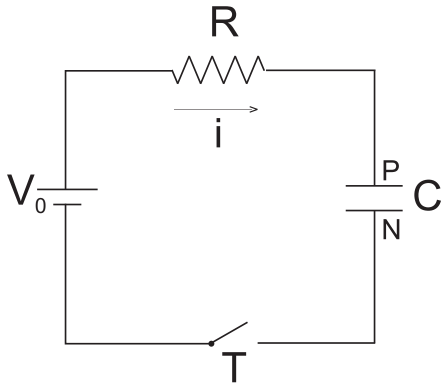
Funzionamento di un circuito RC in risposta ad un gradino di tensione e metodo di misura della sua costante di tempo con un oscilloscopio

Studiamo il comportamento di un circuito RC (mostrato in figura) in risposta ad un gradino di tensione.
Supponiamo che al tempo t=0 il tasto T presente nel circuito venga istantaneamente chiuso e che il condensatore inizialmente sia scarico.
$Q(t = 0) = 0$
Nel circuito comincerà a scorrere corrente che provocherà un accumulo di carica sulle armature del condensatore fino a che, per tempi molto lunghi ($t \to \infty$) la carica deposta sarà tale da generare una differenza di potenziale ai capi del condensatore che si oppone a quella del generatore e cioè:
$Q(t \to \infty) = CV_0$



Per capire cosa succede per tempi intermedi, possiamo scrivere la II legge di Kirchhoff (o legge delle maglie) che dice che la somma algebrica delle differenze di potenziale lungo la maglia è nulla. Chiamando V_R e V_C rispettivamente la differenza di potenziale ai capi della resistenza R e del condensatore C abbiamo:

$V_0 = V_R(t) + V_C(t)$

$V_0 = i(t)R + \frac{Q(t)}{C}$

e dal momento che $i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$, otteniamo la seguente equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$V_0 = \frac{dQ(t)}{dt}R + \frac{Q(t)}{C}$$

la cui soluzione generale si può trovare nella forma

$$Q(t) = Q_{om}(t) + Q_{part}$$

dove Q_{om} e Q_{part} sono rispettivamente la soluzione della equazione differenziale omogenea associata (che si ottiene mettendo il termine costante a zero) e una soluzione particolare.

Cerchiamo quindi per prima cosa la soluzione dell'omogenea associata che è:

$\frac{dQ(t)}{dt}R + \frac{Q(t)}{C} = 0$

questa può essere risolta con semplici passaggi separando le variabili e quindi integrando:

$\int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{1}{Q}dQ = -\int_0^t \frac{1}{RC}dt$

$ln(Q(t)) - ln(Q_0) = -\frac{t}{RC}$

$ln\left(\frac{Q(t)}{Q_0}\right) = -\frac{t}{RC}$

$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ SOLUZIONE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA

Per trovare la soluzione generale, è sufficiente a questo punto trovare una soluzione particolare, per esempio quella che si ha per tempi lunghi quando $dQ(t)/dt = 0$:

$Q(t \to \infty) = CV_0$ SOLUZIONE PARTICOLARE

Sommando la soluzione dell'omogenea associata con la soluzione particolare trovata, abbiamo quindi per la soluzione generale:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} + CV_0$$

A questo punto per determinare la costante Q_0, utilizziamo la condizione iniziale $Q(t = 0) = 0$ da cui si ricava $Q_0 = -CV_0$ e quindi infine:

$Q(t) = CV_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ ANDAMENTO DELLA CARICA DEL CONDENSATORE DOPO LA CHIUSURA DEL TASTO T

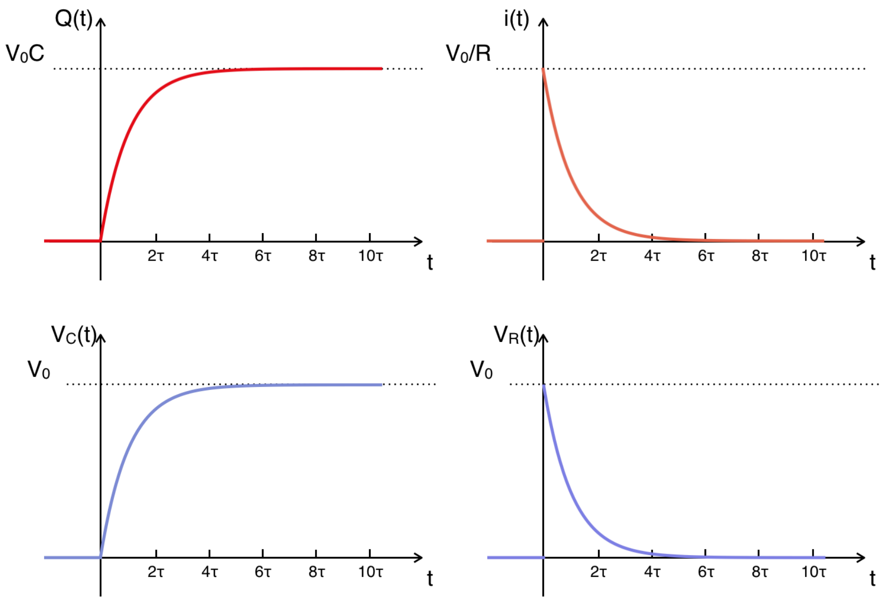
Noto adesso l'andamento della carica possiamo ottenere anche l'andamento della differenza di potenziale ai capi del condensatore V_C, della corrente nel circuito $i(t)$, e della differenza di potenziale ai capi della resistenza $V_R = iR$:

$$V_c(t) = V_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_R = i(t)R = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

In figura riportiamo l'andamento nel tempo di queste grandezze fisiche che caratterizzano il comportamento del circuito.



Se adesso consideriamo di partire al tempo $t=t_0$ da un condensatore carico e di farlo scaricare, il che corrisponde a sostituire (dopo che il condensatore ha raggiunto la sua carica massima

$Q = CV_0$) istantaneamente il generatore del circuito appena studiato con un corto circuito otteniamo, l'equazione della maglia da risolvere sarà:

$$\frac{dQ(t)}{dt}R + \frac{Q(t)}{C} = 0$$

e cioè l'omogenea già risolta che avrà quindi come soluzione

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t-t_0}{RC}}$$

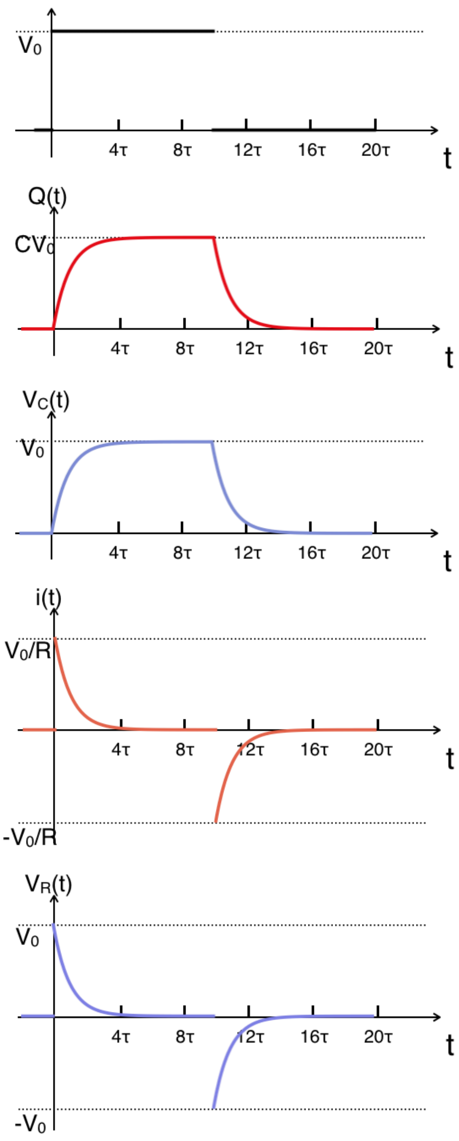
con condizione iniziale al tempo $t = t_0$

$$Q(t = t_0) = CV_0$$

e quindi avremo la soluzione:

$$t > t_0 \qquad\qquad Q(t) = CV_0 e^{-\frac{t-t_0}{RC}}$$

In maniera analoga a quanto fatto prima, potremmo nuovamente calcolare, a partire dalla carica Q, la tensione ai capi del condensatore $V_C(t > t_0)$, la corrente $i(t > t_0)$ e la tensione ai capi della resistenza $V_R(t > t_0)$. Otterremo gli andamenti riportati in figura:



Tutte le grandezze fisiche che caratterizzano il circuito hanno un'andamento esponenziale con costante di tempo $\tau = RC$.

La costante di tempo del circuito RC può essere misurata osservando l'andamento della tensione ai capi del condensatore in funzione del tempo ed utilizzando un metodo che prevede la misura dell'intervallo di tempo T che il segnale impiega per arrivare al 90% del suo valore massimo partendo dal 10% del suo valore massimo.

Se infatti chiamiamo t_1 il tempo al quale la tensione V_C corrisponde al 10% del suo valore massimo, potremo scrivere:

$0.1V_0 = V_0(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}})$

Chiamando t_2 il tempo al quale la tensione V_C corrisponde al 90% del suo valore massimo, avremo invece:

$0.9V_0 = V_0(1 - e^{-\frac{t_2}{RC}})$

Con un po' di semplici passaggi si ottiene quindi:

$0.9 = e^{-\frac{t_1}{RC}}$

$0.1 = e^{-\frac{t_2}{RC}}$

e dividendo membro a membro:

$9 = e^{(t_2 - t_1)/RC} = e^{(T/\tau)}$

dove abbiamo posto

$T = t_2 - t_1$

$\tau = RC$

e quindi passando al logaritmo naturale abbiamo infine:

$$\tau = \frac{T}{ln(9)}$$

Misurando quindi T possiamo in modo semplice ricavare la costante di tempo τ del circuito.