Quanta matematica devo sapere per studiare fisica?

Franco Bagnoli

2. Geometria analitica

Dai numeri alle grandezze fisiche

In fisica i numeri si usano per esprimere delle grandezze fisiche, è quindi importante dare, oltre al valore, l'unità di misura: 1 cm, 1 s, 1 m, 1 kg…

Si noti che l'unità di misura si rappresenta con un font diritto, non corsivo per distinguerle dalle variabili: 5 s sono cinque secondi, $5s$ sono 5 volte la variabile s.

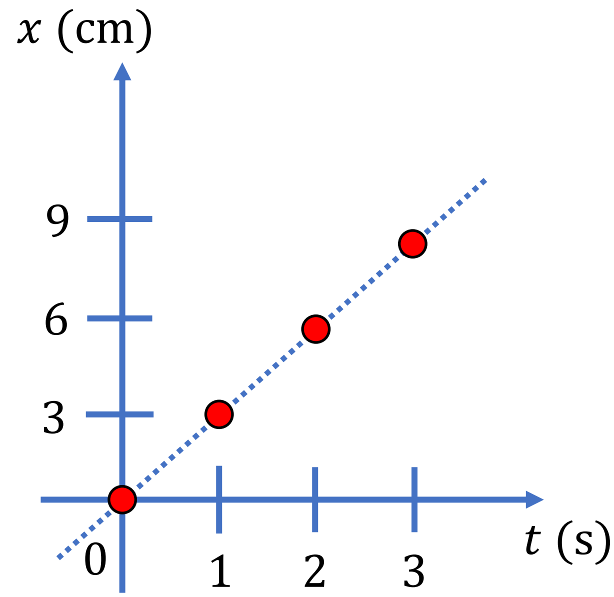
Però, una volta che si è detto quale unità di misura si usa, si possono esprimere le grandezze fisiche come numeri.

Questo è particolarmente importante quando si visualizzano i dati in un grafico: basta indicare l'unità di misura vicino all'asse.

Grafici

Supponiamo di aver misurato le seguenti coppie di tempo/posizione

t (s)	*x* (cm)
0	0
1	3
2	6
3	9



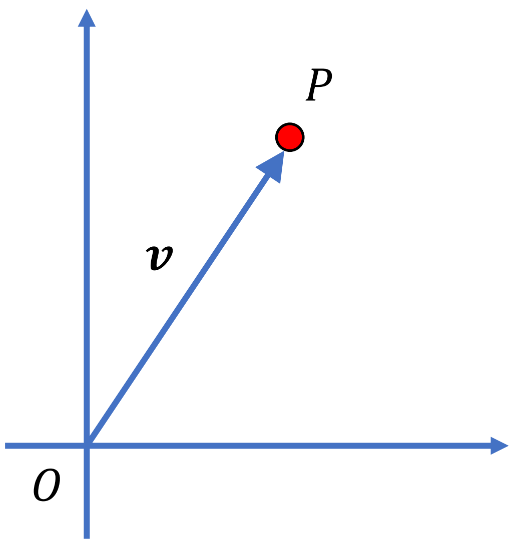
Possiamo ovviamente riportare i punti su un grafico. Si noti che la scala degli assi può anche essere diversa.

Vediamo adesso di studiare punti, rette ecc.

Punti e vettori

Un punto P sul piano cartesiano viene normalmente associato a una coppia di numeri (le sue coordinate (x, y)), ma vediamo di ottenere questa rappresentazione a partire da dei concetti più fondamentali.

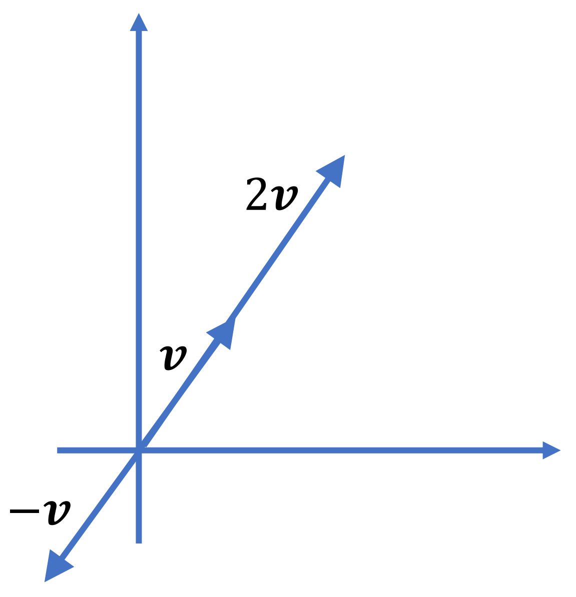
Associamo un punto P a un vettore (una freccia) che va dall'origine O fino a P.



Quando i vettori non sono indicati come punti (es. $\boldsymbol{v}$), vanno marcati o in grassetto (sui libri) o con una freccia ($\vec{v}$).

Dilatazione e contrazione di vettori

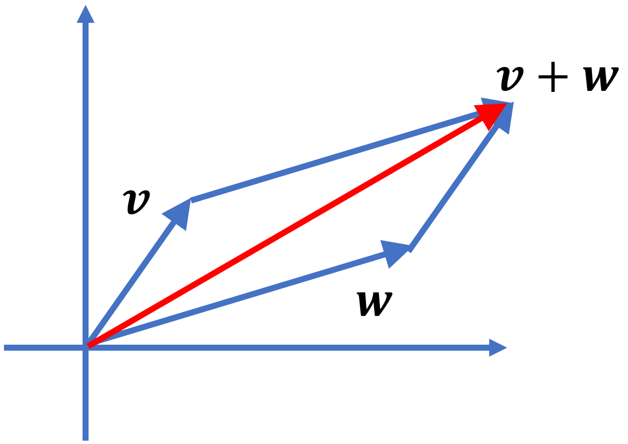
I vettori si possono dilatare (moltiplicare per un numero maggiore di uno) e contrarre (moltiplicare per un numero positivo minore di uno), invertire (moltiplicare per un numero negativo)



La lunghezza di un vettore (norma) si indica con $\|\boldsymbol{v}\|$ o con il simbolo non in grassetto (o senza freccia): v

Somma di vettori

I vettori si possono sommare concatenandoli.



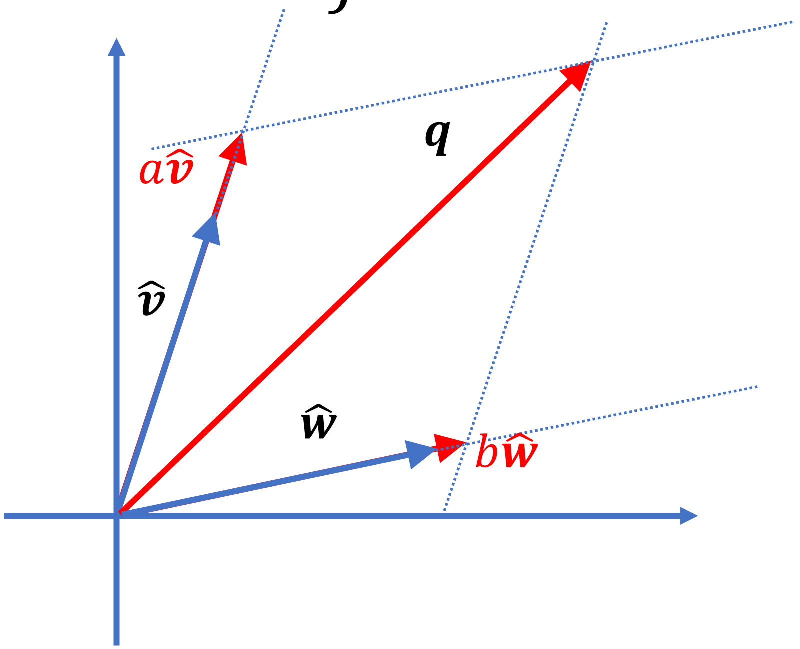
Quindi in generale, dati due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ e due numeri a e b posso costruire la combinazione lineare $a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{w}$.

Versore e scomposizione di vettori

Un versore (indicato con $\hat{\boldsymbol{v}}$) è un vettore di norma uno. Si può ottenere un versore da un vettore dividendolo per la sua norma: $\hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}/v$.

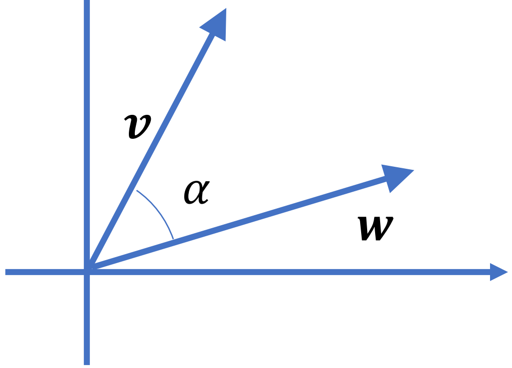
Posso anche fare l'operazione inversa: scomporre un vettore nella somma di due vettori di direzioni date (identificate da due versori $\hat{\boldsymbol{v}}$ e $\hat{\boldsymbol{w}}$)

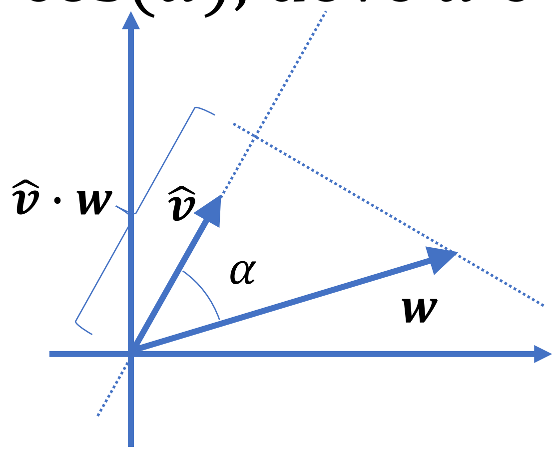
Abbiamo che $\boldsymbol{q} = a\hat{\boldsymbol{v}}$+b$\hat{\boldsymbol{w}}$.



Prodotto scalare

Dati due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ posso costruire il loro prodotto scalare $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = vw\cos(\alpha)$, dove α è l'angolo tra i vettori.





Se uno dei due vettori è un versore, il prodotto scalare dà la proiezione del secondo vettore sul versore. Quindi la scomposizione di un vettore si può scrivere $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q} \cdot \hat{\boldsymbol{v}})\,\hat{\boldsymbol{v}} + (\boldsymbol{q} \cdot \hat{\boldsymbol{w}})\,\hat{\boldsymbol{w}}$.

Sempre prodotto scalare

Il prodotto scalare è distributivo rispetto alla somma di vettori: $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$; $\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{z}$.

Si può definire quindi la norma di un vettore sulla base del suo prodotto scalare con se stesso:

$$\|\boldsymbol{v}\| = v = \sqrt{v^2} = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$$

Componente parallela e perpendicolare

Quindi dato un vettore $\boldsymbol{q}$ e un versore $\hat{\boldsymbol{v}}$, si
può scomporre $\boldsymbol{q}$ in una componente parallela a $\hat{\boldsymbol{v}}$,

$$\boldsymbol{q}_{\parallel} = (\boldsymbol{q} \cdot \hat{\boldsymbol{v}})\hat{\boldsymbol{v}}$$

e in una perpendicolare

$$\boldsymbol{q}_{\perp} = \boldsymbol{q} - (\boldsymbol{q} \cdot \hat{\boldsymbol{v}})\hat{\boldsymbol{v}}$$

Nel caso in cui lo spazio sia a più di due dimensioni, la componente perpendicolare si può ancora scomporre in altre direzioni.

Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

Questa considerazione è la base della procedura di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, che consente di ottenere, dato un insieme di vettori linearmente indipendenti, un insieme di versore ortogonali tra loro, ovvero una base. L'idea è semplice, dati $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$, si normalizza il primo: $\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{v}_1 / v_1$, quindi si sottrae al secondo la sua proiezione sul primo e si normalizza

$$\hat{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1}{\|\boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1\|}$$

E così via:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_3 = \frac{\boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2)\hat{\boldsymbol{e}}_2}{\|\boldsymbol{v}_3 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_1)\hat{\boldsymbol{e}}_1 - (\boldsymbol{v}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_2)\hat{\boldsymbol{e}}_2\|}$$

Ovviamente lo si fa fare a un computer…

Base canonica

A questo punto si può introdurre la base canonica del piano e dello spazio cartesiano, ovvero una coppia o tripletta di versore ortogonali che in fisica di solito si indicano con $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ (asse x), $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ (asse y) e $\widehat{\boldsymbol{k}}$ (asse z).
Ovviamente

$$\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} = 1, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} = 0, \hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \widehat{\boldsymbol{k}} = 0,$$
$$\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} = 1, \hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} = 0, \hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \widehat{\boldsymbol{k}} = 0,$$
$$\widehat{\boldsymbol{k}} \cdot \widehat{\boldsymbol{k}} = 1, \widehat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} = 0, \widehat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} = 0.$$

Dato un vettore $\boldsymbol{v}$, possiamo scomporlo sulla base ottenendo le sue componenti (le coordinate del punto)

$$\boldsymbol{v} = v_x \hat{\boldsymbol{\imath}} + v_y \hat{\boldsymbol{\jmath}} + v_z \widehat{\boldsymbol{k}}$$

Con

$$v_x = \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}}, \qquad v_y = \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \qquad v_z = \boldsymbol{v} \cdot \widehat{\boldsymbol{k}}.$$

Prodotto scalare in coordinate

Se adesso abbiamo

$$\boldsymbol{v} = v_x \hat{\boldsymbol{\imath}} + v_y \hat{\boldsymbol{\jmath}} + v_z \widehat{\boldsymbol{k}}$$

e

$$\boldsymbol{w} = w_x \hat{\boldsymbol{\imath}} + w_y \hat{\boldsymbol{\jmath}} + w_z \widehat{\boldsymbol{k}},$$

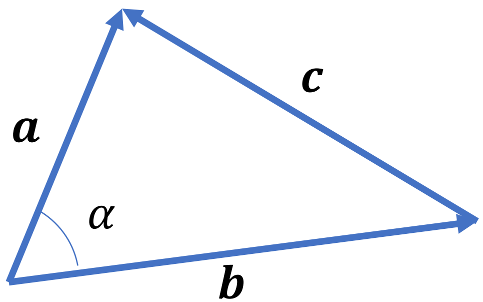
possiamo ottenere il loro prodotto scalare direttamente dalle componenti

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

Semplicemente effettuando le operazioni sui versori della base.

Teorema di Carnot

Come applicazione possiamo ottenere il teorema di Carnot. Dato un triangolo di lati a, b e c, visti come vettori abbiamo



$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$$

Prendendo la norma (prodotto scalare con se stesso) otteniamo

$$c^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)$$

che possiamo verificare nei casi $\alpha = \pi/2$ (teorema di Pitagora), nel caso $\alpha = 0$ (quadrato della differenza) e $\alpha = \pi$ (quadrato della somma).

Angolo tra i vettori

Un'altra applicazione è quella di ricavare l'angolo tra due vettori dati in coordinate. Supponiamo di avere $\boldsymbol{v} = (1, -2,3)$ e $\boldsymbol{w} = (2,0,1)$. Qual è l'angolo tra loro? Dato che

$$\boldsymbol{v} \cdot \ \boldsymbol{w} = vw\cos(\alpha),$$

abbiamo

$$\cos(\alpha) = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{vw}.$$

Nell'esempio $v = \ \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$ e $w = \sqrt{4 + 0 + 1} = \sqrt{5}$, e inoltre $\boldsymbol{v} \cdot \ \boldsymbol{w} = 2 + 3 = 5$ per cui

$$\cos(\alpha) = \frac{5}{\sqrt{70}}, \alpha \simeq 0.93 \text{ rad} \simeq 53.2°.$$

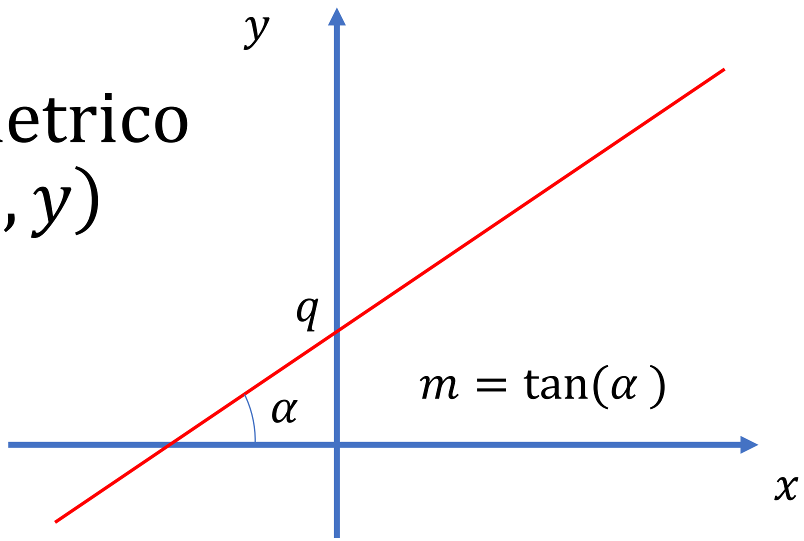
Luoghi geometrici

Dopo i punti (vettori) dobbiamo parlare di rette. L'espressione cartesiana di una retta è

$$ax + by + c = 0 \quad \text{o} \quad y = mx + q,$$

dove $q = -c/b$ è l'intercetta con l'asse y e $m = -a/b$ è il coefficiente angolare, ovvero la tangente dell'angolo della retta con l'asse x.

Questa espressione va letta così: la retta è il luogo geometrico (l'insieme) dei punti $P = (x, y)$ che soddisfano l'equazione di cui sopra.

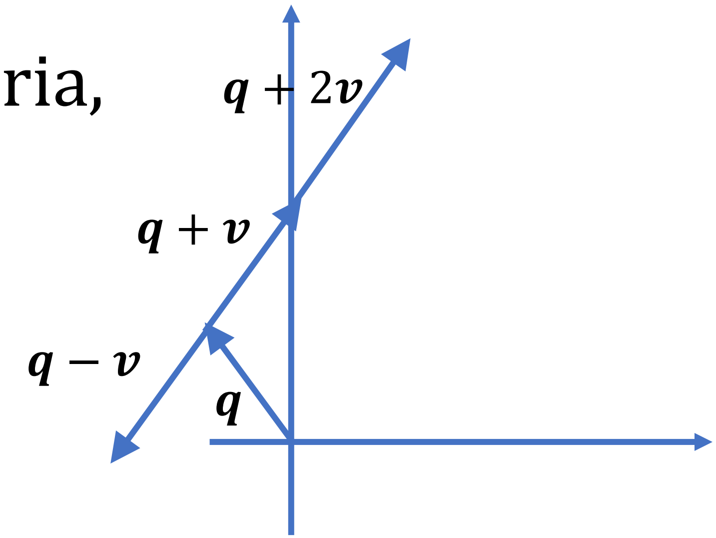


Luoghi geometrici

Ma vediamo di dare un significato geometrico alla retta. Per cominciare possiamo costruire una retta sommando a un vettore fisso un vettore moltiplicato per un numero arbitrario, ovvero

$$P = \boldsymbol{q} + t\boldsymbol{v},$$

cosa che può essere comoda quando abbiamo una traiettoria, per esempio se $\boldsymbol{q}$ identifica la posizione di un corpo ad un certo istante e $\boldsymbol{v}$ la sua velocità e vogliamo vedere dove andrebbe se non ci fossero forze a deviarlo.



Luoghi geometrici

Un'altra rappresentazione della retta è il luogo geometrico dei punti P che hanno una proiezione costante su un certo versore $\hat{\boldsymbol{v}}$, ovvero

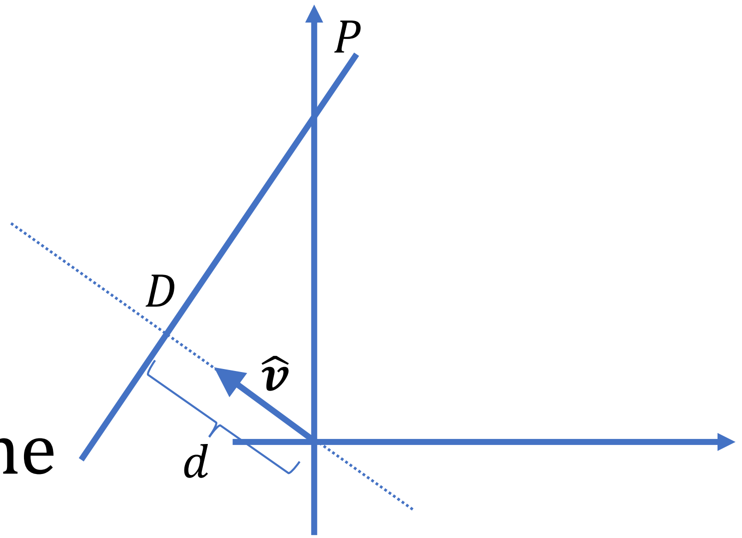
$$P \cdot \hat{\boldsymbol{v}} = \mathrm{d}.$$

dove d è la distanza della retta dall'origine
Ovviamente l'equazione può essere moltiplicata per una costante λ, e quindi può diventare

$$P \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \mathrm{d},$$

con $\boldsymbol{v} = \lambda\, \hat{\boldsymbol{v}}$.

Vediamo come si possono ottenere d e $\hat{\boldsymbol{v}}$. dall'equazione della retta.



Luoghi geometrici

Scrivendo $P = (x, y), \widehat{\boldsymbol{v}} = (\alpha, \beta)$ e $\boldsymbol{v} = (a, b)$ abbiamo

$$\mathrm{a}x + by = \lambda \mathrm{d},$$

con $\lambda = \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Confrontando con l'equazione della retta a$x + by + c = 0$, abbiamo

$$\alpha = \frac{\mathrm{a}}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \beta = \frac{\mathrm{b}}{\sqrt{a^2 + b^2}}, d = \frac{-\mathrm{c}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

dove il segno di d permette di distinguere le rette che hanno la stessa distanza ma "stanno" da parti opposte rispetto all'origine.

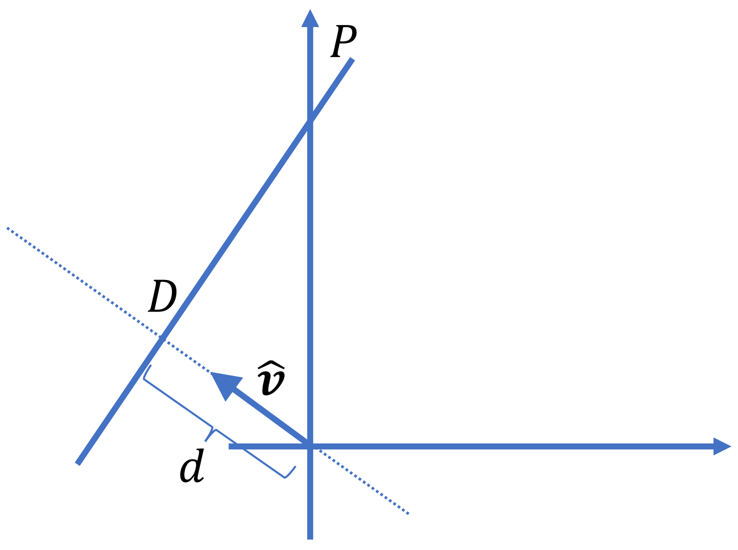
Punto di minima distanza

Una applicazione interessante è quella di trovare il punto D della retta a$x + by + c = 0$ alla minima distanza dall'origine. Geometricamente è molto facile: $D = d\,\hat{\boldsymbol{v}}$, e dato che conosciamo tutto abbiamo

$$D = (A, B)$$

$$A = -\frac{ac}{a^2 + b^2}$$

$$B = -\frac{ab}{a^2 + b^2}$$



Punto di minima distanza

Lo svolgimento per mezzo dell'analisi è più complicato. Prendiamo x come variabile indipendente, e $\mathrm{y} = -\frac{\mathrm{c+ax}}{\mathrm{b}}$.

La distanza al quadrato è

$$D^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{(c+ax)^2}{b^2},$$

che va derivata rispetto a x e azzerata per trovare il punto di minimo. Possiamo usare al posto di D^2 la quantità

$$Z^2 = b^2 D^2 = b^2 x^2 + (c+ax)^2$$

(tanto va messa a zero). Abbiamo

$$\frac{d}{dx} Z^2 = 2b^2 x + 2ac + 2a^2 x = 0$$

Da cui

$$x = -\frac{ac}{a^2+b^2}, \qquad \mathrm{y} = -\frac{ab}{a^2+b^2}.$$