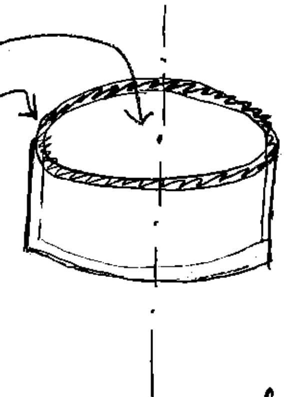
SVOLGIMENTO COMPITO SCRITTO DEL 16/1/2019

Domenico Alfano

ESERCIZIO 1

Abbiamo a che fare con un corpo rigido in rotazione.
Il corpo rigido è composto di 2 parti:

- 1 cilindro di plastica
- 1 strato metallico sottile



a) Il momento di inerzia I è la somma dei momenti di inerzia dei due corpi:

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 r^2 \qquad \text{cilindro di plastica}$$

$$I_2 = m_2 r^2 \qquad \text{strato metallico}$$

↳ questo perchè lo strato è sottile e quindi tutti i suoi punti si trovano a distanza r dall'asse di rotazione

Ricaviamo m_1 calcolando il volume del cilindro:

$$m_1 = \rho \cdot V_1 \qquad V_1 = (\text{area di base}) \times (\text{altezza})$$

$$= \pi r^2 \times h = 0{,}0651 \text{ m}^3$$

$$\Rightarrow m_1 = 59{,}9 \text{ Kg}$$

$$\Rightarrow I_1 = 3{,}88 \text{ Kg}\cdot\text{m}^2 \quad ; \quad I_2 = 0{,}0622 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I = I_1 + I_2 = 3{,}94 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

b) L'energia cinetica di un corpo che sta solamente ruotando è $K = \frac{1}{2} I \omega^2$ → velocità angolare

$K_1 = \frac{1}{2} I \omega_1^2 = 197\ J$ poiché $\omega_1 = 10\ rad/s$

c) Il corpo ha energia cinetica massima quando ha velocità angolare massima, che in questo caso vale $\omega_{MAX} = 25\ rad/s$. Questo succede nel periodo di tempo tra t_2 e t_3.

$$K_{max} = \frac{1}{2} I \omega_{MAX}^2 = 1230\ J$$

d) Il lavoro erogato dal motore è uguale alla variazione di energia cinetica. Qui è chiesto il lavoro tra t_1 e t_3, quindi

$$W(t_1 \to t_3) = K(t_3) - K(t_1) = 1230\ J - 197\ J = 1030\ J$$

(tenendo solo 3 cifre significative)

e) La fase di accelerazione è quella in cui la velocità angolare aumenta, cioè quella tra t_1 e t_2.

La potenza media è

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{K(t_2) - K(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{1030\ J}{5 s} = 206\ W$$

h) Nella fase di frenata la perdita di energia cinetica si trasforma in calore: $Q = K(t_3) - K(t_4) = 1230\ J$

2) e scalda il pattino: $Q = c_B \cdot \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{Q}{c_B} = 176\ K$

f) Il momento torcente $\tau = I\alpha$ dove $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ è l'accelerazione angolare.

Tra t_1 e t_2 ω cresce $\Rightarrow \Delta\omega > 0 \Rightarrow \alpha > 0$

Tra t_2 e t_3 ω costante $\Rightarrow \Delta\omega = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Tra t_3 e t_4 ω decresce $\Rightarrow \Delta\omega < 0 \Rightarrow \alpha < 0$

Tra t_1 e t_2 $\quad \Delta\omega = (25-10)\,\frac{rad}{s} = 15\,\frac{rad}{s}$

$$\Rightarrow \bar{\alpha} = \frac{15}{5}\,\frac{rad}{s^2} = 3\,rad\,s^{-2}$$

$\hookrightarrow$ accelerazione media, perchè ω non cresce in modo lineare

$\Rightarrow \bar{\tau} = I\bar{\alpha}$
$= 11{,}8$ N.m

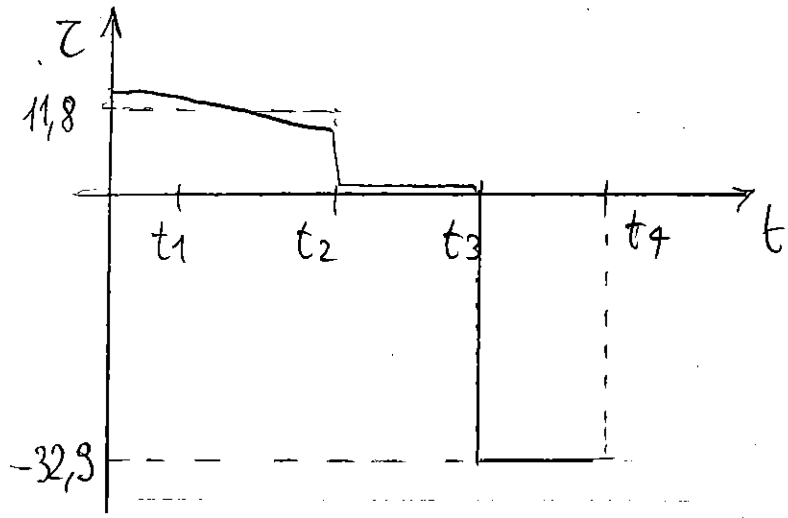
Tra t_3 e t_4 $\quad \Delta\omega = (0-25)\,\frac{rad}{s} = -25\,\frac{rad}{s}$

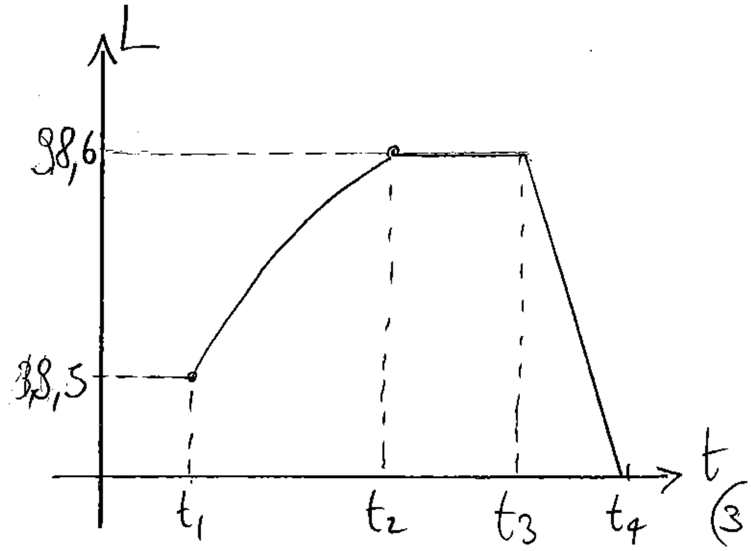
$$\Rightarrow \alpha = \frac{-25}{3}\,\frac{rad}{s^2} = -8{,}33\,\frac{rad}{s}$$

$$\Rightarrow \tau = -32{,}9 \text{ N.m}$$

g) Il momento angolare $L = I\omega$

$L_1 = I\omega_1 = 39{,}5\ Kg\,m^2/s$; $L_2 = L_3 = I\omega_2 = 98{,}6\ Kg\,m^2/s$, $L_4 = 0$





ESERCIZIO 2

a) La spinta di Archimede è la forza che un corpo immerso in un fluido riceve dal basso verso l'alto, ed è uguale (in modulo) alla forza peso del liquido spostato (in questo caso acqua)

Il blocco di legno ha un volume $V = \frac{m}{\rho} = 6{,}71 \cdot 10^{-3}\ m^3$

Siccome è immerso per metà, il volume del liquido che sposta è $V_s = 0{,}5 \cdot V = 3{,}35 \cdot 10^{-3}\ m^3$, quindi la massa di acqua che sposta è

$$m_s = \rho_{ACQUA} \cdot V_s = 1000\ kg/m^3 \cdot 3{,}35 \cdot 10^{-3}\ m^3 = 3{,}35\ kg$$

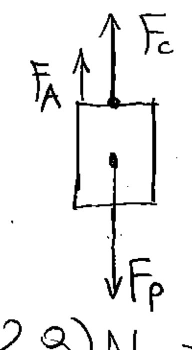
a cui corrisponde una forza peso (e quindi una spinta di Archimede) $F_A = m_s \cdot g = 32{,}9\ N$

($g = 9{,}81\ m/s^2$ è l'accelerazione di gravità).

b) Il blocco di legno è fermo, quindi la risultante delle forze che agiscono su di lei è nulla.

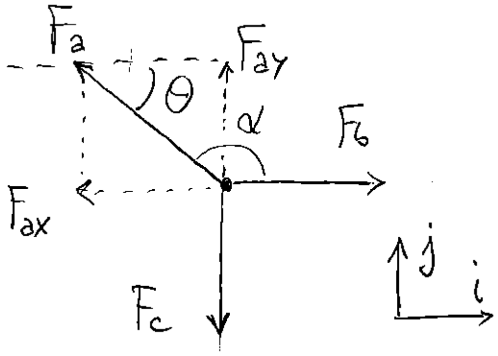
Quali forze agiscono sul blocco di legno:

- forza peso $\vec{F}_P = mg(-\hat{j}) = -55{,}3\,\hat{j}\ N$
- forza Archimede $\vec{F}_A = 32{,}9\,\hat{j}\ N$
- forza fune C: $\vec{F}_c = F_c \cdot \hat{j}$



4) $\vec{F}_P + \vec{F}_A + \vec{F}_c = 0 \Rightarrow F_c = (55{,}3 - 32{,}9)\ N = 22{,}4\ N$

Anche il nodo centrale che unisce le funi è fermo, quindi la somma delle forze che le 3 funi esercitano sul nodo è nulla:



$$\vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c = 0$$

Attenzione: sul nodo la fune c esercita una forza verso il basso:

$$\vec{F}_c = -F_c\,\hat{j} = -22{,}4\,\hat{j}\ \text{N}$$

$$\vec{F}_b = F_b \cdot \hat{i}$$

Scomponiamo F_a nelle componenti orizzontale (F_{ax}) e verticale (F_{ay}): $\vec{F}_a = F_{ax}\,\hat{i} + F_{ay}\,\hat{j}$

La risultante nulla è quindi composta così:

$$(F_{ax}\,\hat{i} + F_{ay}\,\hat{j}) + F_B \cdot \hat{i} + (-F_c\,\hat{j}) = (F_{ax} + F_b)\,\hat{i} + (F_{ay} - F_c)\,\hat{j}$$

Deve valere il sistema: $\begin{cases} F_{ax} + F_b = 0 \\ F_{ay} - F_c = 0 \end{cases}$

Dalla seconda equazione ricaviamo $F_{ay} = F_c = 22{,}4\ \text{N}$

da cui possiamo ricavare la tensione F_a della corda a:

$$F_{ay} = F_a \operatorname{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad F_a = \frac{F_{ay}}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{22{,}4\ \text{N}}{0{,}707} = 31{,}7\ \text{N}$$

e anche F_{ax} poiché $|F_{ax}| = F_a \cos\theta = \dfrac{F_{ay}}{\tan\theta} = F_{ay} = 22{,}4\ \text{N}$

$\Rightarrow F_{ax} = -22{,}4\ \text{N}$ (si vede dal disegno che F_{ax} è negativo)

Dalla prima equazione ricaviamo $F_b = -F_{ax} = 22{,}4\ \text{N}$

c) Se la fune c si rompe, il blocco di legno galleggia grazie alla nuova spinta di Archimede, che ora deve essere uguale (e contraria) alla forza peso: $\vec{F}_A' = -\vec{F}_p = 55,3\ \hat{j}\ N \Rightarrow F_A' = 55,3\ N$

Ora il volume di acqua spostato V_s' deve essere tale che $\rho_{ACQUA} \cdot V_s' \cdot g = F_A' \Rightarrow V_s' = \frac{F_A'}{\rho_{ACQUA} \cdot g} = 5,64 \cdot 10^{-3}\ m^3$

ed è proprio il volume della parte di legno immersa nell'acqua. Il volume che emerge è $V_E = V - V_s' = (6,71 - 5,64) \cdot 10^{-3}\ m^3 = 1,07 \cdot 10^{-3}\ m^3$

La frazione di volume di legno sopra il livello dell'acqua è $\frac{V_E}{V} = 0,16 = 16\%$

d) Da quando si è rotta la fune, il legno è affondato. Di quanto? Quanta acqua in più ha spostato? In volume: $V_s' - V_s = 2,28 \cdot 10^{-3}\ m^3$.

Siccome l'acqua era all'orlo del recipiente, devono essere usciti $2,28 \cdot 10^{-3}\ m^3$ di acqua (almeno).

6)

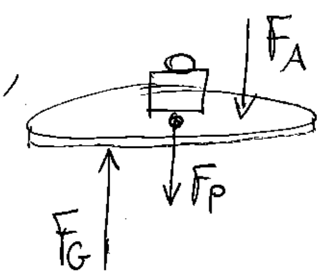
ESERCIZIO 3

Cerchiamo innanzitutto di capire cosa succede. Il gas è a pressione atmosferica, cioè alla stessa pressione dell'ambiente esterno. Quindi la forza che esercita verso l'alto è uguale a quella che l'atmosfera esterna esercita sullo stantuffo verso il basso. In più c'è la forza peso dello stantuffo e del corpo appoggiato sopra, e quindi lo stantuffo è appoggiato in fondo al pistone.

Da questo stato iniziale, di cui sappiamo tutto (P_1, V_1, T_1) il gas è riscaldato per mezzo della fiamma. Quindi la temperatura e la pressione del gas aumentano, mentre il volume resta costante, perchè il gas non ce la fa ad alzare lo stantuffo, almeno fino a quando la pressione non è sufficientemente alta.

Quanto deve valere la pressione P_G del gas affinchè stantuffo si alzi? Deve essere tale da vincere la pressione esterna (atmosferica) e la forza peso dello stantuffo + corpo appoggiato:

$\vec{F}_A + \vec{F}_P + \vec{F}_G = 0$ ossia, con i moduli,



$F_G = F_A + F_P$ dove

$F_G = P_G \cdot A$ = forza del gas (interno)

$F_A = P_{atm} \cdot A$ = forza della pressione atmosferica (esterna)

$F_P = (m_1 + m_2) g$ = forza peso di stantuffo + corpo appoggiato

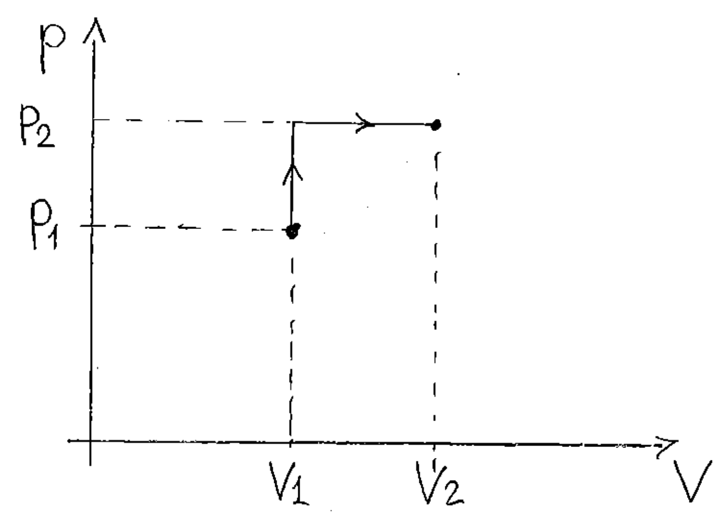
$$P_G \cdot A = P_{atm} \cdot A + (m_1 + m_2) g \Rightarrow \begin{cases} P_G = P_{atm} + \dfrac{(m_1+m_2)g}{A} \\ \quad = 101{,}3 + 1{,}27 = 102{,}6 \text{ kPa} \end{cases}$$

Questa è la pressione (costante) del gas in tutti gli stati nei quali lo stantuffo è sollevato, e quindi è anche uguale alla pressione $P_2 = 102{,}6$ kPa

Pertanto, il gas subisce prima una trasformazione a volume costante (ISOCORA) in cui la pressione aumenta da P_1 a P_G. In questa fase il gas non compie lavoro ($\Delta V = 0$).

A questo punto lo stantuffo inizia ad alzarsi ed il gas subisce una trasformazione a P_G pressione costante (ISOBARA), mentre il volume aumenta di $\Delta V = A \cdot h = 7{,}01 \cdot 10^{-3}\, m^3$ e quindi il gas compie lavoro

Questo è il diagramma P-V della trasformazione: (richiesto al punto g)



8)

Ovviamente, il volume finale del gas è

$$V_2 = V_1 + \Delta V = 99{,}0 \cdot 10^{-3}\ m^3$$

c) La temperatura finale del gas si ricava dalla equazione di stato: $P_2 V_2 = nRT_2 \Rightarrow T_2 = \frac{P_2 V_2}{nR}$

Il valore di nR lo possiamo ricavare dalla stessa equazione di stato valutata allo stato iniziale:

$$P_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow nR = \frac{P_1 V_1}{T_1} = 30{,}8\ J/K$$

e quindi $T_2 = 330\,K$ (NOTA: il numero di moli n non cambia durante la trasformazione)

d) Il lavoro compiuto dal gas è

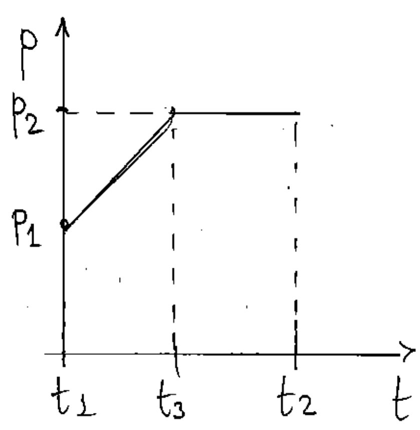
$$W = P_2 \cdot \Delta V = 719\ J$$

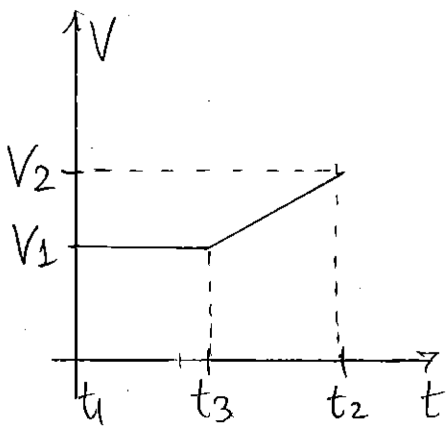
e) L'energia interna di un gas monoatomico vale $E = \frac{3}{2} nRT$, dipende cioè solo dalla temperatura.

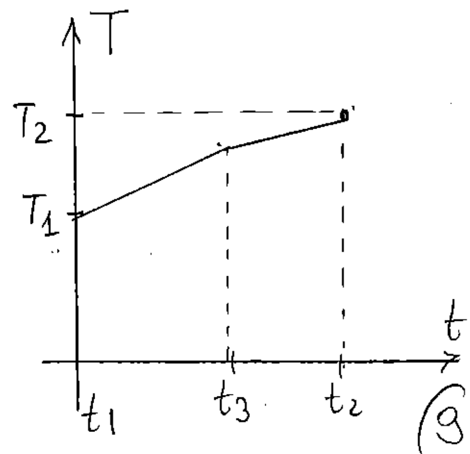
La sua variazione è $\Delta E = \frac{3}{2} nR \Delta T = 1250\ J$

poiché $\Delta T = T_2 - T_1 = 27\,K$

f) Dal primo principio della termodinamica $\Delta E = Q - W$ ricaviamo $Q = \Delta E + W = 1970\ J$







ESERCIZIO 4

a) $C_1 = \varepsilon_r \frac{A_1}{d_1} = 55,3\,\mu F$ in quanto $\varepsilon = \varepsilon_R \cdot \varepsilon_0$

b) La capacità equivalente (vista dal generatore) è data dalla serie dei condensatori:

$$C_E = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1,555\,\mu F$$

c) La carica elettrica erogata dal generatore vale $Q = C_E \cdot V$ ed è anche la carica di ciascun condensatore: $Q = C_1 \cdot V_1 = C_2 \cdot V_2$. Quindi

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{C_E \cdot V}{C_1} = 0,90\,V \quad ; \quad V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{C_E \cdot V}{C_2} = 31,1\,V$$

e giustamente vale $V_1 + V_2 = V$.

d) Il campo elettrico all'interno di un condensatore a facce piane e parallele è circa costante, e vale

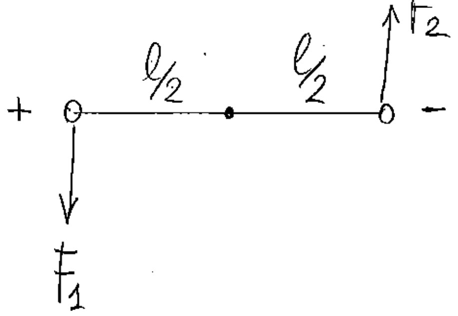
$E_2 = \frac{V_2}{d_2} = 4,78 \cdot 10^5\, V/m$ ed è diretto verso il basso.

perchè la lastra superiore ha carica positiva, quella sotto negativa.

e) Questo campo elettrico esercita una forza

$F = q E_2 = 2,63\,N$ su ciascuna carica. La forza sulla carica positiva è diretta verso il basso, quella sulla carica negativa verso l'alto.

f) Il momento torcente di queste forze rispetto all'asse di rotazione dell'asta è



$\tau_1 = F_1 \cdot \frac{l}{2}$ per ciascuna forza,

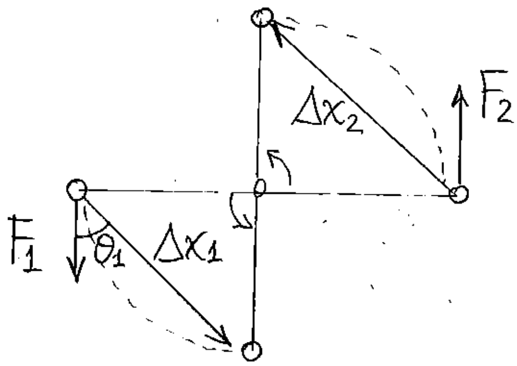
poichè il braccio di ciascuna forza è pari a metà della lunghezza dell'asta, ed entrambe le forze tendono a far ruotare l'asta in senso positivo (antiorario).

Quindi il momento torcente totale è la somma dei due momenti e vale $\tau = F \cdot l = 1{,}32 \cdot 10^{-4}$ N·m.

Questo momento torcente fa ruotare l'asta.

g) Il campo elettrico compie lavoro meccanico sulle cariche durante la rotazione dell'asta.

Dopo una rotazione di 90° il vettore spostamento della carica positiva è $\Delta\vec{x}_1$.



Il lavoro del campo elettrico su questa carica è

$W_1 = \vec{F_1} \cdot \vec{\Delta x_1} = F_1 \cdot |\Delta x_1| \cdot \cos\theta_1 = F_1 \cdot \frac{l}{2}$. Analogamente

$W_2 = \vec{F_2} \cdot \Delta\vec{x}_2 = F_2 \cdot \Delta x_2 \cdot \cos\theta_2 = F_1 \cdot l/2$

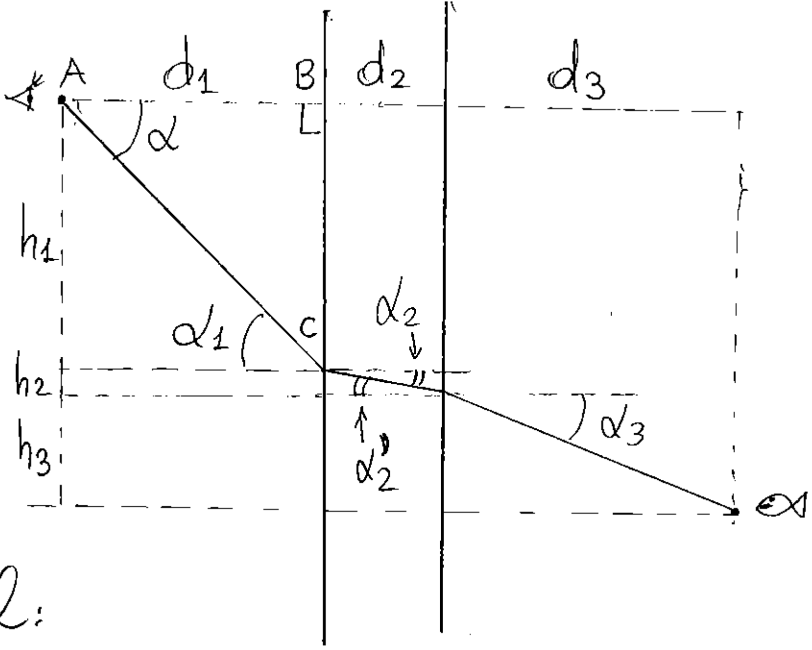
$\Rightarrow W = W_1 + W_2 = F \cdot l = 1{,}32 \cdot 10^{-4}$ J

Questo lavoro fa variare l'energia cinetica dell'asta:

$W = \Delta K = K_f - K_i = K_f = \frac{1}{2} I \omega^2$ ($K_i = 0$ perchè l'asta è inizialmente ferma)

$I = \frac{1}{12} m l^2 = 2{,}71 \cdot 10^{-17}$ kg m² $\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2W}{I}} = 3{,}12 \cdot 10^{6}$ rad/s

ESERCIZIO 5



Il raggio di luce che parte dal pesce e colpisce l'occhio subisce una doppia rifrazione.

Per la legge di Snell:

$$\begin{cases} n_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = n_2 \operatorname{sen} \alpha_2 \\ n_2 \operatorname{sen} \alpha_2' = n_3 \operatorname{sen} \alpha_3 \end{cases}$$

Dalla figura si dimostra facilmente che $\begin{cases} \alpha = \alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_2' \end{cases}$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha_2 = \frac{n_1 \operatorname{sen} \alpha}{n_2} = 0{,}404 \quad \Rightarrow \alpha_2 = 0{,}4167 \text{ rad} = 23{,}8^\circ$$

$$\operatorname{sen} \alpha_3 = \frac{n_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{n_3} = 0{,}483 \quad \Rightarrow \alpha_3 = 0{,}5044 \text{ rad} = 28{,}9^\circ$$

c) Consideriamo il triangolo rettangolo ABC. Dalla trigonometria sappiamo che

$$d_1 = AB = AC \cos\alpha$$
$$h_1 = BC = AC \operatorname{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow AC = \frac{AB}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad h_1 = BC = \frac{AB}{\cos\alpha} \operatorname{sen}\alpha = AB \tan\alpha = d_1 \tan\alpha = 0{,}546 \text{ m}$$

Analogamente $h_2 = d_2 \tan \alpha_2 = 0{,}024 \text{ m}$

$h_3 = d_3 \tan \alpha_3 = 0{,}512 \text{ m}$

Infine $h = h_1 + h_2 + h_3 = 1{,}083 \text{ m}$