpha R_2$$

Si trova dunque il sistema:

$$\begin{cases} (m_1 + m_3)g - T_1 = (m_1 + m_3)R_1\alpha \\ -m_2 g + T_2 = m_2 R_2 \alpha \\ R_1 T_1 - R_2 T_2 = I\alpha \end{cases}$$

Si trovano T_1 e T_2 dalle prime due e si sostituiscono nella terza. Infine, si risolve per α:

$$\alpha = \frac{R_1 g(m_1 + m_3) - R_2 m_2 g}{I - R_1^2(m_1 + m_3) + R_2^2 m_2} = 0.82 \text{ rad/s}^2$$

E quindi le tensioni dei fili:

$$T_1 = (m_1 + m_3)(g - R_1\alpha) = 341 \text{ N}$$

$$T_2 = m_2(g - R_2\alpha) = 70.6 \text{ N}$$

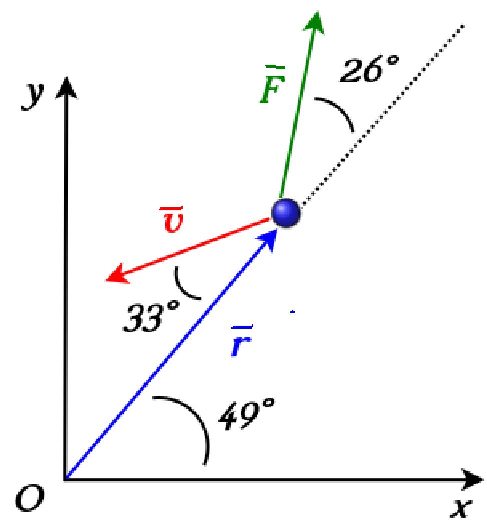


Figura VII.6

Soluzione dell'esercizio 133

$$\vec{\ell} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = rmv\sin(180^\circ - 33^\circ)\hat{z} = 14.1\hat{z}\ \mathrm{Kgm^2s^{-1}}$$

dove $\hat{z}$ è perpendicolare al foglio e verso uscente.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} = rF\sin(26^\circ)\hat{z} = 2.40\ \mathrm{Nm}$$

Soluzione dell'esercizio 134

Conservazione del momento angolare (essendoci solo forze interne) proiettato sull'asse perpendicolare alla giostra:

$$\underbrace{0}_{\ell_1} = \underbrace{(m_r R^2 + \frac{1}{2} m_g R^2)\omega_f + m_s R^2 \omega}_{\ell_f}$$

Si sostituisce:

$$\omega_s = \frac{v_s}{R}$$

Si trova il punto a):

$$\omega_f = \frac{m_s}{m_r + \frac{1}{2} m_g} \frac{v_s}{R} = -0.005\ \mathrm{rad/s}$$

La giostra ruota infatti nel verso opposto a ω_s. Per il punto b):

$$v_r = \omega_f R = -0.019\ \mathrm{m/s}$$

che ha verso opposto rispetto a quella del sasso.

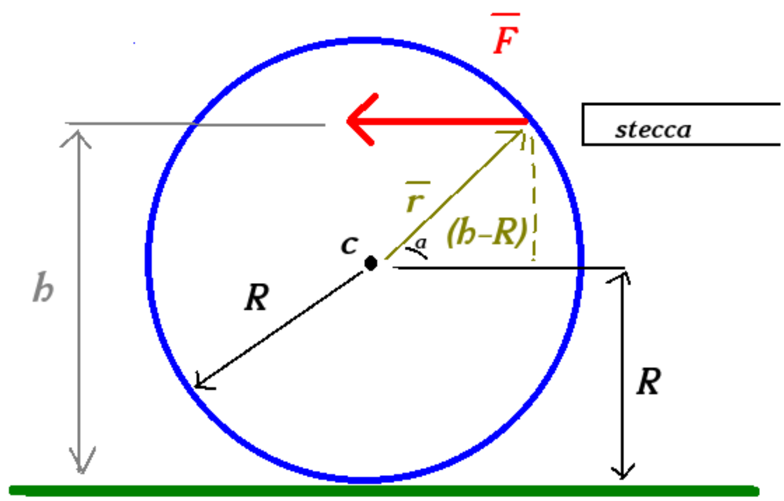


Figura VII.7

Soluzione dell'esercizio 135

Quando la stecca colpisce la palla, per un tempo molto breve sulla palla agisce un impulso $\vec{J}$ che si traduce in una variazione di quantità di moto del *cm* della palla di $mv_c\vec{m}$.
La forza $\vec{F}$ (parallela a $\vec{J}$) genera un momento (vedere la figura):

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

che è diretto perpendicolare uscente al disegno ($\hat{k}$). Il suo modulo è dato da:

$$\tau = rF \sin a = rF(h - R)$$

Analogamente per l'impulso, ricordando che l'impulso è uguale alla variazione della quantità di moto e che la palla è inizialmente ferma:

$$(h \vec{-} R) \wedge \vec{J} = (h - R)J\hat{k} = (h - R)\Delta q\hat{k} = (h - R)Mv\hat{k}$$

Quest'ultima è legata alla definizione di momento angolare (momento della quantità di moto), precisamente è la variazione del momento angolare. Proiettato su $\hat{k}$

$$(h - R)Mv = I_{cm}\omega$$

Dalla tabella in Appendice troviamo I_{cm} della sfera piena:

$$I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$$

$$(h - R)Mv = \frac{2}{5}MR^2\omega$$

Impongo ora la condizione di rotolamento puro sostituendo v e semplificando ottengo infine h in funzione di R:

$$h = \frac{7}{5}R$$

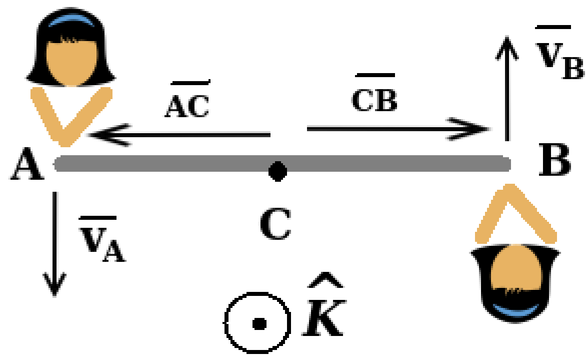


Figura VII.8

Soluzione dell'esercizio 136

a) Non essendoci momenti torcenti dovuti all'attrito, si conserva il momento angolare complessivo. Con riferimento alla figura VII.8 Il momento angolare iniziale (l'istante in cui la seconda pattinatrice afferra la seconda estremità):

$$\vec{\ell} = \vec{CA} \wedge m\vec{v}_A + \vec{CB} \wedge m\vec{v}_B$$

Proiettando sull'asse $\hat{k}$ perpendicolare uscente al disegno:

$$\ell = 2\frac{d}{2}mv = dmv$$

Abbiamo due masse m che ruotano attorno a C con $om\vec{e}ga = \omega\hat{k}$:

$$I = 2m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{md^2}{2}$$

$$\ell = \omega = m\frac{d^2}{2}\omega$$

$$\omega = \frac{2v}{d} = 0.945 \text{ rad/s}$$

b) Si conserva ancora p:

$$m\frac{d^2}{2}\omega = 2m\left(\frac{d_2^2}{2}\right)\omega_2$$

$$\omega_2 = \left(\frac{d}{d_2}\right)^2 \omega_i = 9.12 \text{ rad/s}$$

Capitolo VIII

Fluidi

Si devono calcolare le pressioni generate dal solo peso della bottiglia Pb e dal liquido contenuto nella bottiglia Pl e poi sommarle.Detta M la massa del liquido nella bottiglia, V volume del liquido e d densità del liquido si ottiene Formule senza numero

Soluzione dell'esercizio 137

$$Pb = m * g/(\pi(D/2)^2) = 293Pa$$
$$Pl = M * g/(\pi(D/2)^2) = Vdg/(\pi(D/2)^2) = 1464Pa$$
$$Ptot = Pb + Pl = 1757Pa$$

Si devono calcolare la pressione esterna della atmosfera *Pa* con quella del gas interno al pallone *Pi* tenendo conto che 1 atmosfera= 101325 Pascal Formule senza numero

Soluzione dell'esercizio 138

$$P = Pa + Pi$$
$$Pi = 101325 * 0.56Pa$$
$$Pa = 101325Pa$$

Inserendo i valori numerici si ha: P=(56742+101325) Pa=158067 Pa=1.58 $*10^5$ Pa

LA pressione generata della colonna d'acqua è equivalente a quella generata dalla pressione del mercurio.Le pressioni possono essere scritte nel seguente modo Formule senza numero

Soluzione dell'esercizio 139

$$P = m * g/S = dShg/S = dhg$$

uguagliando l'espressione scritta per l'acqua e per il mercurio e semplificando si ottiene la relazione

$$da \cdot ha = dHg \cdot hHg$$

inserendo i valori numerici si ottiene h HG= 4.2*1000/13579=0.31 m

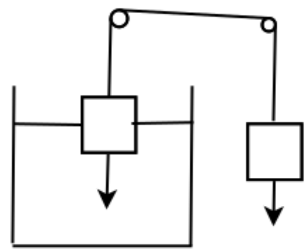


Figura VIII.1

Soluzione dell'esercizio 140

IL corpo B è in equilibrio sotto l'azione della sua forza peso e della tensione del filo;

$$t = mB \cdot g$$

Il corpo A è a sua volta all'equilibrio sotto l'azione della sua forza peso della spinta di Archimede e della tensione del filo per cui vale la relazione:

$$mA \cdot g = xVda \cdot g + t$$

dove V è il volume del corpo A, x è la frazione del corpo A immersa in acqua e da è la densità dell'acqua. Con alcuni passaggi algebrici si arriva alla formula:

$$x = (mA - Mb)/(V \cdot da) = (dA - dB)/da = 0.5$$

Soluzione dell'esercizio 141

a) Nel torchio idraulico si devono uguagliare le pressioni generati nei due vasi dall'altezza del liquido e dalla presenza delle masse aggiuntive in formule:

$$Pa = \rho g h_a + (M_a g)/S a$$
$$Pb = \rho g h_b + (M_b g)/S b$$
$$Pa = Pb$$
$$H = h_a - h_b$$

con passaggi algebrici si arriva all'espressione:

$$H = (M_b/S_b - M_a/S_a)/\rho$$

inserendo i valori numerici si ottiene H=0.2m.

b) Si deve aggiungere su A una massa m tale da rendere $H = h_a - h_b = 0$. Quindi, aggiungendo m ad M_a e imponendo che $\rho g h_a = \rho g h_b$:

$$M_b/S_b = (M_a + m)/S_a$$
$$m = (S_a M_b/S_b) - M_a$$

Inserendo i dati numerici si ha m=10kg

Soluzione dell'esercizio 142

L'esercizio si risolve utilizzando il principio di Archimede tenendo conto che sul corpo agiscono la forza peso Fp e la spinta di Archimede Fa. Confrontando la Fp con la Fa dovuta alla completa immersione del corpo di deduce il comportamento del corpo nel liquido:

$$Fp = mg = Vd0g = 2060N$$
$$Fa = Vdg = 1962N$$

essendo $Fp > Fa$ il corpo affonda. Il peso registrato da una bilancia a cui viene appeso il peso immerso in acqua sarà:

$$F = Fp - Fa = 98N$$

Soluzione dell'esercizio 143

Dall'equazione di continuità:

$$R_v = Av = costante$$

Da cui si ricava la velocità dopo una caduta h:

$$v = v_0 \frac{A_0}{A}$$

La velocità v dopo la caduta di h sarà anche data da:

$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$

quindi, sostituendo v e svolgendo i conti:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{A_0}{A}\right)^2 - 1}} = 28.6 \text{ cm/s}$$

Soluzione dell'esercizio 144

Dall'equazione di continuità:

$$v_0 = \frac{a}{A} v$$

Si usa quindi l'equazione di Bernoulli, considerando che sia sulla sezione libera del serbatoio che sul foro la pressione è quella atmosferica P_0:

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho gh = P_0 + \frac{1}{2}\rho\,()^2\, v_0^2$$

da cui:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}}$$

per $A \gg a$:

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

Soluzione dell'esercizio 145

a) Si applica Bernoulli:

$$\Delta p + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{P}{2A}\right)^2 = \rho g h + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{P}{A}\right)^2$$

$$\Delta p = \rho\left[gh + \frac{3}{8}\left(\frac{P}{A}\right)^2\right] = 2.65 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

b) Indicando con P' la nuova portata

$$2\Delta p = \rho\left[gh + \frac{3}{8}\left(\frac{P'}{A}\right)^2\right]$$

$$2\rho\left[gh + \frac{3}{8}\left(\frac{P}{A}\right)^2\right] = \rho\left[gh + \frac{3}{8}\left(\frac{P'}{A}\right)^2\right]$$

$$P' = \sqrt{2P^2 + \frac{8}{3}ghA^2} = 2.58 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 155 \text{ dm}^3/\text{min}$$

Inizialmente troviamo la velocità iniziale del liquido $v = U/S = 0.1/0.04 = 2,5m/s$
Per risolvere il problema si deve applicare l'equazione di Bernoulli e la legge di continuità:

Soluzione dell'esercizio 146

$$v \cdot s = vf \cdot sf$$
$$p + d * (v^2)/2 = pf + d * (vf^2)/2$$

da queste si ottiene:

$$sf = v \cdot s/vf = 2 \cdot s = 800cm2$$
$$pf = p + d(v^2)/2 - d(0.5v^2)/2 = p + d(0.75v^2)/2 = 43750Pa$$

Soluzione dell'esercizio 147

$$DP = P1 - P2 = 8pi\eta(vL/A)$$
$$DP = 18.8Pa \quad acqua$$
$$DP = 94.2KPa \quad glicerina$$

Capitolo IX

Termodinamica

Soluzione dell'esercizio 148

a) Per arrivare alla temperatura di fusione:

$$Q_1 = mc_g(T_0 - T_1) > 0$$

dove T_0=273.15°K. Per passare allo stato liquido:

$$Q_2 = mL_f > 0$$

Il calore che può essere al massimo rilasciato dall'acqua:

$$Q_3 = m_2c_a(T_0 - T_2) < 0$$

In un sistema adiabatico:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

La massa m si trova imponendo:

$$-Q_3 \geq Q_1 + Q_2$$

$$m \leq \frac{m_2c_a(T_2 - T_0)}{c_g(T_0 - T_1 + L_f} = 0.037 \text{ kg}$$

b) La relazione è:

$$\underbrace{Q_1}_{>0} + \underbrace{Q_2}_{>0} + \underbrace{mc_a(T_e - T_0)}_{>0} \underbrace{+m_2c_a(T_e - T_2)}_{<0} = 0$$

Risolvendo per T_e, si ottiene 310°K.

Soluzione dell'esercizio 149

Il gas ha descritto un processo ciclico e U riassume il valore di partenza, quindi il lavoro fatto dal gas:

$$L = Q = -m\mathcal{L}_f$$

Il lavoro fatto sul gas durante la compressione viene convertito in calore per lo scioglimento del ghiaccio. Quindi il lavoro fatto sul gas è uguale a Q:

$$L = m\mathcal{L}_f = 40.6 \text{ kJ}$$

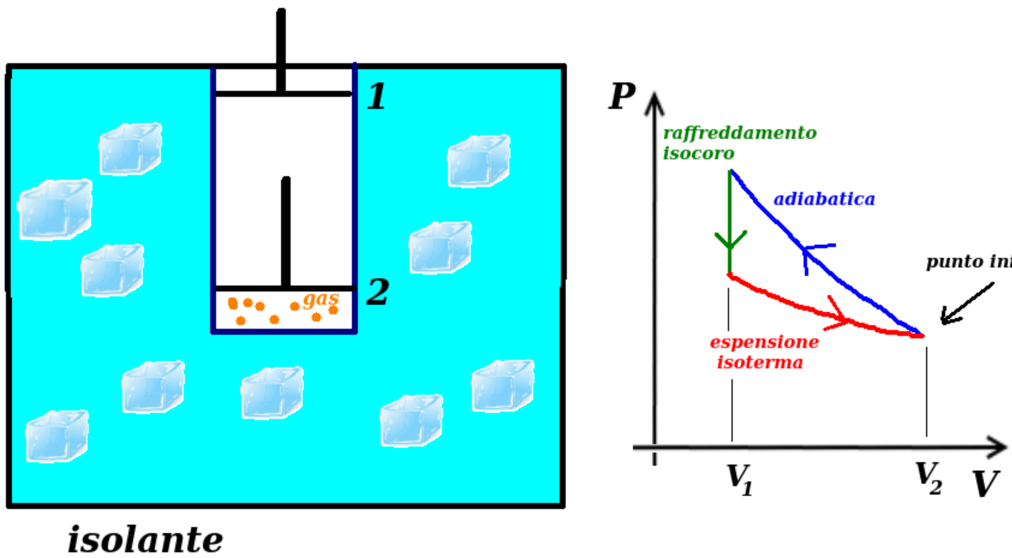


Figura IX.1

Soluzione dell'esercizio 150

a) Per il gas biatomico $c_p = 7/2$

$$Q = nc_p(\Delta T) = 4.34 \text{ mol}\frac{7}{2}8.314 \text{ Jmol}^{-1}\ {}^\circ\text{K}^{-1}\ 62.4^\circ\text{K} = 7.88 \text{ kJ}$$

b) Dal primo principio della termodinamica e l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$\Delta U = Q - L = nc_p\Delta T - P\Delta V = nc_p\Delta T - nR\Delta T\Delta T = n(c_p - R)\Delta T = nc_v\Delta T = 5.63 \text{ kJ}$$

c) Si parte dall'equazione di stato dei gas perfetti:

$$PV = nRT$$

$$PV = \frac{N}{N_A}RT$$

$$PV = Nk_BT$$

$$P = n_Vk_BT$$

dove k_B è la *costante di Boltzman*=$1.38 \cdot 10^{-23}$ J/°K.

Soluzione dell'esercizio 151

a) Nell'isocora $A \rightarrow B$:

$$L_{AB} = 0$$
$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = nc_v(T_B - T_A) = 3.74 \text{ kJ}$$

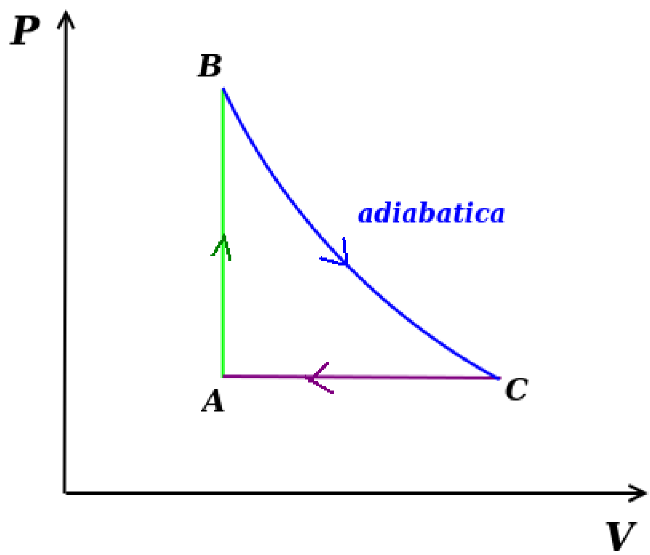


Figura IX.2

Nell'adiabatica $B \rightarrow C$:

$$Q_{BC} = 0$$
$$L_{BC} = -\Delta U_{BC} = 1.81 \text{ kJ}$$

Nell'isobara $C \rightarrow A$:

$$Q_{CA} = nc_p(T_A - T_C) = -3.22 \text{ kJ}$$
$$L_{CA} = P_C(V_A - V_C) = nR(T_A - T_C) = -1.29 \text{ kJ}$$
$$\Delta U_{CA} = Q_{CA} - L_{CA} = 1.93 \text{ kJ}$$

b) Ricordiamo che 1.00 atm = $1.01 \cdot 10^5$ Pa. Quindi dovremo usare i Pa se devono essere fatte operazioni con altre grandezze espresse in SI.
In A (esprimendo P_A in Pa nella prima equazione):

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = 0.0246 \text{ m}^3$$
$$P_A = 1 \text{ atm}$$
$$T_A = 300°K$$

$$V_B = V_A = 0.0246 \text{ m}^3$$
$$P_B = \frac{nRT_B}{V_A} = \frac{nRT_B}{nRT_A}P_A = \frac{T_B}{T_A}P_A = \frac{600 \text{ K}}{300 \text{ K}} 1.00 \text{ atm} = 2.00 \text{ atm}$$
$$T_B = 600 \text{ K}$$

$$V_C = \frac{nRT_B}{P_C} = 0.0373\ \mathrm{m}^3$$
$$P_C = P_A = 1.00\ \mathrm{atm}$$
$$T_C = 455\ \mathrm{K}$$

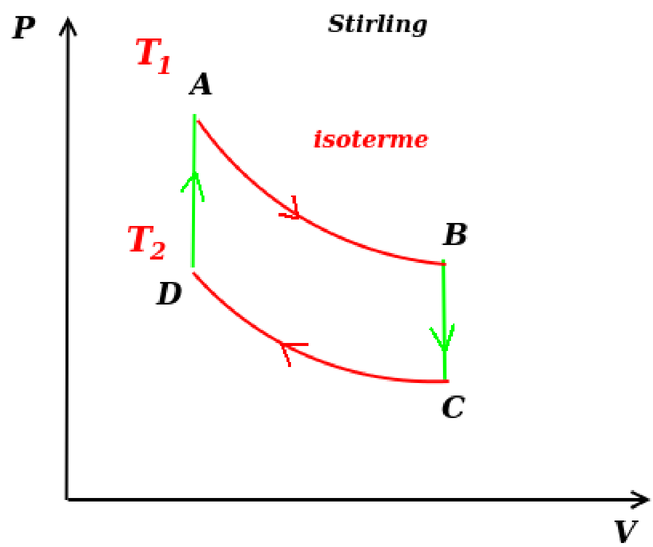


Figura IX.3

Soluzione dell'esercizio 152

$$L = nRT_1 \ln\frac{V_B}{V_A} + nRT_2 \ln\frac{V_D}{V_C}$$

Tenendo conto delle isocore:

$$L = nR(T_1 - T_2)\ln\frac{V_B}{V_A}$$

Il sistema assorbe calore attraverso le trasformazioni DA e AB:

$$Q_{as} = nc_v(T_1 - T_2) + nRT_1 \ln\frac{V_B}{V_A}$$

$$\eta = \frac{L}{Q_{as}} = \frac{nR(T_1 - T_2)\ln\frac{V_B}{V_A}}{nc_v(T_1 - T_2) + nRT_1 \ln\frac{V_B}{V_A}} = 9.84\%$$

$$\eta_C = 1 - \frac{T2}{T1} = 12.5\%$$

Il rendimento di un ciclo di Stirling reversibile lo scambio termico avviene in tutti e quattro i tempi (nelle isocore bisognerebbe utilizzare delle sorgenti che variano con continuità da T_1 e T_2 e viceversa. Per questo η è sempre minore della macchina di Carnot.)

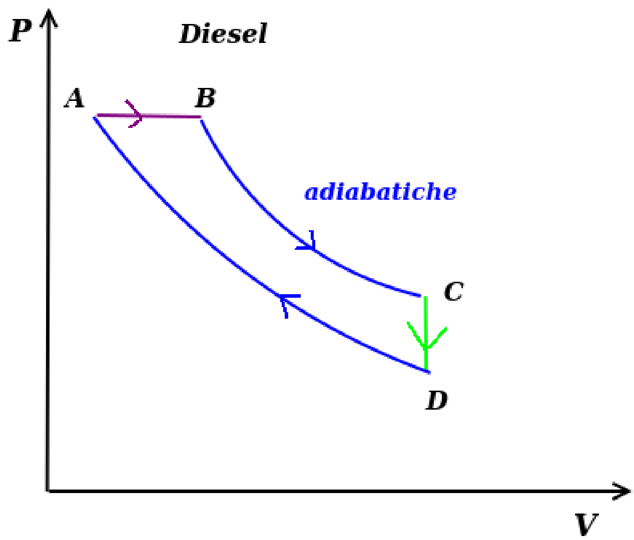


Figura IX.4

Soluzione dell'esercizio 153

Sul ciclo, il lavoro complessivo deve essere uguale al calore scambiato ($\Delta U = 0$).

$$L = L_{AB} + L_{CD} = nc_p(T_B - T_A) + nc_v(T_D - T_C)$$

Il calore assorbito:

$$Q = Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A)$$

$$\eta = 1 - \frac{c_v(T_C - T_D)}{T_B - T_A} = 62.5\%$$

$$\eta_c = 1 - \frac{T_D}{T_B} = 89.1\%$$

Soluzione dell'esercizio 154

Il lavoro è dato dal calore scambiato:

$$L = Q_{DA} + Q_{BC} = nc_v(T_A - T_D) + nc_v(T_C - T_B)$$

$$\eta = L/Q_{DA} = 1 - \frac{T_B - T_C}{T_A - T_D} = 50.6\%$$

$$\eta_c == 1 - \frac{T_C}{T_A} = 80.9\%$$

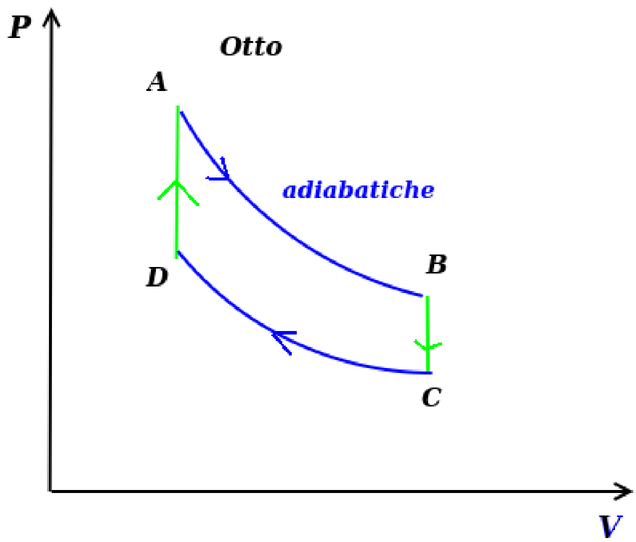


Figura IX.5

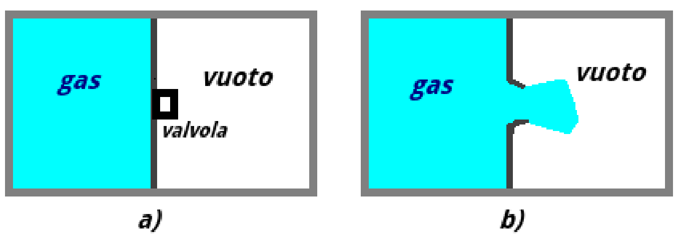


Figura IX.6

Soluzione dell'esercizio 155

a) Il gas né compie lavoro né riceve calore dall'esterno. Quindi per il primo principio $\Delta U = 0$. Essendo un gas perfetto anche $\Delta T = 0$. b) Il processo è irreversibile, perché non quasi-statico, quindi il calcolo dell'integrale di Clausius non può essere fatto sulla trasformazione realmente avvenuta. Occorre quindi trovare una trasformazione reversibile che connette gli stati iniziali e finali. Dato che la temperatura si mantiene costante, usiamo una isoterma, dove $\delta Q = pdV = nrT\frac{dV}{V}$:

$$\Delta S = \int_{V_i}^{V_f} \frac{\delta Q}{T} = nR \ln \frac{V_f}{V_i} = 1.00 \text{ mol} 8.31 \text{ J/molK} \ln 2 = 5.76 \text{ J/K}$$

Soluzione dell'esercizio 156

Dalla trasformazione isoterma si trova:

$$P_2 = \frac{P_1 V_1}{V_2} = \frac{P_1}{3}$$

Dalla adiabatica:

$$P_3 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\gamma} = 3^{-\gamma} P_1$$

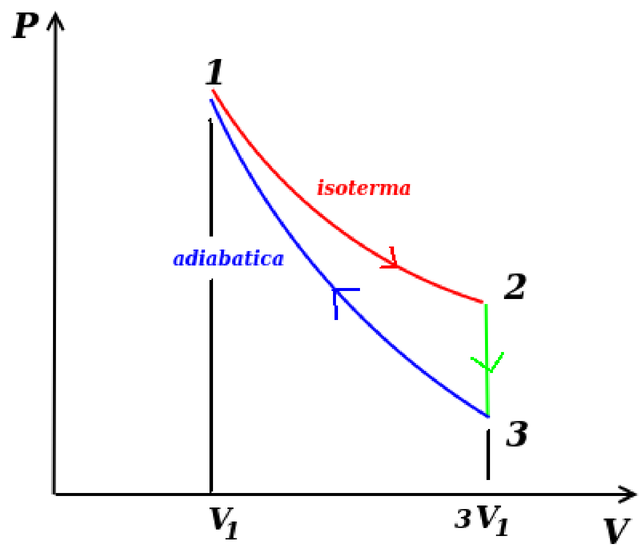


Figura IX.7

Dalle relazioni precedenti, i dati iniziali e l'isocora:

$$T_3 = \frac{P_1 V_1}{nR} = \frac{3^{-\gamma} P_1 V_3}{nR} = \frac{3^{-\gamma} P_1 V_2}{nR} = \frac{3^{-\gamma} P_1 3 V_1}{nR} = 3^{1-\gamma} T_1$$

Processo 1 → 2, espansione isoterma:

$$L_{12} = \int_1^2 P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V} dv = RT_1 \ln 3$$

$$Q_{12} = L_{12} = RT_1 \ln 3$$

$$\Delta U_{12} = 0$$

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{T_1}{Q_{12}} = R \ln 3$$

Processo 2 → 3, isocora:

$$L_{23} = 0$$

$$Q_{23} = nc_v(T_3 - T_1) = -\frac{5}{2}(1 - 3^{1-\gamma}) RT_1$$

$$\Delta U_{23} = Q_{23} = -\frac{5}{2}(1 - 3^{1-\gamma})RT_1$$

$$\Delta S_{23} = \int_2^3 \frac{dQ}{T} = \int_2^3 \frac{nc_v}{T} = nc_v \ln\left(\frac{T_3}{T_1}\right) = -R\ln 3$$

Processo 2 → 3, compressione adiabatica:

$$L_{31} = -nc_v(T_1 - T_3) = -\frac{5}{2}(1 - 3^{1-\gamma})RT_1$$

$$Q_{31} = 0$$

$$\Delta U_{31} = -L_{31} = \frac{5}{2}(1 - 3^{1-\gamma})RT_1$$

$$\Delta S_{31} = 0$$

Il lavoro dell'adiabatica può essere anche calcolato come:

$$L_{31} = \int_3^1 = \frac{1}{1-\gamma}(P_1V_1 - P_3V_3) = -\frac{5}{2}(1 - 3^{1-\gamma})RT_1$$

Per controllare i calcoli, sappiamo che, essendo U e S funzioni di stato, su un ciclo non devono variare. Inoltre potremo verificare che il calore scambiato in tutto il ciclo sarà uguale al lavoro fatto dal sistema.

$$\Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + \Delta U_{31} = 0 - \frac{5}{2}(1 - 3^{1-\gamma})RT_1 + \frac{5}{2}(1 - 3^{1-\gamma})RT_1 = 0$$

$$\Delta S = R\ln 3 - R\ln 3 + 0 = 0$$

$$L = RT_1 \ln 3 + 0 - \frac{5}{2}(1 - 3^{1-\gamma})RT_1$$

$$Q = RT_1 \ln 3 - \frac{5}{2}(1 - 3^{1-\gamma})RT_1 + 0 = L$$

Soluzione dell'esercizio 157

Q_{ass} è nell'isoterma CA:

$$Q_{CA} = L_{CA} = nRT_A \ln\frac{V_A}{V_C} > 0$$

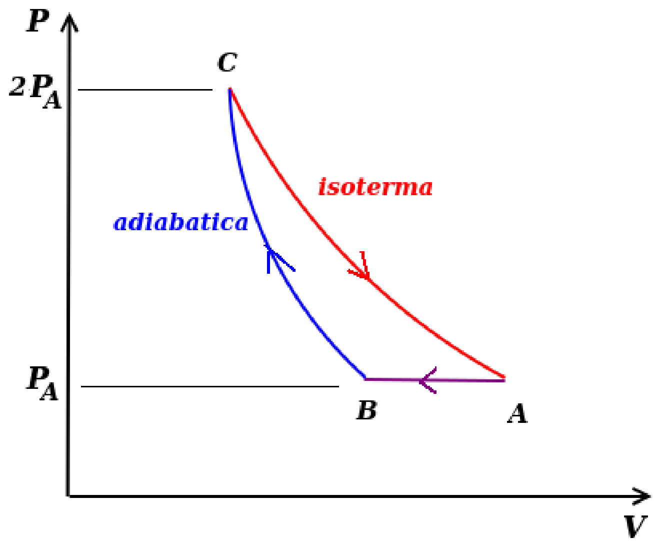


Figura IX.8

essendo $V_A > V_C$, come si vede dal grafico. Si frutta la costanza del rapporto $P \cdot V$ nell'isoterma per riscrivere il rapporto tra i volumi come rapporto tra pressioni.

$$\frac{V_A}{V_C} = \frac{P_C}{P_A} = 2$$

$$Q_{CA} = nRT_A \ln 2$$

Q_{ced} è nell'isobara AB:

$$Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) < 0$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{|Q_{ass}|} = 1 - \frac{nc_P(T_A - T_B)}{nRT_A \ln 2} = 1 - \frac{c_p}{R \ln 2}\left(1 - \frac{T_B}{T_A}\right)$$

Per trovare il rapporto tra le temperature si sfrutta l'adiabatica e l'isoterma:

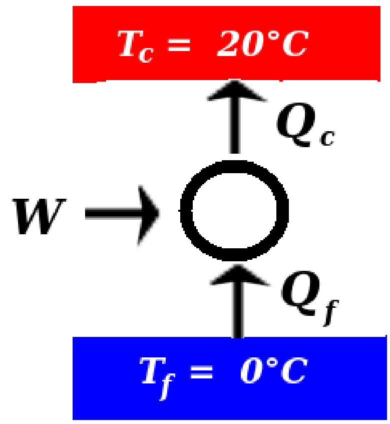
$$T_B P_B^{(1-\gamma)/\gamma} = T_C P_C^{(1-\gamma)/\gamma}$$

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{T_B}{T_C}$$

$$\frac{T_B}{T_C} = \left(\frac{P_C}{P_A}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 2^{(1-\gamma)/\gamma}$$

dove si è sfruttato anche il fatto che $P_B = P_A$ per via dell'isobara.

$$\eta = 1 - \frac{5}{2 \ln 2}(1 - 2^{(1-\gamma)/\gamma}) = 13\%$$



Soluzione dell'esercizio 158

Nel ciclo reversibile:

$$\eta = \frac{L}{|Q_c|} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

$$L = \eta |Q_c|$$

$$|Q_c| = \frac{L}{\eta}$$

$$|Q_f| = |Q_c| - L = \frac{L}{\eta} - L = L\frac{1-\eta}{\eta}$$

$$\frac{1-\eta}{\eta} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

$$|Q_f| = L\frac{T_f}{T_c - T_f}$$

$$|Q_f| = mL_f$$

$$m = \frac{T_f}{T_c - T_f}\frac{L}{\mathcal{L}_F} = 71.3 \text{ kg}$$

$$k_F = \frac{|Q_c|}{|L|} = \frac{T_f}{T_c - T_f} = 13.7$$

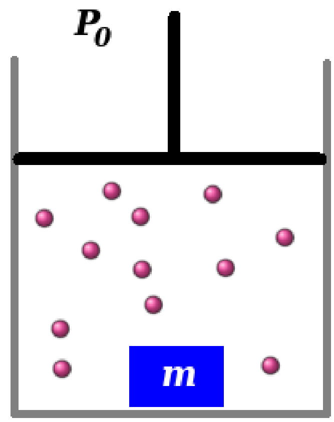


Figura IX.10

Soluzione dell'esercizio 159

$$\Delta U = -L$$

$$L = P_0 \Delta V$$

L'espansione avviene a pressione costante e per un gas perfetto:

$$L = nR(T_f - T_o)$$

Quindi

$$T_f = T_0 + \frac{P_0 \Delta V}{nR}$$

$$\Delta U = \Delta U_{gas} + \Delta U_{corpo} = nc_v(T_f - T_0) + mc(T_f - T_1) = -L = -n\underbrace{(p_p - c_v)}_{R}(T_f - T_0)$$

$$nc_p(T_f - T_o) = mc(T_1 - T_f)$$

$$c = \frac{nc_p(T_f - T_0)}{m(T_1 - T_f)} = \frac{c_p P_0 \Delta V}{mR} \frac{1}{T_1 - T_0 - \frac{P_0 \Delta V}{nR}}$$

$$c = \frac{nc_p P_0 \Delta V}{m[nR(T_1 - T_0) - P_0 \Delta V]}$$

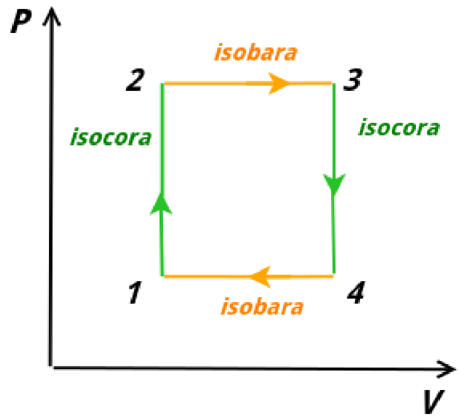


Figura IX.11

Soluzione dell'esercizio 160

a) con 3 cifre significative:

$$
\begin{aligned}
m_g &= 8.00 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \\
T_g &= 263.15°\text{K} \\
T_a = 293.15°\text{K}\mathcal{L}_f &= 3.33 \cdot 10^5\ \text{J/kg} \\
c_g &= 2.22 \cdot 10^3\ \text{J/kgK} \\
c_g &= 4.19 \cdot 10^3\ \text{J/kgK}
\end{aligned}
$$

Sapendo che la densità dell'acqua è 1.00 g/cm^3:

$$m_a = 100\ \text{g} = 0.100\ \text{kg}$$

b)

$$c_a m_a (T_f - T_a) + c_g m_g \underbrace{(273.15°\text{K} - T_g°\text{K})}_{10°\text{K}} + \mathcal{L}_{\{} m_g + c_a m_a (T_f - 273.15°\text{K}) = 0$$

$$T_f = \frac{-c_g m_g (10KK) - \mathcal{L}_{\{} m_g + c_a m_g (273.15°\text{K}) + c_a m_a T_a}{c_a (m_a + m_g)} = 285°\text{K}$$

c)Differenza di entropia di fusione del ghiaccio:

$$\Delta S_f = \frac{\mathcal{L}_{\{} m_g}{273.15°\text{K}}$$

Differenza di entropia dei cambiamenti di temperatura:

$$\Delta S_a = m_a c_a \ln\left(\frac{T_f}{T_a}\right)$$

$$\Delta S_{g1} = m_g c_g \ln(\frac{273.15°\text{K}}{T_g})$$

$$\Delta S_{g2} = m_g c_g \ln(\frac{T_f}{273.15°\text{K}})$$

$$\Delta S = \Delta S_f + \Delta S_a + \Delta S_{g1} + \Delta S_{g2} = 0.64 \text{ J/°K}$$

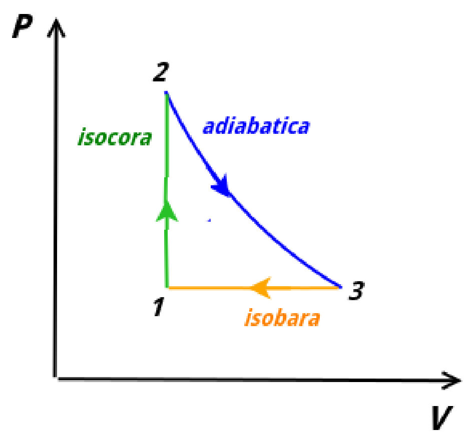


Figura IX.12

Soluzione dell'esercizio 161

a)

$$L_{23} = P(V - V_0) > 0$$
$$L_{41} = P_0(V_0 - V) = -P_0(V - V_0) < 0$$

Il lavoro totale:

$$L = (P - P_0)(V - V_0) = (2P_0 - P_0)(2V_0 - V_0) = P_0V_0 = 2.27 \text{ kJ}$$

b)

$$Q_{12} = nc_v(T_2 - T_1)$$
$$Q_{23} = nc_p(T_3 - T_2)$$
$$Q_{1\to 3} = nc_v(T_2 - T_1) + nc_p(T_3 - T_2)$$

Per trovare le temperature:

$$T_1 = \frac{P_0V_0}{nR}$$
$$T_2 = \frac{PV_0}{nR} = 2\frac{P_0V_0}{nR}$$
$$T_3 = \frac{PV}{nR} = 4\frac{P_0V_0}{nR}$$
$$T_4 = \frac{P_0V}{nR} = 2\frac{P_0V_0}{nR}$$

$$Q_{1\to3} = (c_v + 2c_p)\frac{P_0V_0}{R} = \left(\frac{3}{2}R + \frac{5}{2}\right)\frac{P_0V_0}{R} = \frac{13}{2}P_0V_0 = 14.8 \text{ kJ}$$

c)

$$\eta = \frac{L}{Q_{as}} = \frac{L}{Q_{1\to3}} = 15.4\%$$

d)
bisogna considerare la temperatura più alta e più bassa durante il ciclo:

$$\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = 75.0\%$$

Soluzione dell'esercizio 162

a)
Tra 1 → 2 viene assorbito calore:

$$Q_{as} = nc_v\Delta T = nc_v\frac{V_1(P_2 - P_1)}{nR}$$

per trovare P_1 sfruttiamo l'adiabatica e le relazioni nelle isobara e isocora:

$$P_1 = P_3$$
$$V_1 = V_2$$
$$P_2{V_1}^{\gamma} = P_3V_3^{\gamma}P_2V_1^{\gamma} = P_1V_3^{\gamma}$$
$$P_1 = P_2\left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\gamma} = P_2\frac{1}{8^{\gamma}} = 3.167 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$Q_{as} = 1.47 \text{ kJ}$$

b)
Tra 3 → 1 viene ceduto calore:

$$Q_{ced} = nc_p\Delta T$$

$$\Delta T = \frac{P\Delta V}{nR} = P_1\frac{(V_1 - V_3)}{nR} = -7\frac{P_1V_1}{nR}$$

$$Q_{ced} = -5.54 \cdot 10^2 \text{ J}$$

c)
In un ciclo completo:

$$\Delta U = 0$$
$$Q = L$$
$$L = Q_{as} + Q_{ced} = 9.10 \cdot 10^2 \text{ J}$$

d)

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{as}} = 62.3\%$$

Vediamo la temperatura maggiore e minore:

$$\begin{aligned} T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = P_2 \frac{1}{8^\gamma} \simeq 0.03 \frac{P_2 V_1}{nR} \\ T_2 = \frac{P_2 V_2}{nR} \\ T_3 = \frac{1}{8^\gamma} \frac{P_2 8 V_1}{nR} \simeq 0.24 \frac{P_2 V_2}{nR} \end{aligned}$$

$$\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{8^\gamma} = 96.9\%$$

Capitolo X

Elettromagnetismo

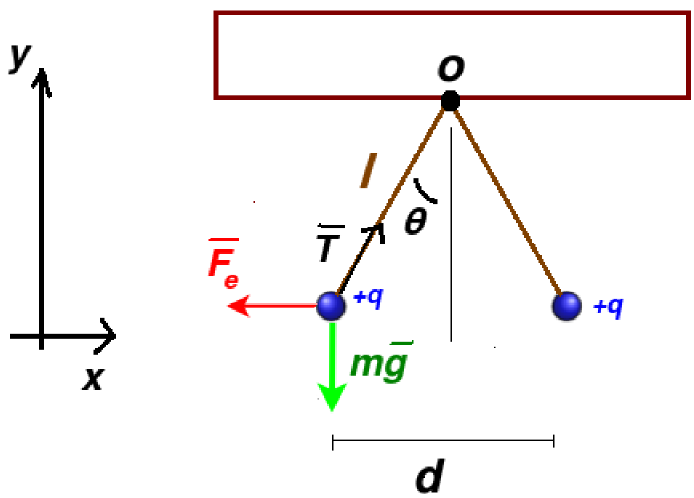


Figura X.1

Soluzione dell'esercizio 163

Data la simmetria del problema, si può studiare solo una delle due masse. L'equilibrio si ha per:

$$\vec{F}_e + \vec{T} + m\vec{g} = \vec{0}$$

dove $\vec{F}_e$ è la forza di repulsione elettrostatica. Con riferimento alla figura X.1:

$$\hat{x}: \quad -F_e + T\sin\theta = 0$$

$$\hat{y}: \quad T\cos\theta - mg = 0$$

Si ricava θ:

$$\theta = \arccos\left(\frac{mg}{T}\right)$$

Sostituendo l'espressione per F_e:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{d^2} - T\sin\theta = 0$$

d si può esprimere come:

$$d = 2l\sin\theta$$

Quindi:

$$q = 4l\sqrt{\pi\epsilon_0 T}\sin^{3/2}\theta = 0.53\ \mu\text{C}$$

Soluzione dell'esercizio 164

Dato che le forze in gioco sono conservative si conserva l'energia meccanica:

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

Per i dati del problema:

$$U_f = K_1$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{d} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$d = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{mv^2} = 450\ \text{m}$$

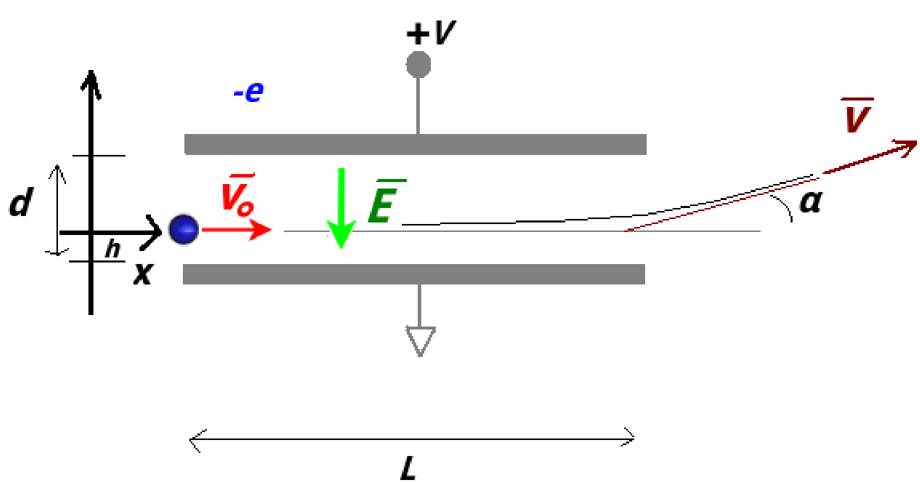


Figura X.2

Soluzione dell'esercizio 165

Mettendo un sistema di riferimento con l'asse x parallelo alle armature e l'asse y perpendicolare (con riferimento alla figura X.2), l'accelerazione uniforme che subisce l'elettrone è:

$$\vec{a} = -\frac{e\vec{E}}{m}$$

$$\hat{x} \quad a_x = 0$$

$$\hat{y} \quad a_y = \frac{eE}{m}$$

Per un condensatore piano:

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{V}{d}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{eV}{md} \end{cases}$$

integrando su un tempo t e considerando le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v_x = v_{x0} \\ v_y = a_y t + v_{y0} \end{cases}$$

Mettendo l'origine del sistema di riferimento nel punto di ingresso dell'elettrone come in figura e integrando:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \frac{1}{2}\frac{eV}{md}t^2 \end{cases}$$

Trovando t nella prima e sostituendolo nella seconda:

$$y(t) = \frac{eV}{2mdv_0{}^2}x(t)^2$$

Quindi l'elettrone compirà una traiettoria parabolica, in analogia con il moto parabolico. alla fine del condensatore, $x(t') = L$, dove $t' = L/v_0$.

$$y(t') = 0.44 \text{ cm}$$

Quindi per non colpire l'armatura superiore, in ingresso l'elettrone dovrà essere distante dall'armatura inferiore di una distanza h:

$$h = d - y(t') = 0.06 \text{ cm}$$

All'uscita del condensatore avremo:

$$\begin{cases} v_x(t') = v_{x0} \\ v_y(t') = \frac{eV}{md}\frac{L}{v_0} \end{cases}$$

La velocità di uscita $\vec{v}$ avrà quindi modulo:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{{v_{x0}}^2 + \frac{eV}{md}\frac{L}{v_0}^2} = 1.02 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

Questa velocità formerà un angolo α con l'asse x:

$$\alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{eVL}{md{v_0}^2} = 10.1°$$

Soluzione dell'esercizio 166

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = |\vec{r} - \vec{r}_2| = \sqrt{D^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \Delta$$

dove, per comodità, abbiamo rinominato quella quantità come Δ.

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\Delta^3}[Q(0) - Q(o)] = 0$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\Delta^3}[QD - QD] = 0$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\Delta^3}\left[Q\left(-\frac{d}{2}\right) - Q\left(\frac{d}{2}\right)\right] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qd}{\Delta^3}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qd}{\left[D^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}}\hat{k}$$

Soluzione dell'esercizio 167

Mettiamo un sistema di riferimento con l'asse z lungo il filo e l'asse y nella direzione che va dal filo al punto P e perpendicolare a z. La carica di un elemento lungo dl è $dq = \lambda dl$.

$$|d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}$$

dove r è la distanza di dl da P. Indicando con O il punto del filo a distanza R da P, per ogni elemento infinitesimo dl_1 esiste un elemento dl_2 opposto ad O. I loro contributi $d\vec{E}_1$ e $d\vec{E}_2$ si annullano lungo z e si sommano lungo y.

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = (|\vec{E}_1| + |d\vec{E}_2|) \cos\theta\hat{y} = 2|d\vec{E}| \cos\theta\hat{y} = \frac{2\cos\theta\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{y}$$

dove θ è l'angolo che la congiungente tra dl_1 e P forma con l'asse y. Per integrare, esprimiamo r e dl in funzione di θ e R:

$$r = \frac{R}{\cos\theta}$$

$$l = R\tan\theta \rightarrow dl = R\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

Si considera quindi solo il filo superiore seminfinito, che viene descritto facendo variare θ tra 0 e $\pi/2$:

$$\vec{E}(P) = \int d\vec{E} = \frac{2\hat{y}}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\lambda \underbrace{\frac{Rd\theta}{\cos^2\theta}}_{dl} \underbrace{\frac{\cos^2\theta}{R^2}}_{1/r^2} = \frac{\hat{y}}{2\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi/2} \frac{\lambda}{R}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\hat{y}$$

Soluzione dell'esercizio 168

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma_{base1}} \vec{E} \bullet \hat{n}dS + \int_{\Sigma_{base2}} \vec{E} \bullet \hat{n}dS + \int_{\Sigma_{suplat}} \vec{E} \bullet \hat{n}dS$$

Per la simmetria cilindrica del campo generato dal filo, il flusso attraverso le basi è nullo ($\vec{E}$ perpendicolare a $\hat{n}$). Invece nella superficie laterale sono paralleli. Quindi:

$$\Phi(\vec{E}) = E2\pi rh$$

Questa deve essere uguale alla carica totale divisa per ϵ_0:

$$E2\pi rh = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

quindi:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$$

Soluzione dell'esercizio 169

Se $l \gg R_1, R_2$ ci troviamo in condizioni di induzione completa e $\vec{E}$ all'interno del cilindro è diretto radialmente. Se il cilindro interno è molto sottile possiamo schematizzarlo come un filo carico con una certa densità lineare di carica λ. Da altri esercizi si può trovare che il campo elettrico è:

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{\hat{r}}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\frac{\hat{r}}{r}$$

dove $Q = \lambda l$ è la carica del filo centrale.

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \bullet d\vec{l} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Soluzione dell'esercizio 170

a) $|\vec{p}| = qd = 9.30 \cdot 10^{-15}$ Cm.
b) $\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}$.
$|\vec{\tau}| = pE \sin \frac{\pi}{2} = pE = 1.02 \cdot 10^{-11}$ Nm

Soluzione dell'esercizio 171

All'equilibrio, proiettando le forze lungo l'asse verticale:

$$mg + qE = 0$$

dove:

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

quindi:

$$q = -\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho g}{E} = -8.0 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\frac{q}{e} = -5$$

$$q = -5e$$

Soluzione dell'esercizio 172

$$|F_{43}| = k\frac{|q_4||q_3|}{{d_3}^2} = 4.60 \cdot 10^{-24} \text{ N}$$

$$|F_{42}| = 2.30 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{N}$$

$$|F_{41}| = 1.02 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{N}$$

$$F_x = -F_{43} - F_{41}\cos\theta = 5.44 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{N}$$

$$F_y = -F_{42} - F_{41}\sin\theta = 2.89 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{N}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2} = 6.16 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{N}$$

$$\theta = 180^\circ + \arctan\frac{F_y}{F_x} = 208^\circ$$

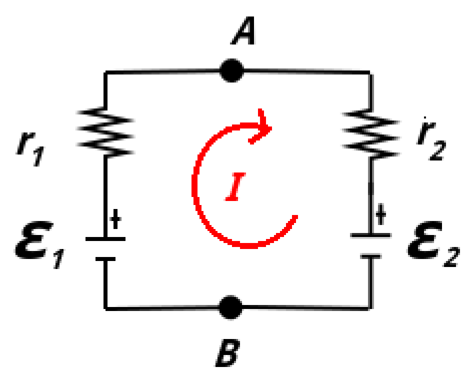


Figura X.3

Soluzione dell'esercizio 173

$$\epsilon_1 - Ir_1 - Ir_2 - \epsilon_2 = 0$$

$$I = \frac{\epsilon_1}{r_1 + r_2} - \frac{\epsilon_2}{r_1 + r_2}$$

$$\Delta V = -Ir_1 + \epsilon_1$$

Sostituendo I:

$$\epsilon_2 = \frac{1}{r_2}(\Delta V(r_1 + r_2) - \epsilon_1 r_2) = 6\ \mathrm{V}$$

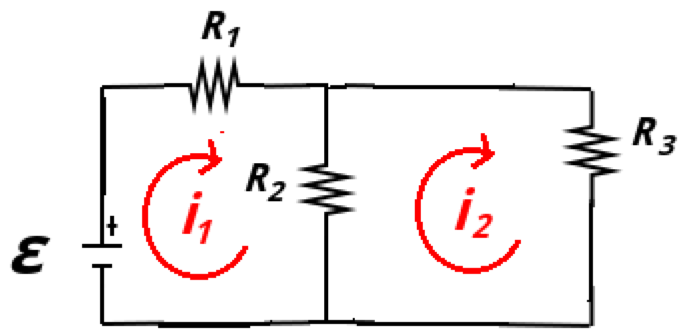


Figura X.4

Soluzione dell'esercizio 174

a)

$$R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} = 3\ \Omega$$

b)
Le equazioni per le due maglie (scegliendo un verso orario) sono:

$$\begin{aligned} \epsilon = -i_1 R_1 - i_1 R_1 + i_2 R_2 &= 0 \\ i_1 R_2 - i_2 R_2 - i_2 R_3 &= 0 \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} i_1 &= 3.0\ \mathrm{A} \\ i_2 &= 1.5\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

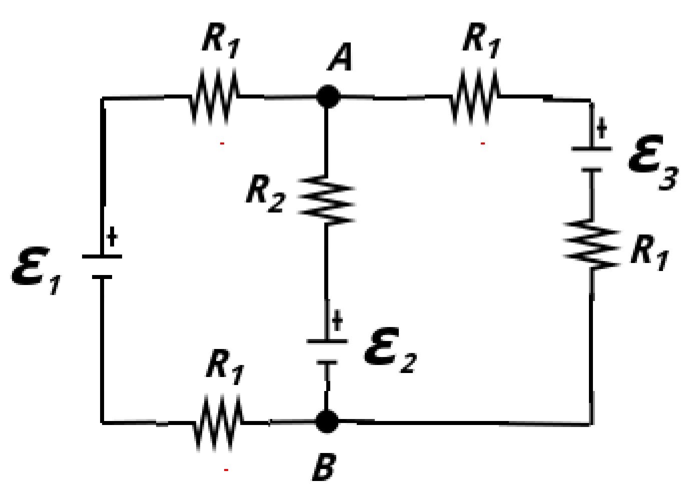


Figura X.5

Soluzione dell'esercizio 175

Scegliendo un verso orario per le correnti di maglia e considerando che ϵ_2=ϵ_3:

$$\epsilon_1 - 2i_1R_1 - i_1R_2 + i_2R + \epsilon_2 = 0$$
$$i_1R_2 - 1_2R_2 - 2i_2 * R_2 = 0$$

$$V_A - V_B = \epsilon_2 - (i_1 - i_2) * R2 = 3.3 \text{ V}$$

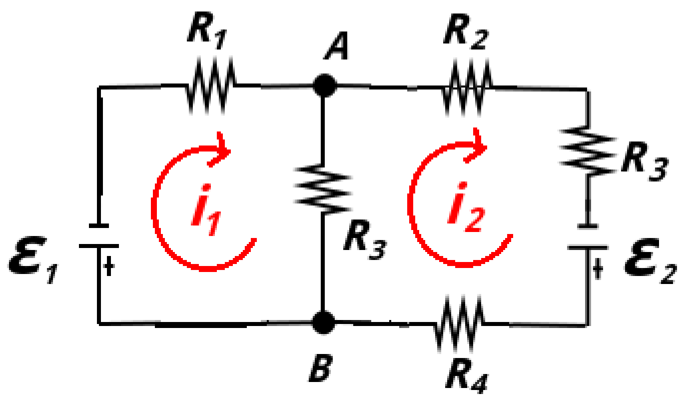


Figura X.6

Soluzione dell'esercizio 176

In senso orario:

$$-\epsilon_1 - i_1R_1 - i_1R_3 + i_2R_3 = 0$$
$$i_1R_3 - i_2R_3 - i_2(R_2 + R_3 + R_4) + \epsilon_2 = 0$$

$$i_1 = -0.90 \text{ A}$$
$$i_2 = 0.30 \text{ A}$$

Soluzione dell'esercizio 177

$$-\epsilon_1 - i_1R_1 - i_1R_2 + i_2R_2 = 0$$
$$i_1R_2 - i_2R_2 - i_2R_3 - \epsilon_2 = 0$$

da cui:

$$i_1 = -73 \text{ mA}$$
$$i_2 = -47 \text{ A}$$

$$i = i_1 - i_2$$

$$\mathcal{P} = i^2R = 71 \text{ mW}$$

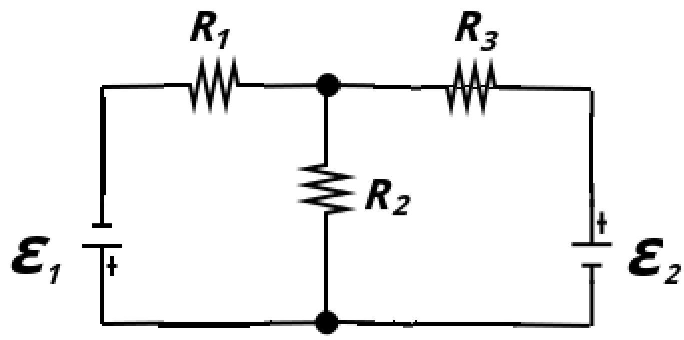


Figura X.7

Soluzione dell'esercizio 178

(la forza ha modulo $6.50 \cdot 10^{-17}$ N)

$$v = \frac{F_L}{eB\sin\theta} = 4.00 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Soluzione dell'esercizio 179

$$\vec{F_L} = -e\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = \hat{k}(-1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C})[(2.0 \cdot 10^6) \cdot (-0.15 \text{ T}) - (3.0 \cdot 10^6 \text{ m/s}) \cdot (0.03 \text{ T}) = 6.2 \cdot 10^{-14} \text{ N}$$

Soluzione dell'esercizio 180

a) Per la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eV$$

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}} = 1.11 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$r = \frac{m_e v}{eB} = 3.16 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Soluzione dell'esercizio 181

$$F = iBL\sin\theta = 20.1 \text{ N}$$

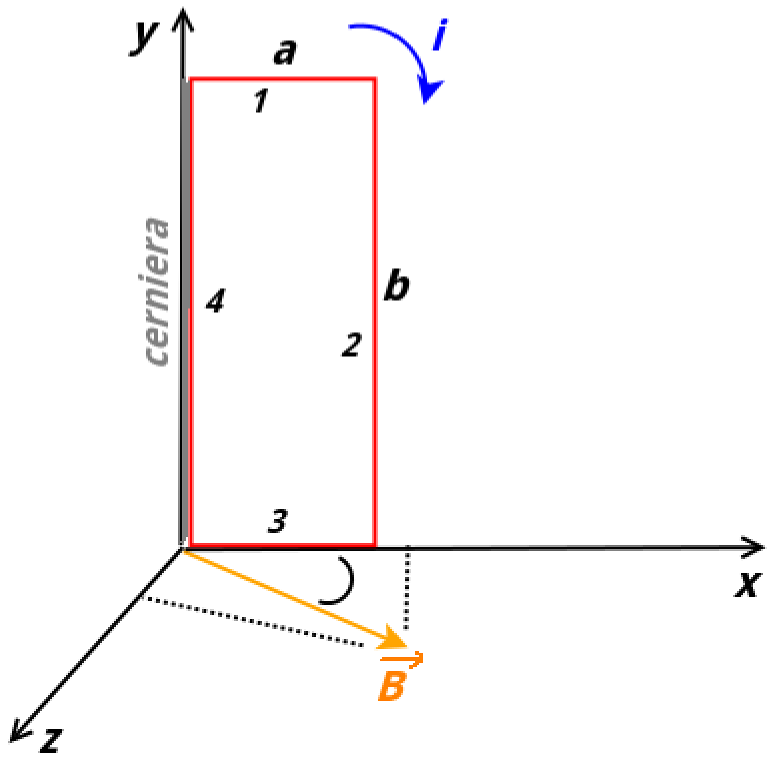


Figura X.8

Soluzione dell'esercizio 182

$$\vec{F} = I\vec{L} \wedge \vec{B} = I \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ L & 0 & 0 \\ 0 & B_y & B_z \end{bmatrix} = I(-\hat{j}LB_z + \hat{k}LB_y) = (-2.50 \cdot 10^{-3}\hat{k}\hat{j} + 0.750 \cdot 10^{-3}\hat{k})\ \mathrm{N}$$

Soluzione dell'esercizio 183

Scrivendo, per ogni lato del filo:

$$\vec{F} = I\vec{L} \wedge \vec{B}$$

Per il lato 1, conta solo la componente $\vec{B}_z$ (l'altra è parallela al filo) e si ha una forza:

$$\vec{F} = -IaB\sin\theta\hat{j}$$

Per il lato 2:

$$\vec{F} = IaB\sin\theta\hat{j}$$

Le due forze si annullano a vicenda e inoltre hanno momento nullo rispetto alla cerniera (cioè l'asse y, lungo le quali sono dirette.) Sul lato 4, la forza non può fare momento perché ha braccio nullo

$$\vec{F} = IbB\sin\theta\hat{j}$$

L'unica che può esercitare un momento rispetto all'asse y è la forza applicata nel filo 2. La forza che subisce ha due componenti, dovute alle due componenti di $\vec{B}$ lungo gli assi x e z. La componente $\vec{B_z}$:

$$\vec{F} = -IbB\sin\theta\hat{i}$$

Questa non può esercitare un momento rispetto all'asse y, perchè diretta lungo il braccio (asse x). La componente $\vec{B_z}$:

$$\vec{F} = -IbB\cos\theta\hat{z}$$

invece ha un momento non nullo (equivale, in meccanica, alla forza su una maniglia per aprire una porta), inducendo una rotazione oraria guardando la spira dall'alto:

$$\vec{\tau} = \vec{r}\wedge\vec{F} = \vec{F} = -IbaB\cos\theta\hat{j} = -ISB\cos\theta\hat{j}$$

dove $S = ab$ è la superficie della spira. Il modulo τ di $\vec{\tau}$ è:

$$\tau = -0.0043 \text{ Nm}$$

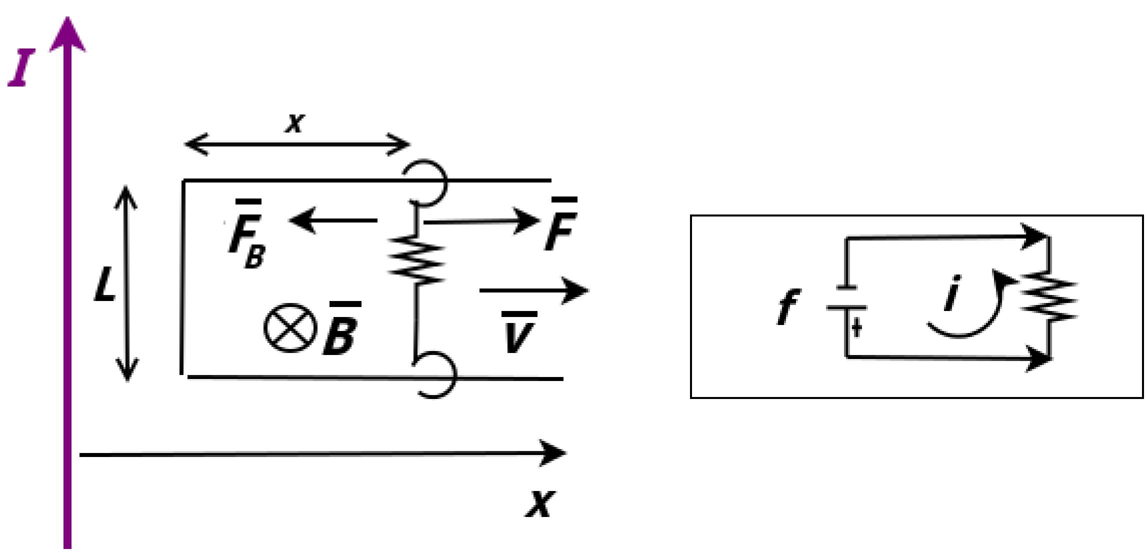


Figura X.9

Soluzione dell'esercizio 184

a) Si può far in due modi.
Il primo è con Biot-Savart:
Indichiamo con P un punto a distanza x dal filo, $\vec{ds}$ un elemento infinitesimo si filo, θ l'angolo compreso tra $\vec{ds}$ e il vettore $\vec{r}$ che lo congiunge con P. O è la proiezione di P sul filo.

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ids\sin\theta}{x^2}$$

Il suo contributo sarà uguale ad una altro $\vec{ds}$ che giace dalla parte opposta di O:

$$B = 2\int_0^{+\infty} dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\theta ds}{x^2}$$

dato che:

$$r = \sqrt{s^2 + x^2}$$

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{s^2 + x^2}}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{xds}{(s^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\frac{s}{\sqrt{s^2 + x^2}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

Il secondo modo, molto più veloce, ci applica la legge della circuitazione di Ampere, scegliendo una circonferenza c di raggio x sul piano ortogonale al filo:

$$\oint_C \vec{B} \bullet \vec{ds} = \mu_0 I$$

$$2\pi x B = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$$

Per il verso di $\vec{B}$ (mostrato in figura) usiamo la mano destra con il pollice lungo il verso della corrente. b) La forza elettromotrice indotta dalla variazione del flusso di $\vec{B}$ intercettato dalla spira, rende quest'ultima assimilabile al circuito nel riquadro a destra della figura X.9. Utilizzando Faraday-Newman:

$$f = -\frac{\Phi_B}{dt} == -\frac{d}{dx}(BLx) = -BL\frac{dx}{dt} = -BLv$$

In valore assoluto avremo una f:

$$f = BLv = \frac{\mu_0 ILv}{2\pi x}$$

E la corrente:

$$i = \frac{\mu_0 ILv}{2\pi Rx}$$

Sul ramo mobile del circuito, la forza dovuta a $\vec{B}$:

$$\vec{F_B} = i\vec{L} \wedge \vec{B}$$

Il suo modulo:

$$F_B = \frac{\mu_0 ILv}{2\pi Rx} L \frac{\mu I}{2\pi x}$$

e direzione e verso riportato in figura. La forza $\vec{F}$ dovrà quindi annullare $\vec{F_B}$ per mantenere costante $\vec{v}$ e quindi dovrà avere stesso modulo e direzione, ma verso opposto:

$$F = \left(\frac{\mu_0 IL}{2\pi x}\right)^2 \frac{v}{R}$$

Soluzione dell'esercizio 185

La forza associata con il campo magnetico deve essere diretta lungo j per annullare la forza di gravità lungo $-\hat{j}$. Dalla regola della mano destra, $\vec{B}$ è diretto lungo $-\hat{k}$ (essendo $\hat{\imath} \wedge (-\hat{k}) = \hat{\jmath}$). Osserviamo che la carica è positiva e che è necessario porre $B_y = 0$:

$$\vec{B} = B_z\hat{k} = -\left(\frac{mg}{qv}\right)\hat{k} = -0.061 \text{ T}\hat{k}$$

Soluzione dell'esercizio 186

$$B = \frac{m_e v}{er} = 2.12 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

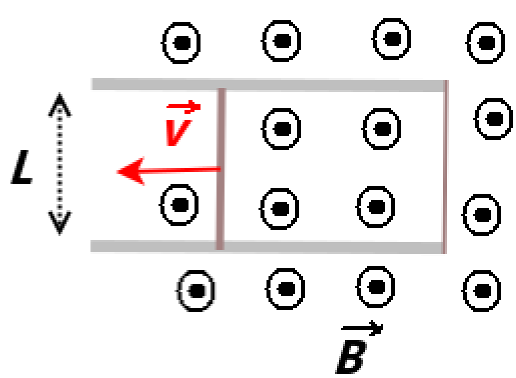


Figura X.10

Capitolo XI

Ottica

Soluzione dell'esercizio 188

$$n_1 = A + \frac{B}{\lambda_1^2}$$

$$n_2 = A + \frac{B}{\lambda_2^2}$$

Si trova:

$$B = 4.224 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}^2 = 4.224 \cdot 10^3\ \mathrm{nm}^2$$

$$A = 1.499$$

Quindi:

$$n(\lambda_3) = 1.5107$$

Soluzione dell'esercizio 189

Essendo non polarizzata, la radiazione esce dal primo polarizzatore con la polarizzazione lineare orientata come l'asse ottico del sistema e la sua intensità I ridotta alla metà:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0$$

Al polarizzatore 2 la radiazione arriverà quindi con il campo elettrico che forma un angolo θ_1 con l'asse x. Con l'asse del secondo polarizzatore, l'angolo sarà:

$$\theta_2' = 90° - \theta_1 + \theta_2 = 110°$$

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta_2'$$

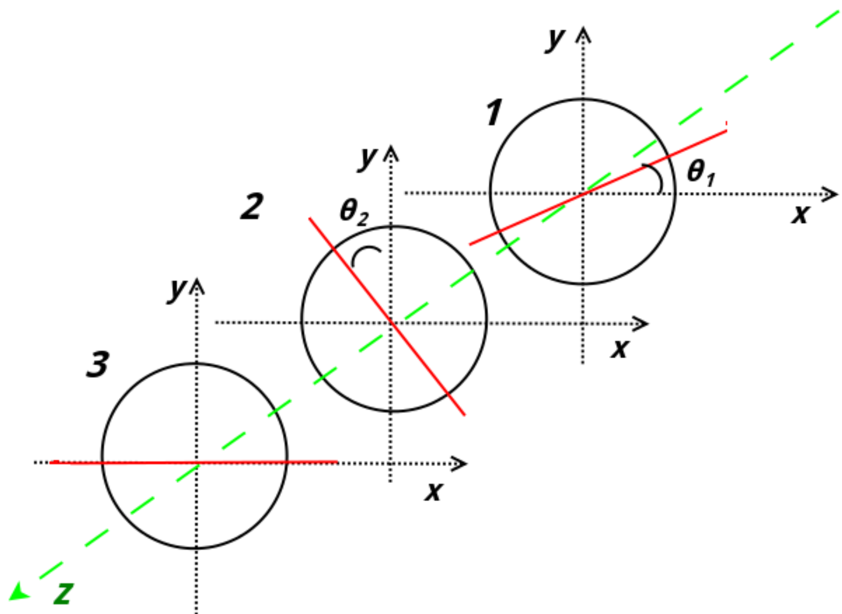


Figura XI.1

e esce con la polarizzazione lineare data dal secondo polarizzatore. Con il polarizzatore 3 l'angolo sarà:

$$\theta'_3 = 90° - \theta_2 = 50°$$

$$I_3 = I_2 \cos^2 \theta'_3$$

E uscirà con la polarizzazione lineare finale data da quest'ultimo.
Infine:

$$\frac{I_3}{I_0} = \frac{1}{2} \cos^2 \theta'_2 \cos^2 \theta'_3 = 0.024 = 2.4\%$$

Soluzione dell'esercizio 190

Dalla prima rifrazione:

$$1 \sin \alpha_1 = n \sin \alpha_2$$

dalla seconda:

$$n \sin \alpha_2 = 1 \sin \alpha_3$$

Quindi:

$$\alpha_1 = \alpha_3$$

Il fascio in uscita non cambia direzione, ma esce traslato di una quantità d.

$$AB = D / \cos \alpha_2$$

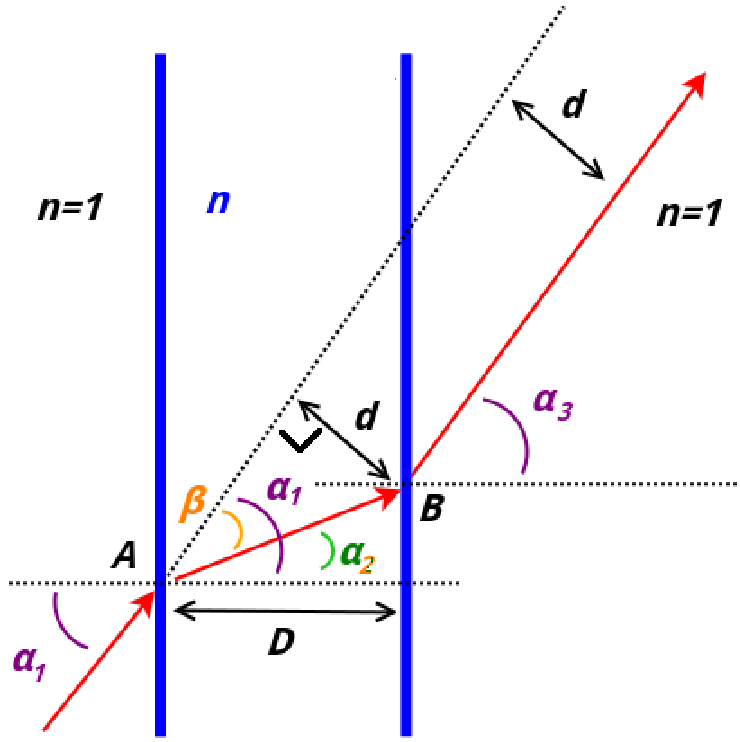


Figura XI.2

$$\beta = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$d = AB\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{D\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\cos\alpha_2}$$

$$\sin\alpha_2 = \sin\alpha_1 / n$$

$$\cos\alpha_2 = \sqrt{1 - (\sin\alpha_1/n)^2} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1}$$

$$d = D\left(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}\right)$$

$$d = D\sin\alpha\left(1 - \frac{1}{\cancel{n}}\frac{\cos\alpha_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1}}\cancel{n}\right) = 1.07\ \text{cm}$$

Soluzione dell'esercizio 191

$$q = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{p}\right)^{-1} = 27\ \text{cm}$$

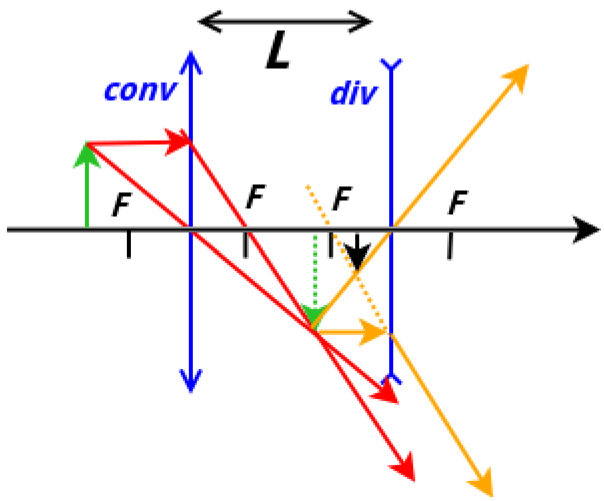


Figura XI.3

Soluzione dell'esercizio 192

$$f = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)^{-1} = -33 \text{ cm}$$

Soluzione dell'esercizio 193

6.67 diottrie corrisponde ad una distanza focale di 15.0 cm. Per costruire graficamente l'immagine, fare riferimento alla figura. I raggi verdi cono i raggi per costruire la prima immagine (verde tratteggiate) che sarà l'oggetto per la seconda lente. Per costruire l'immagine finale (in nero) si usano i raggi gialli.
Numericamente:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2}$$

dove $p_2 = L - q_1$.
Si trova:

$$q_2 = -6.82 \text{ cm (immagine virtuale)}$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 = -0.82$$

Quindi rispetto all'oggetto l'immagine è rimpicciolita e ribaltata.