SOLUZIONE COMPITO SCRITTO 12/2/2019

ESERCIZIO 1

a) La massa del cilindro minore è

$m_2 = \rho V_2 = 36,0 \ Kg$ ove

$V_2 = \pi r_2^2 h_2 = 4,68 \cdot 10^{-3} \ m^3$ è il suo volume

b) Il momento di inerzia I del corpo rigido è la somma dei momenti di inerzia dei due cilindri:

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 = 0,407 \ Kg \cdot m^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 = 0,433 \ Kg \cdot m^2$$

$$I = I_1 + I_2 = 0,840 \ Kg \cdot m^2$$

c) Questa domanda non è chiara: si può prestare a due diverse interpretazioni:

1) situazione statica $(\omega = 0, \alpha = 0)$

2) situazione dinamica $(\omega \neq 0, \alpha \neq 0)$

Ho considerato corrette entrambe le interpretazioni.

1) Nella situazione statica, le tensioni dei fili sono uguali alle forze peso dei corpi A e B.
I momenti torcenti sono dati dal prodotto braccio × forza, con segno positivo se

tale forza tende a far ruotare il corpo in senso antiorario, negativo nel caso contrario.
I moduli delle forze sono:

$F_A = m_A g = 8{,}53\,N$

$F_B = m_B g = 18{,}15\,N$

I bracci sono: $r_A = r_1$, $r_B = r_2$

I momenti sono

$\tau_A = + r_1 F_A = 3{,}98\ N\cdot m$

$\tau_B = - r_2 F_B = -2{,}81\ N\cdot m$

2) La situazione dinamica si risolve tenendo conto delle accelerazioni dei corpi A e B e dell'accelerazione angolare del corpo rigido:

d)

- indichiamo con T_A e T_B le tensioni dei fili collegati ad m_A e m_B.
- orientiamo l'asse y verticale verso l'alto, in modo che velocità, accelerazioni e forze sono positive se rivolte verso l'alto.

Sul corpo A agiscono: - la forza peso F_A
- la tensione del filo T_A

$m_A \vec{a}_A = \vec{F}_A + \vec{T}_A$ componente y: $m_A a_A = - m_A g + T_A$

Idem per il corpo B:

$m_B \vec{a}_B = \vec{F}_B + \vec{T}_B$ componente y: $m_B a_B = - m_B g + T_B$

2)

Le tensioni dei fili generano momenti torcenti sul corpo rigido, che quindi è soggetto ad una accelerazione angolare α tale che

$I\alpha = \tau$ con $\tau = \tau_A + \tau_B = r_1 T_A - r_2 T_B$

(faccio notare che $\tau_B = -r_2 T_B$ è negativo)

Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} m_A a_A = -m_A g + T_A \\ m_B a_B = -m_B g + T_B \\ I\alpha = r_1 T_A - r_2 T_B \end{cases}$$

in cui sono incognite $a_A, a_B, \alpha, T_A, T_B$

Abbiamo bisogno di altre 2 equazioni per risolvere il sistema. Le troviamo osservando che le accelerazioni a_A e a_B dipendono dall'accelerazione angolare α. Infatti, se il corpo rigido ruota di un angolo $\Delta\theta$, il corpo A subisce uno spostamento $\Delta y_A = -r_1 \Delta\theta$

(se $\Delta\theta > 0$ il corpo A si abbassa: $\Delta y_A < 0$)

mentre il corpo B si sposta di $\Delta y_B = r_2 \Delta\theta$.

Dividendo per l'intervallo di tempo Δt troviamo la relazione tra le velocità dei corpi v_A, v_B e la velocità angolare ω del corpo rigido:

$$\begin{cases} v_A = -r_1 \omega \\ v_B = r_2 \omega \end{cases}$$

e quindi la relazione tra le accelerazioni:

$$\begin{cases} a_A = -r_1 \alpha \\ a_B = r_2 \alpha \end{cases}$$

È facile a questo punto risolvere il sistema:

ricaviamo $T_A = m_A(a_A + g) = m_A(-r_1\alpha + g)$

$T_B = m_B(a_B + g) = m_B(r_2\alpha + g)$

e sostituiamo nella terza equazione

$$I\alpha = r_1 m_A(-r_1\alpha + g) - r_2 m_B(r_2\alpha + g)$$

$$= -m_A r_1^2\alpha + m_A r_1 g - m_B r_2^2\alpha - m_B r_2 g$$

Raccogliamo l'incognita α (che ora è l'unica) a sinistra:

$$\alpha(I + m_A r_1^2 + m_B r_2^2) = g(m_A r_1 - m_B r_2)$$

$$\Rightarrow \alpha = g\frac{(m_A r_1 - m_B r_2)}{I + m_A r_1^2 + m_B r_2^2} = 1{,}08 \quad rad/s^2$$

indipendente dal tempo $\Rightarrow$ moto uniformemente accelerato.
Da questo valore di α possiamo calcolare la tensione dei fili T_A, T_B ed i momenti torcenti nella situazione dinamica:

$$\tau_A = r_1 T_A = r_1 m_A(-r_1\alpha + g) = 3{,}77 \ N\cdot m$$

$$\tau_B = -r_2 T_B = -r_2 m_B(r_2\alpha + g) = -2{,}86 \ N\cdot m$$

e) Il calcolo dell'energia si può svolgere usando la conservazione dell'energia meccanica, poiché la forza di gravità è conservativa e non ci sono attriti né altre forze non conservative.

Nell'istante iniziale il sistema è fermo, quindi l'energia cinetica è nulla. Per il calcolo della energia potenziale basta considerare le masse A e B, dato che il centro di massa del corpo rigido non si sposta. Se scegliamo $y=0$ nella posizione iniziale del corpo B abbiamo $y_A = \Delta y = 1,50\,m$; $y_B = 0$

$$K_1 = 0 \qquad U_1 = m_A g y_A + m_B g y_B = m_A g \Delta y = 12,8\,J$$

$$\Rightarrow E = K_1 + U_1 = 12,8\,J \quad \text{sempre (si conserva)}$$

Nell'istante finale i due corpi sono allo stesso livello, cioè $y_A = y_B$. Dobbiamo calcolare gli spostamenti. Per il ragionamento di prima al punto d) pag 3

$$\begin{aligned} \Delta y_A &= -r_1 \Delta\theta \\ \Delta y_B &= r_2 \Delta\theta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y_A}{\Delta y_B} = -\frac{r_1}{r_2}$$

cioè gli spostamenti sono in proporzione ai raggi dei cilindri. Inoltre $|\Delta y_A| + |\Delta y_B| = \Delta y_B - \Delta y_A = \Delta y$

(l'abbassamento di A più l'innalzamento di B deve essere uguale a Δy).

$$\Delta y_B - \Delta y_A = [y_B(t_2) - y_B(t_1)] - [y_A(t_2) - y_A(t_1)] = y_A(t_1) - y_B(t_1) + \cancel{y_B(t_2) - y_A(t_2)} = \Delta y$$

Quindi $\Delta y_B = \Delta y + \Delta y_A$ e

$$\frac{\Delta y_A}{\Delta y + \Delta y_A} = -\frac{r_1}{r_2} \quad \Rightarrow r_2 \Delta y_A = -r_1(\Delta y + \Delta y_A) \quad \Rightarrow \Delta y_A = -\frac{r_1 \Delta y}{r_1 + r_2}$$

$\Rightarrow \Delta y_A = -1{,}13 \ m$

$\Delta y_B = 0{,}37 \ m$

$\Rightarrow y_A(t_2) = y_B(t_2) = 0{,}37 \ m$

L'energia potenziale al tempo t_2 è

$U_2 = m_A g y_A + m_B g y_B = (m_A + m_B) g \, y_A(t_2) =$

Ricaviamo l'energia cinetica K_2 dalla formula

$E = K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

$\Rightarrow K_2 = E - U_2 = U_1 - U_2 = 2{,}81 \ J$

f) Abbiamo visto che il moto dei corpi è uniformemente accelerato (rettilineo per A e B, circolare per il corpo rigido). Consideriamo per esempio il corpo B.

All'istante iniziale $t_1 = 0$ si ha: $y_B = 0 \quad v_B = 0$

All'istante finale $t_2 = t$ si ha: $y_B = 0{,}37 m$

L'accelerazione costante vale $a_B = r_2 \alpha = 0{,}168 \ m/s^2$

Dall'equazione del moto accelerato

$$y_B(t) = y_B(0) + v_B(0) \, t + \frac{1}{2} a_B t^2 = \frac{1}{2} a_B t^2$$

segue $t = \sqrt{\dfrac{2 y_B(t)}{a_B}} = 2{,}11 \ s$

ESERCIZIO 2

a) Trattandosi di un fluido ideale incomprimibile che scorre in un tubo, nell'ipotesi di flusso laminare possiamo applicare l'equazione di Bernoulli tra i punti 1 e 2:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

e l'equazione di continuità

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad \text{con } A_1 = \pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = 1{,}47\cdot 10^{-2}\,m^2;\ A_2 = 4{,}54\cdot 10^{-3}\,m^2$$

Siccome il tubo è orizzontale $h_1 = h_2$ e quindi possiamo eliminare i termini $\rho g h$ dall'equazione di Bernoulli.

Restiamo con 2 equazioni in 2 incognite: v_1 e v_2.

Dall'equazione di continuità ricaviamo

$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}$ che, sostituita in Bernoulli dà

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]v_1^2$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]}} = 2{,}29\ m/s$$

$$v_2 = 7{,}43\ m/s$$

b) La portata volumetrica è, in ogni punto

$$Q = A \cdot v = A_1 v_1 = 3{,}37 \cdot 10^{-2}\ m^3/s$$

c) Una pompa posta all'inizio del tubo produce la pressione P_1 su un'area A_1, quindi esercita una forza $F_1 = P_1 \cdot A_1 = 1280\ N$

In un tempo Δt questa forza sposta il fluido di una distanza $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$

Quindi la potenza sviluppata dalla pompa è

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F_1 \cdot \Delta x_1}{\Delta t} = F_1 \cdot v_1 = P_1 \cdot A_1 \cdot v_1 = P \cdot Q = 2330\ W.$$

d) La potenza elettrica è data da

$$P = V \cdot I \qquad \Rightarrow I_{eff} = \frac{P}{V_{eff}} = 12{,}8\ A$$

ESERCIZIO 3

a) Dall'equazione di stato dei gas perfetti

$PV = nRT$ ricaviamo $P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 1{,}06 \cdot 10^5$ Pa

b) In una trasformazione a pressione costante (isobara) il lavoro compiuto dal gas vale

$W_{AB} = P \cdot \Delta V$ ove $\Delta V = V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{P} = 5{,}33 \cdot 10^{-3} m^3$

$\Rightarrow V_B = V_A + \Delta V = 97{,}3 \cdot 10^{-3} m^3$

c) In una trasformazione isobara

$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \Rightarrow T_B = T_A \frac{V_B}{V_A} = 331$ K

d) Per un gas biatomico (come quelli considerati in tutti i problemi di questo compito)

$\Delta E_{AB} = \frac{5}{2} nR\Delta T = 1412$ J $\quad (\Delta T = T_B - T_A = 18 K)$

e) Dal primo principio della termodinamica

$\Delta E_{AB} = Q - W \Rightarrow Q_{AB} = \Delta E_{AB} + W_{AB} = 1977$ J

f) La trasformazione $B \to C$ è isocora (a volume costante) quindi il gas non compie lavoro: $W_{BC} = 0$

$\Rightarrow Q_{BC} = \Delta E_{BC} = -2500$ J

g)

8) L'energia interna è una funzione di stato:

$$\Delta E_{AC} = E_C - E_A = (E_C - E_B) + (E_B - E_A) = \Delta E_{BC} + \Delta E_{AB}$$

$$= -1088\,J$$

Questo non è vero per il lavoro né per il calore:

$$W_{AC} \neq W_{AB} + W_{BC} \qquad Q_{AC} \neq Q_{AB} + Q_{BC}$$

È però possibile calcolare il lavoro nella trasformazione $A \to C$ ricordando che esso è dato dall'area al di sotto della linea AC, ossia dall'area del trapezio rettangolo che ha per

base maggiore P_A

base minore P_B

altezza $V_B - V_A = \Delta V$

$$\Rightarrow W_{AC} = \frac{(P_A + P_B) \cdot \Delta V}{2} = 538\,J$$

$$\Rightarrow Q_{AC} = \Delta E_{AC} + W_{AC} = -550\,J$$

ESERCIZIO 4

a) Il solenoide è costituito da un filo avvolto attorno ad un cilindro vuoto, ed ha una certa resistenza R_S.
Il solenoide e la resistenza R_1 sono collegati in serie, infatti sono attraversati dalla stessa corrente elettrica i.
Quindi la resistenza totale del circuito è

$R_{TOT} = R_1 + R_S$ e deve valere

$V = R_{TOT}\, i \Rightarrow R_{TOT} = \frac{V}{i} = 197\ \Omega$

$\Rightarrow R_S = R_{TOT} - R_1 = 77\ \Omega$

b) La lunghezza di una spira (circolare) è

$l_{SPIRA} = 2\pi r = 0{,}176\ m$

La lunghezza del filo avvolto sul solenoide è

$l = N \cdot l_{SPIRA} = 2\pi r N = 158\ m$

c) Indicando con A l'area della sezione del filo, dalla formula $R_S = \rho \frac{l}{A}$ si ricava

$A = \frac{\rho l}{R_S} = 3{,}50 \cdot 10^{-8}\ m^2$

Il filo è a sezione quadrata 

quindi lo spessore s è tale che $A = s^2 \Rightarrow s = \sqrt{A} = 1{,}87 \cdot 10^{-4}\ m$

d) $B = \mu_0 \dfrac{iN}{l} = 2{,}07\ T$

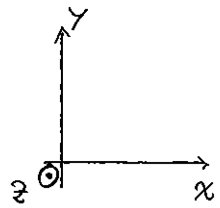
e) Il modulo della forza magnetica su una carica in movimento è $F = |q v B \,\mathrm{sen}\,\theta|$ ove θ è l'angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{B}$ che in questo caso vale $\theta = 90°$ $\Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta = 1$

$\Rightarrow F = |qvB| = 2{,}13 \cdot 10^{-16}\ N$

Se la carica fosse positiva, dalla regola della mano destra si troverebbe che la forza è diretta perpendicolarmente al piano del foglio con verso entrante.
Essendo la carica negativa, il verso è opposto $\Rightarrow$ uscente.

f) Come indicato, supponiamo che il moto della carica sia circa rettilineo. La forza magnetica è sempre ortogonale alla velocità, quindi il modulo della velocità non cambia. La distanza percorsa nel solenoide è pari al diametro del solenoide: $d = 2r = 56\ mm \Rightarrow t = \dfrac{d}{v} = 8{,}48 \cdot 10^{-8}\ s$

g) La quantità di moto iniziale dell'elettrone è



$P_x = mv = 6{,}01 \cdot 10^{-25}\ Kg \cdot m/s$

$P_y = P_z = 0$

La forza magnetica diretta lungo z, nel tempo t fornisce all'elettrone la quantità di moto $\Delta P_z = F_z \cdot t = 1{,}86 \cdot 10^{-23}\ Kg \dfrac{m}{s}$

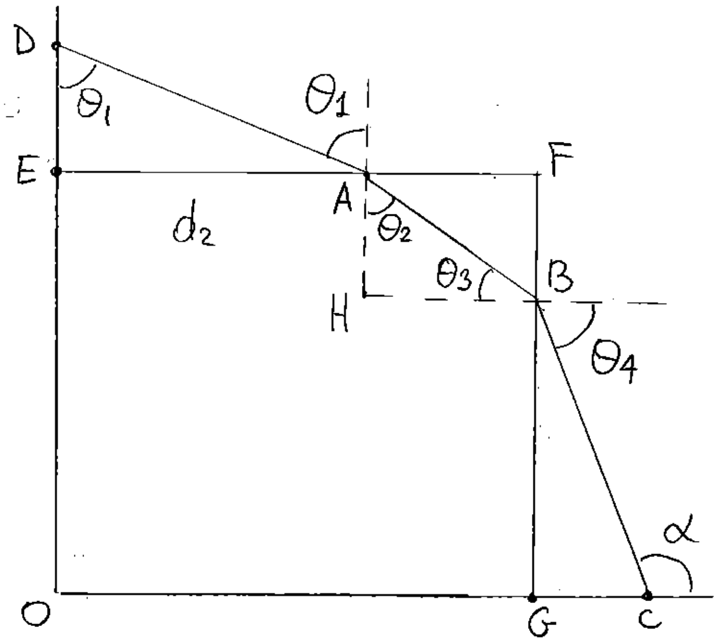
La quantità di moto finale è $P'_x = P_x$, $P'_y = 0$, $P'_z = \Delta P_z$

L'angolo di deflessione α è tale che $\tan\alpha = \dfrac{P'_z}{P'_x} \Rightarrow \alpha = 88°$

Oppure: accelerazione solo lungo z: $a_z = F_z/m$. $v_z = \overset{\to 0}{v_{z0}} + a_z t = a_z t$

$\tan\alpha = \dfrac{v_z}{v_x} = \dfrac{a_z t}{v}$

ESERCIZIO 5



a) $n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{n_1 \operatorname{sen}\theta_1}{n_2}$$

$$\theta_2 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{n_1 \operatorname{sen}\theta_1}{n_2}\right) = 44{,}72°$$

b) In B avviene una seconda rifrazione, il cui angolo di incidenza è θ_3 (angolo tra il raggio incidente AB e la normale alla superficie di separazione FG). Siccome il triangolo ABH è rettangolo, $\theta_3 = 90° - \theta_2 = 45{,}28°$

$$n_2 \operatorname{sen}\theta_3 = n_1 \operatorname{sen}\theta_4 \Rightarrow \theta_4 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{n_2 \operatorname{sen}\theta_3}{n_1}\right) = 66{,}23°$$

Dalla figura è chiaro che l'angolo $\widehat{GCB} = \theta_4$

$$\Rightarrow \alpha = 180° - \theta_4 = 113{,}77°$$

c) $x_A = EA = DE \cdot \tan\theta_1 = 37{,}5 \text{ cm}$ perché $\widehat{EDA} = \theta_1$

$y_A = l = 60 \text{ cm}$

$x_B = l = 60 \text{ cm}$

$y_B = GB = l - FB = 37{,}3 \text{ cm}$

perché $FB = \dfrac{AF}{\tan\theta_2} = \dfrac{l - EA}{\tan\theta_2} = 22{,}7 \text{ cm}$

$x_c = OC = l + GC = 76{,}4 \text{ cm}$

perché $GC = \dfrac{GB}{\tan\theta_4}$; $y_c = 0 \text{ cm}$

d) Il raggio subisce in B la riflessione totale se $\theta_3 > \theta_L$ angolo limite, θ_L è determinato dalla condizione $\theta_4 = 90°$ cioè $\sin\theta_4 = 1$:

$$n_2 \sin\theta_L = n_1 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_L = \frac{n_1}{n_2}$$

$\theta_L = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = 50{,}93°$. Questo sarebbe θ_3 limite.

In questo caso θ_2 limite vale $\theta_{2L} = 90° - \theta_L = 39{,}07°$

Corrispondentemente, l'angolo $\theta_1 = \theta_{1L}$ è dato da

$$n_1 \sin\theta_{1L} = n_2 \sin\theta_{2L}$$

$$\theta_{1L} = \arcsin\left(\frac{n_2 \sin\theta_{2L}}{n_1}\right) = 54{,}26°$$