Quanta matematica devo sapere per studiare fisica?

Franco Bagnoli

3. Funzioni e derivate

Funzioni come vettori

Le funzioni $x(t)$ hanno molte caratteristiche simili ai vettori (anche se non sono delle "frecce"):

- Possono essere sommate e/o moltiplicate per una costante. Se $f(t)$ e $g(t)$ sono funzioni, allora
$$y(t) = af(t) + bg(t)$$
è ancora una funzione.
- Si può definire un prodotto scalare usando il concetto di integrale (che vedremo più in là)
$$f \cdot g = \int f(t)g(t)dt$$
su un dominio definito (che può essere anche infinito).

Funzioni come vettori

Assumiamo per il momento che il tempo t sia una variabile discreta $t = 1,2,3 \dots$ e che si osservi una quantità $x(t)$ in tali istanti

$$x(t) = (x(1), x(2), x(3) \dots) = (x_1, x_2, x_3 \dots).$$

Si può pensare a $x(t)$ come a un vettore in uno spazio a infinite dimensioni, e a $(x_1, x_2, x_3 \dots)$ come alle sue coordinate su una base di "versori" $e^{(1)} = (1,0,0, \dots)$, $e^{(2)} = (0,1,0, \dots)$, … che sono funzioni tali che $e^{(i)}$ vale 1 al tempo $t = t_i = i$ e zero altrimenti. Come per i vettori abbiamo

$$x(t) = (x_1, x_2, x_3 \dots) = x_1 e^{(1)} + x_2 e^{(2)} + \cdots$$

Questo concetto è importante quando vedremo come approssimare una funzione usando basi diverse da quella "canonica".

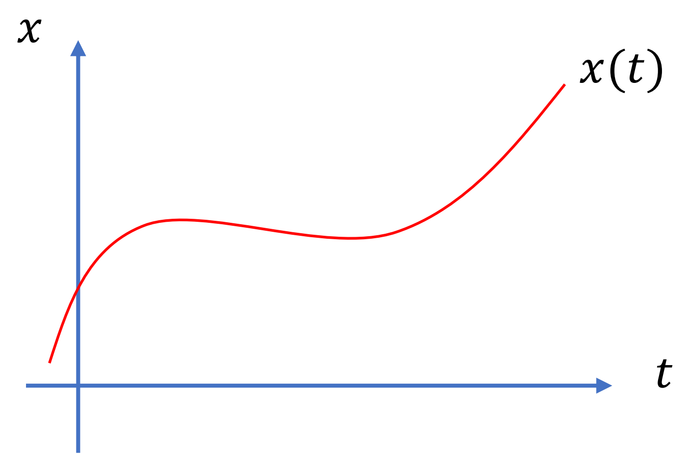
Traiettorie e leggi orarie

Un punto $P = (x, y, z)$ nello spazio (o sul piano) descrive una traiettoria, e se la seguiamo nel tempo abbiamo la legge oraria

$$P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$$

Studiamo intanto il moto in una dimensione $x(t)$.

Considerereremo quasi sempre moti continui e "lisci".



Velocità

La velocità è intuitivamente lo spazio percorso in un intervallo di tempo. Consideriamo prima il moto a velocità v costante.

La legge oraria di $x(t) = mt + q$ è una retta.

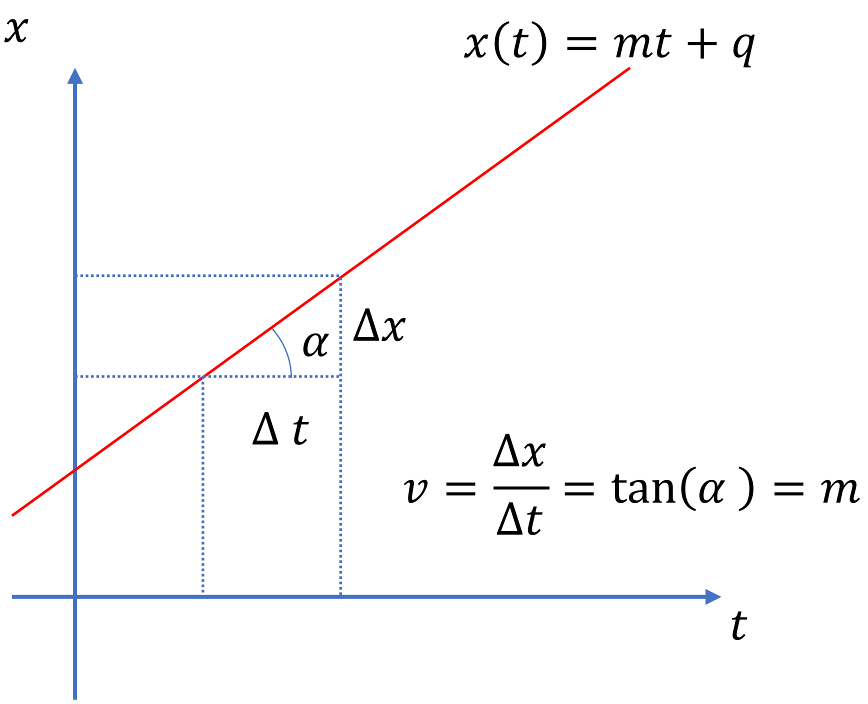
Per ogni intervallo di tempo Δt, lo spazio Δx percorso sarà

$$\Delta x = m\Delta t$$

e quindi

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = m,$$

ovvero la velocità è proprio la pendenza della retta.



Velocità

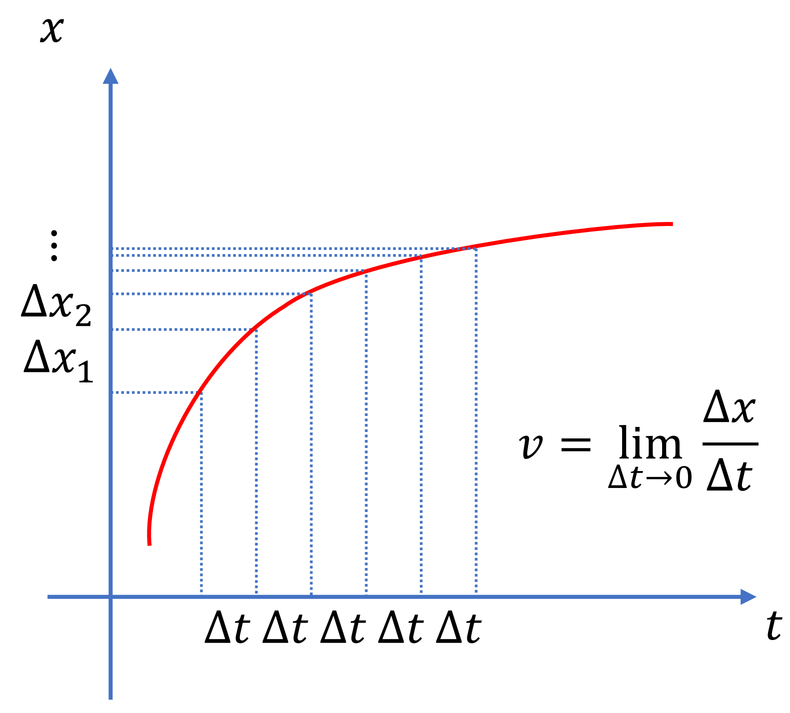
Nel caso generico, uguali intervalli di tempo non corrisponderanno più a uguali intervalli di spazio.

Nell'esempio in figura si vede come gli intervalli percorsi diminuiscano: il corpo sta rallentando.

Si definisce velocità istantanea $v(t)$ il limite della velocità media per intervallini di tempo sempre più piccoli

$$v(t) = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

si noti che $v(t)$ è ancora funzione del tempo.



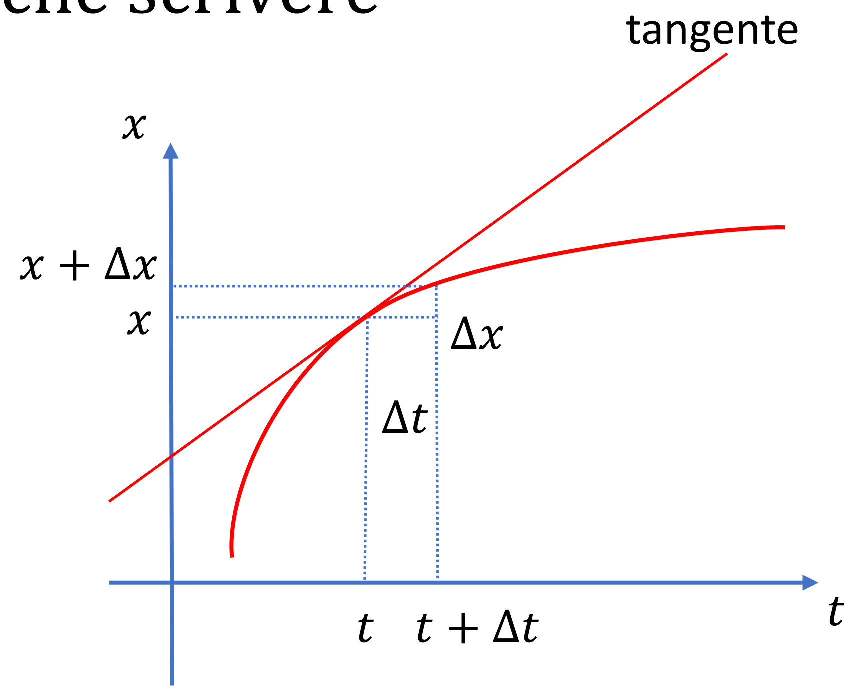
Velocità/derivata

La velocità quindi è la derivata della funzione posizione rispetto al tempo.

Graficamente la derivata è la pendenza della retta tangente a quel punto alla curva. Dato che $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$ si può anche scrivere

$$v(t) = \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$



Derivate di base da ricordare

$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = 0 \;\; (a = \text{costante});$ $\quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = 1,$ che sono casi particolari di $\frac{\mathrm{d}t^n}{\mathrm{d}t} = nt^{n-1}.$

$$\frac{\mathrm{d}\sin(t)}{\mathrm{d}t} = \cos(t), \qquad \frac{\mathrm{d}\cos(t)}{\mathrm{d}t} = -\sin(t)\,.$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}, \qquad \frac{\mathrm{d}\exp(t)}{\mathrm{d}t} = \exp(t).$$

Proprietà delle derivate

linearità:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(af(t)+bg(t)\right)=a\left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)+b\left(\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\right)=a\dot{f}+b\dot{g}$$

derivata del prodotto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(t)g(t)\right)=\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)g(t)+f(t)\left(\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}\right)=\dot{f}g+f\dot{g}$$

derivata di funzioni composte

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\left(g(t)\right)=\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\right)_{g=g(t)}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$$

Esempi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(4t^2) = \left(\frac{\mathrm{d}\sin(x)}{\mathrm{d}x}\right)_{x=4t^2}\left(\frac{\mathrm{d}4t^2}{\mathrm{d}t}\right) = 8t\cos(4t^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}\cos(\omega\, t)}{\mathrm{d}t} = -\omega\sin(\omega\, t)$$

$$\frac{\mathrm{d}\cos(\alpha\, t^2)}{\mathrm{d}t} = -2\alpha\, t\sin(\alpha\, t^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(t)\cos(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$$

ma del resto $\sin(t)\cos(t) = \left(\frac{1}{2}\right)\sin(2t)$ e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right) = \cos(2t)\,.$$

Differenziale

In fisica si può vedere la derivata nella notazione di Leibniz

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

"quasi" come una vera frazione, per cui

$$\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$$

o anche

$$f(x + \mathrm{d}x) \simeq f(x) + f'(x)\mathrm{d}x$$

cosa che del resto si può ottenere dalla definizione di derivata, assimilando il Δx con il $\mathrm{d}x$ (e eliminando il "lim")

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Differenziale

È in genere molto comodo poter approssimare le funzioni per piccole variazioni dell'argomento,

$$\sin(x+\epsilon) \simeq \sin(x) + \epsilon\cos(x)$$

e quindi

$$\sin(\epsilon) = \sin(0+\epsilon) \simeq \epsilon$$

$$\exp(\epsilon) \simeq 1+\epsilon$$

$$(1+\epsilon)^a \simeq 1 + a\,\epsilon$$

Derivata della funzione inversa

La funzione inversa di $f(x)$ è una funzione $g(t)$ tale che $g(f(x)) = x$. La funzione inversa si indica anche come $f^{-1}(x)$ (che non è $\frac{1}{f(x)}$ a meno che non sia $f(x) = \frac{1}{x}$.

Esempi: $y = \sin(x), \quad x = \arcsin(y);$

$y = \exp(x),\ x = \ln(y); \quad y = x^2, \quad x = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$.

Supponiamo di saper fare facilmente la derivata di una funzione, per esempio $y = \sin(x)$, $y' = \cos(x)$. Si può usare questa conoscenza per ottenere la derivata di $y = \arcsin(x)$?

Derivata della funzione inversa

In maniera formale è semplice: dato $y = f(x)$, e $x = g(y) = f^{-1}(y)$, vogliamo

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}},$$

dove la cosa difficile è poi esprimere il secondo membro in termini della x.

Esempio: $y = \arcsin(x)$, $x = \sin(y)$.

$$\frac{\mathrm{d}\arcsin(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\sin(y)}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Derivata della funzione inversa

Verifichiamo con qualche esempio:

$$y = \ln(x) \quad x = \exp(y)$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\exp(y)}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{x}$$

$$y = \sqrt{x} \quad x = y^2$$

$$\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\,y^2}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$