Quanta matematica devo sapere per studiare fisica?

Franco Bagnoli

1. I numeri.

Cosa sono i numeri?

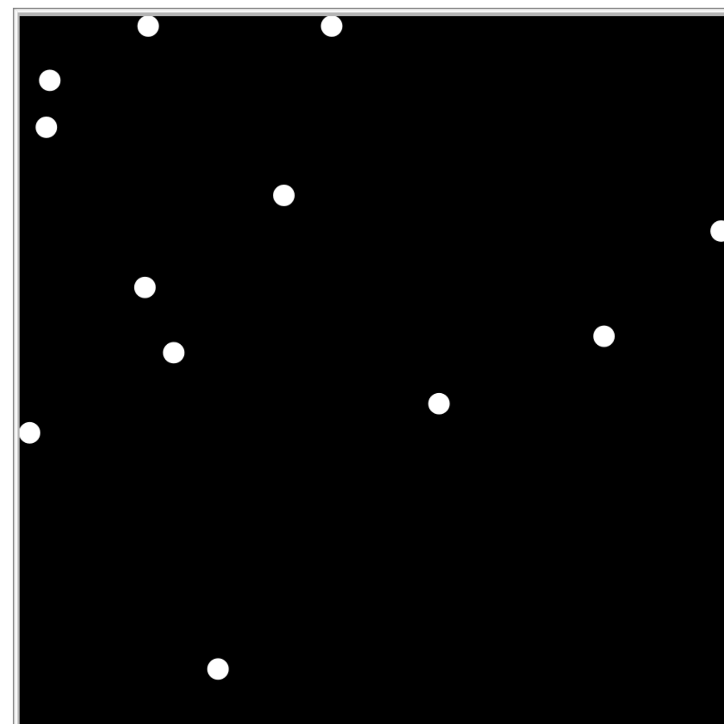
I numeri sono strumenti per risolvere problemi.

Il primo problema è proprio quello di assegnare un numero a un insieme di oggetti

Numeri naturali

I "numeri naturali" sono 1,2,3 e forse 4. Questi sono i numeri che tutti gli umani, tutti i mammiferi, uccelli e qualche insetto (e probabilmente anche i rettili e anfibi) conoscono.

Si può forse aggiungere lo zero, come "mancanza" di numero.



Se non ci credete, provate a valutare quanto è numeroso un insieme di oggetti in 1/100 di secondo.

Algoritmi

Un algoritmo è una procedura (tipicamente iterativa), che se se seguita accuratamente porta al risultato.

L'algoritmo di base è quello di "incrementare di uno" a partire da uno.

$$y = x + 1$$

In questa maniera si possono costruire "tutti" i numeri interi.

Altro problema è dare il nome a questi numeri…

Un altro algoritmo utile è quello di togliere una unità, finché non rimane nulla. Così si "contano" i fagioli.

```
do (y, task) {
  while (y>0) {
    y = y -1
    task
  }
}
```

Somme e moltiplicazioni

È abbastanza facile costruire l'algoritmo per fare le somme tra due numeri: si incrementa di uno un numero e contemporaneamente si diminuisce l'altro di uno, finché il secondo è zero.

$$z = x + y$$

Altrettanto facile è fare le moltiplicazioni, basta sommare lo stesso numero tante volte

$$z = x \cdot y$$

I numeri "naturali" sono chiusi per quanto riguarda la somma e la moltiplicazione.

```
add (x,y)
  do (y, x=x+1)
  return (x)
}
```

```
mul (x,y)
  z = 0
  do (y, z=add(z,x))
  return (z)
}
```

Sottrazioni

```
sub (z,y)
  do (y, z=z-1)
  return (z)
}
```

A questo punto ecco il primo **problema inverso**: se conosco z e y, e

$$z = x + y,$$

quanto vale x?

Non è difficile fare l'algoritmo. Solo che potrebbe succedere che z sia più piccolo di y... Ci sono due alternative: o si interrompe l'algoritmo ("i numeri negativi sono demoniaci") o si definiscono i numeri negativi (e lo zero):

$$-x : x + (-x) = 0$$

In questa maniera abbiamo "chiuso" i numeri rispetto alla sottrazione

Divisioni

```
intdiv (z,y)
  do (y, z=z-x)
  return (z)
}
```

Dato che abbiamo definito la moltiplicazione sorge subito il problema: se conosco z e y, e

$$z = x \cdot y,$$

quanto vale x?

Chiaramente posso trovare facilmente il multiplo di x più vicino a z, ma in generale questo non è uguale a z.

Tocca "allargare" i numeri includendo i razionali, che in rappresentazione decimale sono numeri con una parte dopo la virgola che è o finita o periodica.

$$x = \frac{z}{y}.$$

Potenze

Ripetendo la moltiplicazione,
ottengo l'elevazione a potenza (intera)

$$z = x^y.$$

```
pow (x,y)
  z=1
  do (y, z=z*x)
  return (z)
}
```

Per cominciare, ricordiamo alcune proprietà di base delle potenze:

$$z^w = (x^y)^w = x^{yw},$$

e

$$x^y \cdot x^w = x^{y+w}.$$

Queste regole sono valide anche se gli esponenti sono decimali (o reali), come vedremo tra un attimo.

Radici

Come al solito mi posso domandare se posso fare l'operazione inversa. Dato

$$z = x^y.$$

Come faccio a trovare x?

Questo è un problema simile a quello delle divisioni. In genere non è risolvibile con i razionali.

Tocca "allargare" di nuovo i numeri includendo gli irrazionali, tipo $\mathrm{x} = \sqrt{z}$. In rappresentazione decimale hanno un numero infinito di cifre decimali, non periodiche. Tra gli irrazionali ci sono anche π ed e.

Radici

È facile verificare che posso esprimere l'operazione di radice usando delle potenze frazionarie. Assumendo per ora $x > 0$, abbiamo

$$x = (\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (x^2)^{\frac{1}{2}}$$

che viene dalla stessa regola della moltiplicazione tra esponenti vista prima.

Quindi l'elevazione a potenza generica può prevedere un esponente frazionario e prendendo il limite un esponente reale.

Logaritmi

Un'altra operazione inversa a partire da

$$z = x^y$$

è quella di trovare y dati z e x. Formalmente si definisce

$$y = \log_x(z)$$

dove x è detta base del logaritmo.

Invertendo le regole delle potenze abbiamo

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

e

$$\log(x^y) = y \log(x).$$

Logaritmi

Ovviamente

$$x^{\log_x(z)} = z.$$

Dato che è molto scomodo avere i logaritmi in qualsiasi base, conviene riportare tutti i logaritmi alla stessa base (e o 10) **[OCCHIO]**

Per esempio, dato che $x \equiv e^{\ln(x)}$ dove per convenzione ln indica il logaritmo in base e, abbiamo

$$z = x^y = e^{y\ln(x)}$$

e quindi

$$y = \log_x(z) = \frac{\ln(y)}{\ln(x)}.$$

Angoli

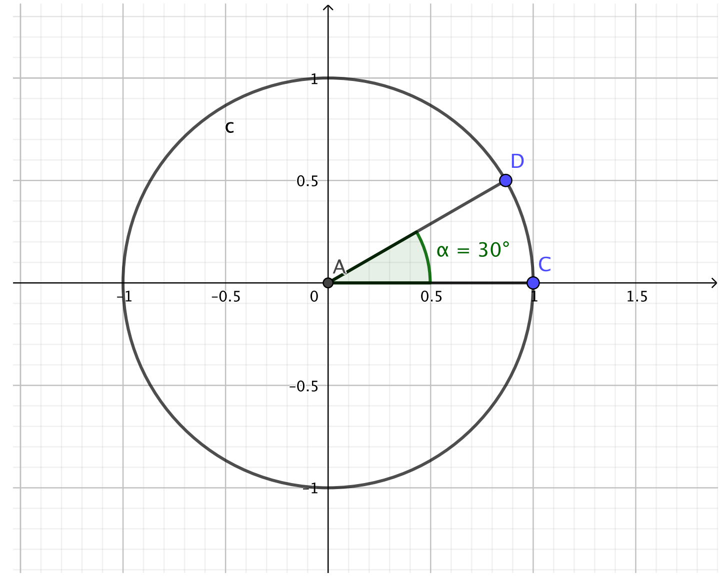
I numeri reali si possono identificare con gli intervalli su un asse. Ma spesso dobbiamo misurare gli angoli sul cerchio.

Tutti noi conosciamo i gradi: l'angolo giro viene diviso in 360°, e angoli notevoli sono 90° (angolo retto) e 180° (angolo piatto).

Ma la suddivisione in 360 gradi è arbitraria (origina dalla lunghezza approssimativa dell'anno, ridotta a 360 perché così ci sono tanti divisori).

Una definizione assoluto dall'angolo è quella che lo misura come un numero reale, prendendo la lunghezza dell'arco sul cerchio unitario (radianti).

Radianti

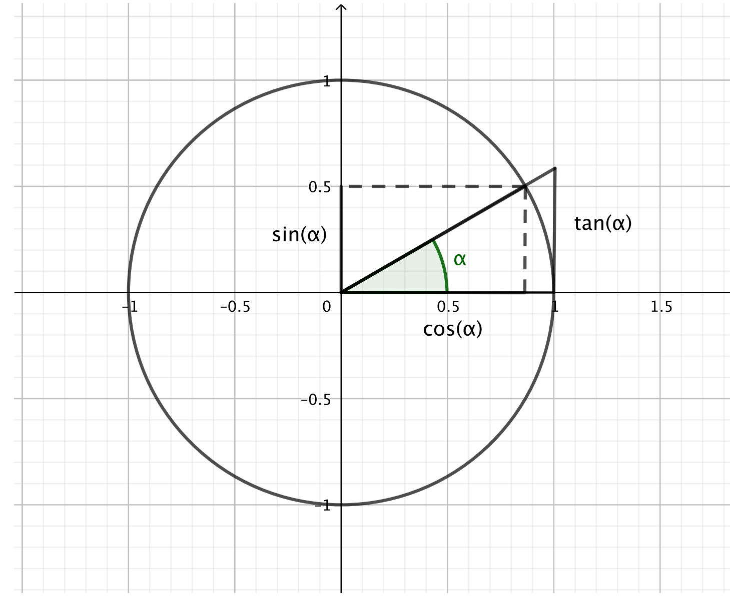


Un angolo in radianti (che vuol dire semplicemente in numeri reali) è dato dalla lunghezza dell'arco (CD in figura) diviso per il raggio del cerchio.

Un angolo di 1 rad è circa 57°. Viceversa un angolo di 180° vale $\pi = 3.1416 \ldots$ rad.

FARE MOLTISSIMA ATTENZIONE QUANDO SI USA LA CALCOLATRICE A CONTROLLARE SE È IMPOSTATA IN GRADI (DEG), RADIANTI (RAD) o GRADI CENTESIMALI (GRAD).

Trigonometria



Cose importanti da ricordare di trigonometria:

- $\sin(\alpha)$ è il rapporto tra il cateto opposto all'angolo e l'ipotenusa
- $\cos(\alpha)$ è il rapporto tra il cateto adiacente all'angolo e l'ipotenusa
- $\tan(\alpha) = \sin(\alpha)\,/\cos(\alpha)$ sè il rapporto tra il cateto opposto e quello adiacente all'angolo.
- Relazione fondamentale (teorema di Pitagora):

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Trigonometria

Relazioni utili:

$$\sin(0) = 0; \quad \cos(0) = 1$$

$$\sin(\pi/2) = 1; \cos(\pi/2) = 0$$

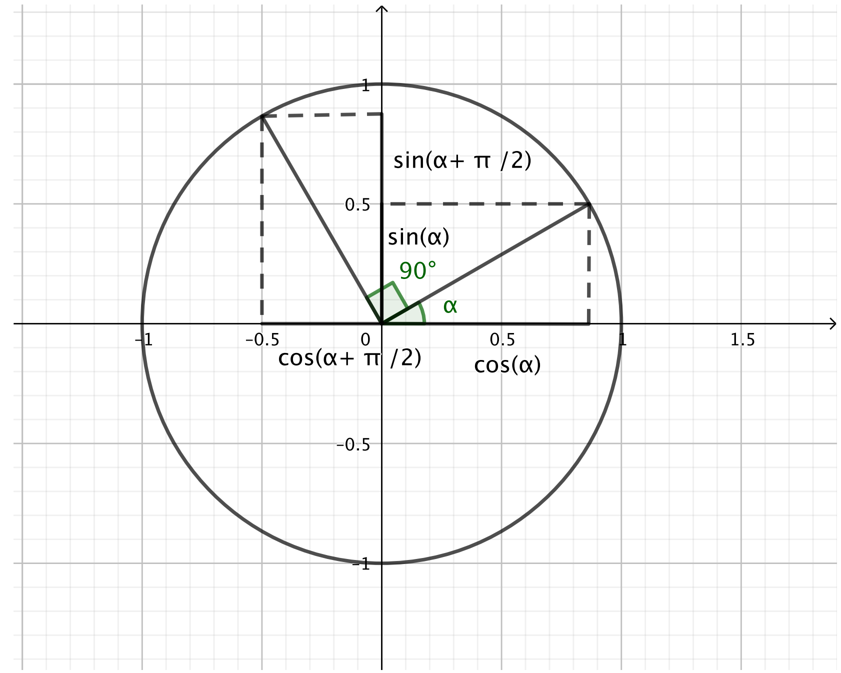
$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha + \pi/2) = -\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha + \pi/2) = \sin(\alpha)$$

(potete verificarle sul cerchio)



Trigonometria

Relazioni utili:

$$\sin(0) = 0; \;\; \cos(0) = 1$$
$$\sin(\pi/2) = 1; \cos(\pi/2) = 0$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$
$$\sin(\alpha + \pi/2) = -\cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha + \pi/2) = \sin(\alpha)$$

(potete verificarle sul cerchio) e

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta)$$

Riguardate queste e altre formule su YouMath e fare esercizio….

Numeri complessi

Abbiamo finito? Beh, no, perché non possiamo fare la radice quadrata di un numero negativo. Ma possiamo estendere un'ultima volta i numeri, includendo quelli complessi. Ovvero definiamo l'unità immaginaria

$$i = \sqrt{-1}$$

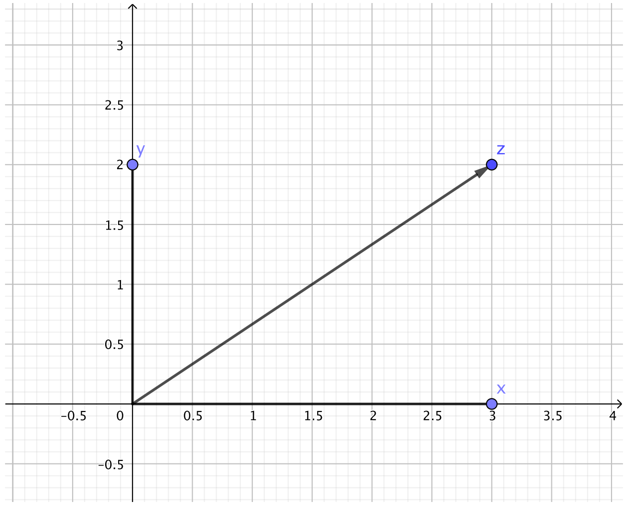
e supponiamo che ogni numero sia rappresentabile con una parte reale, ed una immaginaria

$$z = x + iy$$

Trattando i come se fosse un simbolo (una variabile), tranne che $i^2 = -1$.

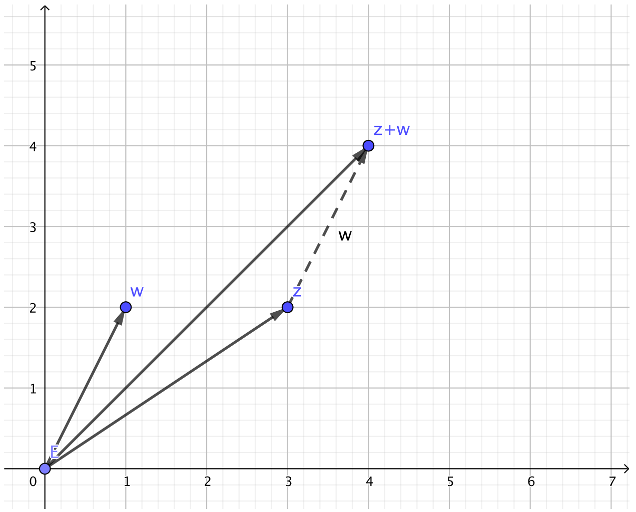
Numeri complessi come punti nel piano

Dato che un numero complesso è dato in realtà da due numeri reali ("complesso" non vuol dire complicato, ma composto), si può vedere un numero $z = x + iy$ come un punto nel piano di coordinate (x, y) o meglio come un vettore.



Due numeri complessi sono uguali se sono uguali le loro parti reali e immaginarie.

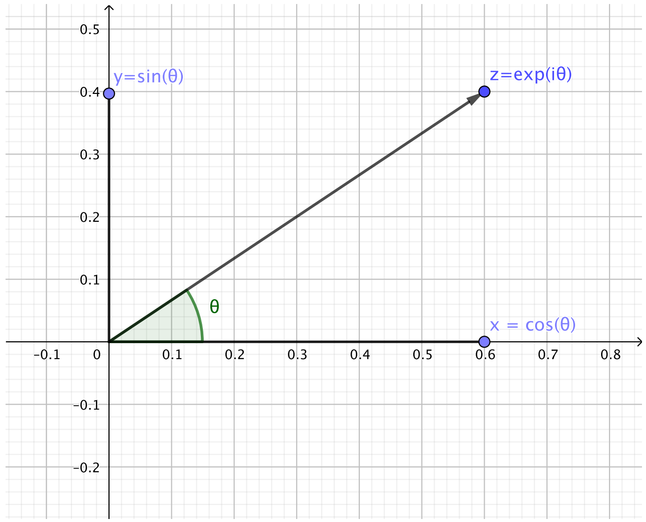
La somma di due numeri complessi è equivalente alla somma di due vettori.



Numeri complessi in coordinate polari

Dato che un numero complesso è simile ad un vettore, possiamo esprimerlo in coordinate polari indicando il suo modulo ρ e l'angolo θ. Abbiamo

$$z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))\,.$$



Conviene definire l'esponenziale complesso

$$e^{i\theta} \equiv \cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

che semplifica notevolmente i calcoli.

Esponenziali complessi

Gli esponenziali complessi sono giustificati da:

- L'equazione differenziale $\ddot{x} = -\omega^2 x$ ha come soluzione sia $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ ma anche $x(t) = A\exp(i\omega t) + B\exp(-i\omega t)$.
- Formule di somma e sottrazione di angoli: se $\alpha = \beta + \gamma$,

$$\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) =$$
$$\exp(i\beta)\exp(i\gamma) =$$
$$(\cos(\beta) + i\sin(\beta))(\cos(\gamma) + i\sin(\gamma))=$$
$$\cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\beta)\sin(\gamma) +$$
$$i(\sin(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\beta)\sin(\gamma))$$

Da cui, identificando parti reali e immaginarie

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\beta)\sin(\gamma)$$
$$\sin(\alpha) = \sin(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\beta)\sin(\gamma)$$