Quanta matematica devo sapere per studiare fisica?

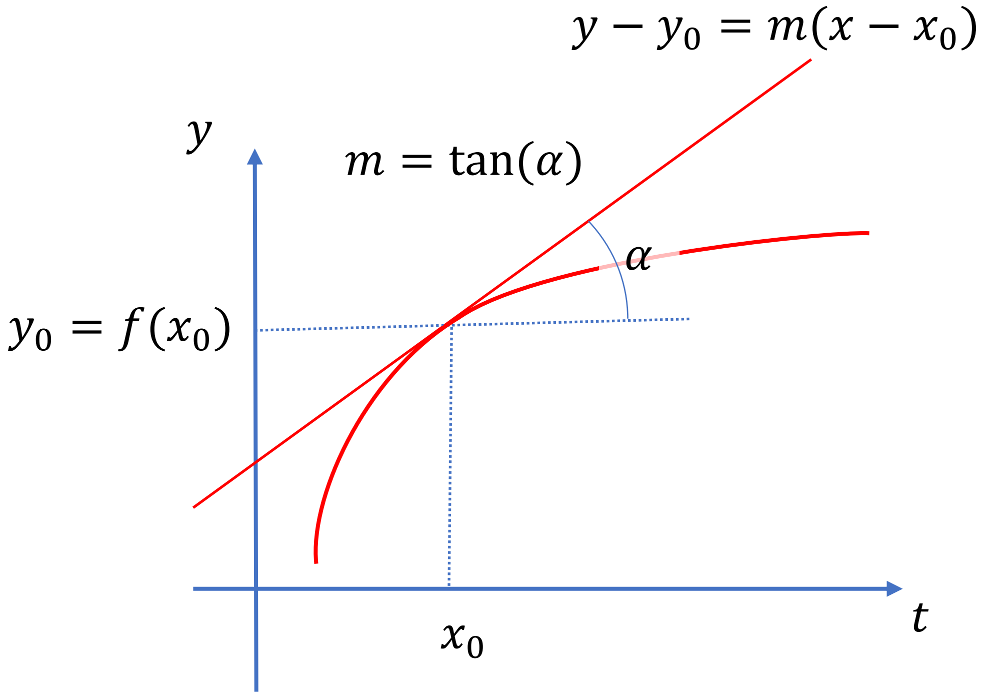
Franco Bagnoli

4. Massimi, minimi e integrali

Massimi e minimi

Abbiamo visto che la derivata di una funzione in un punto corrisponde alla tangente (trigonometrica) dell'angolo che la retta tangente (geometrica) alla curva fa con l'orizzontale

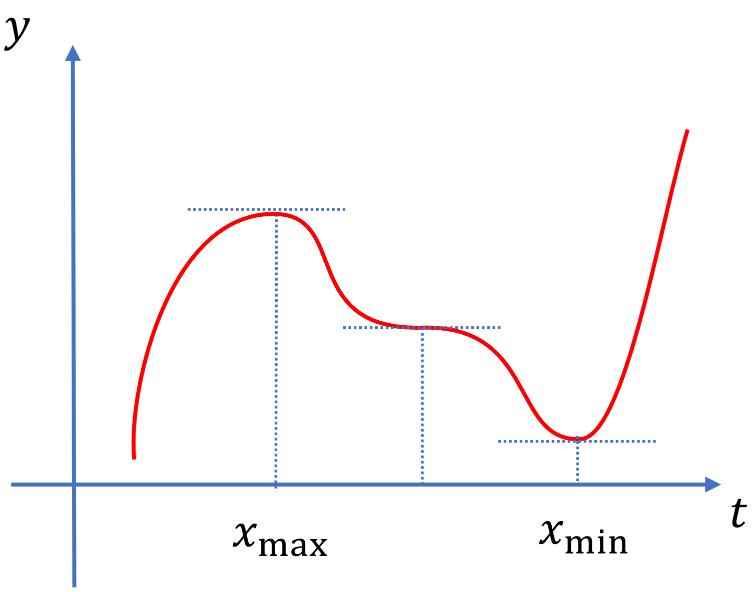
$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \tan(\alpha)$$



Massimi e minimi

Quindi è possibile trovare massimi e minimi (e flessi orizzontali) di una funzione "abbastanza liscia" cercando i punto in cui si annulla la derivata.

Si può distinguere un massimo da un minimo o da un flesso studiando il segno della derivata vicino al punto estremale, o guardando il segno della derivata seconda.



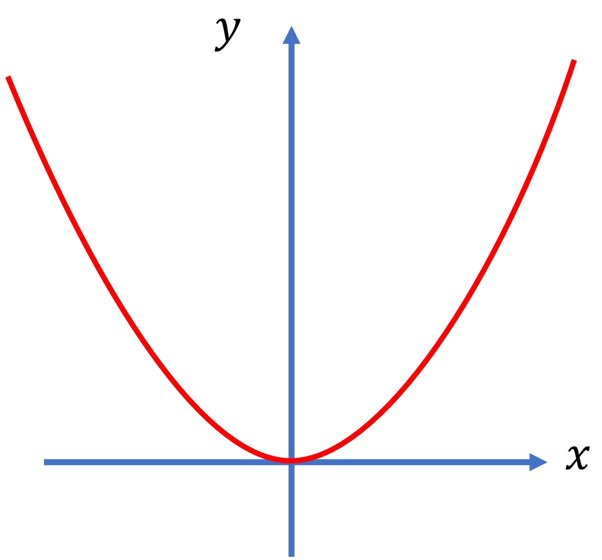
Derivata seconda

La derivata seconda (che, se è dello spazio rispetto al tempo è l'accelerazione) è semplicemente la derivata della derivata e si indica con

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

e ci da informazioni sulla curvatura di una funzione.

Per esempio, per una parabola $y(x) = 3x^2$ abbiamo $y'' = 6 > 0$ e infatti la curva ha sempre una concavità rivolta verso l'alto.



Derivate e sviluppi

Una cosa molto utile da ricordare è che una funzione è localmente approssimata dalle sue derivate, nel senso che

$$f(x+\epsilon) \simeq f(x) + \epsilon\, f'(x) + \frac{1}{2}\epsilon^2 f''(x) + \cdots$$

o anche

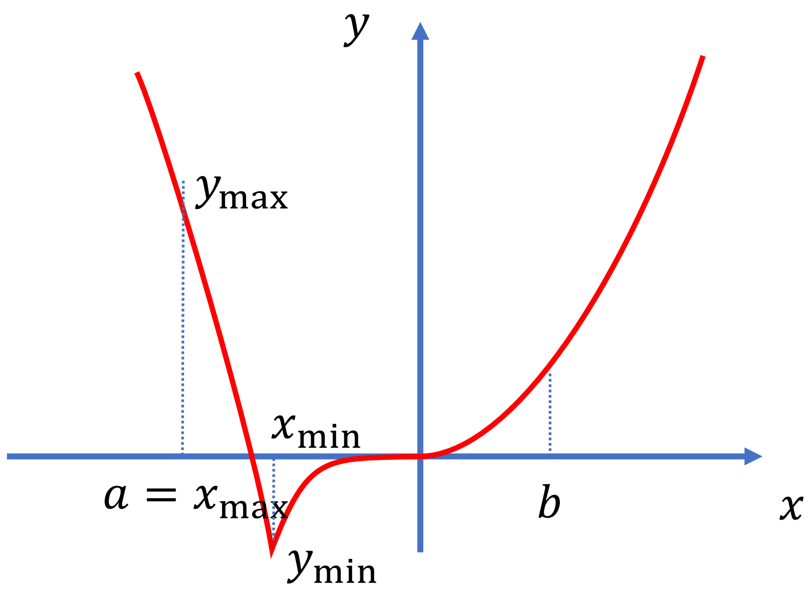
$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots$$

e infatti le derivate delle due espressioni coincidono nel punto x_0. Quindi al primo ordine una funzione è approssimabile da una retta, al secondo ordine da una parabola.

Massimi e minimi

Quindi se siamo nel punto di un massimo la derivata prima è zero e la seconda è negativa, se è un minimo la derivata prima è zero e la derivata seconda è negativa.

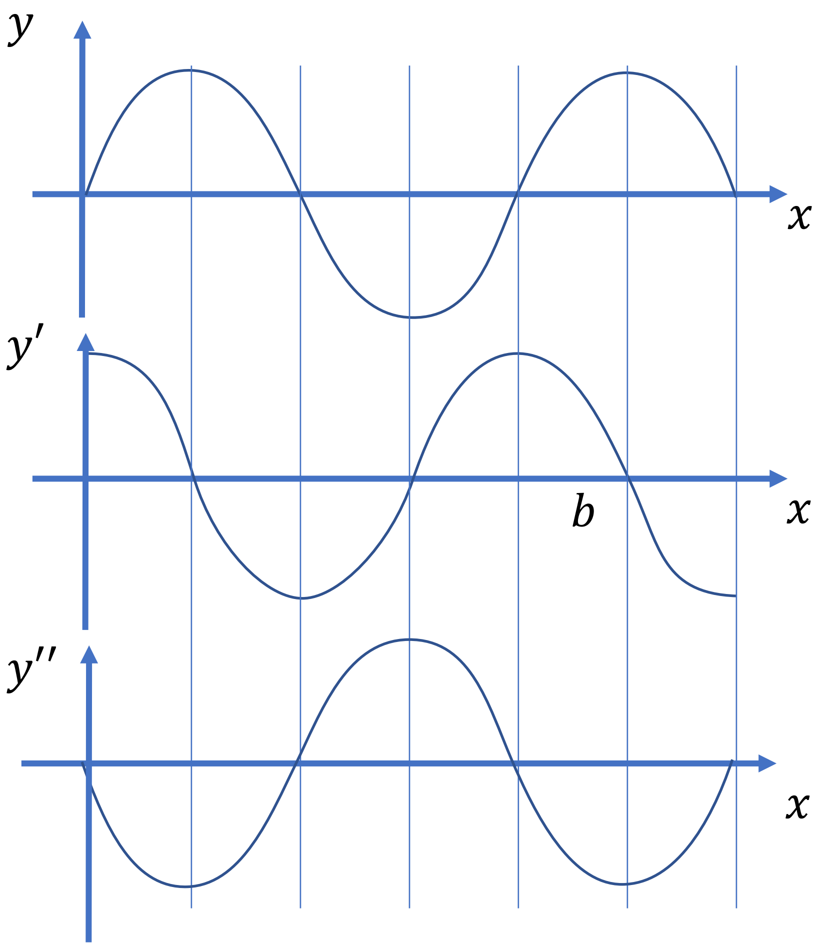
Occhio che massimi o minimi di una funzione non "liscia" (con punti angolosi o discontinuità, per esempio un valore assoluto) possono anche aversi per punti non corrispondenti allo zero della derivata.
E il massimo o minimo assoluto in un intervallo potrebbe essere tra questi o stare sul bordo.



Esempio

Prendiamo per esempio $y = \sin(x)$. La sua derivata prima è $y' = \cos(x)$ e la derivata seconda è $y'' = -\sin(x)$.

Come si può verificare nella figura a lato, i massimi di $y(x)$ corrispondono a $y'(x) = 0$ e $y''(x) < 0$, e viceversa per i minimi.



Integrali

Gli integrali possono servire a risolvere il problema inverso della derivata: se so per esempio che $y'(x) = 4x^2$, cosa posso dire su $y(x)$?

Nel seguito indichiamo con $F(x)$ una funzione e con $f(x)$ quella che può essere la sua derivata, ovvero vorremmo che

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = F'(x).$$

Ora, noi sappiamo che

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Integrali

e quindi possiamo dire (fisicamente) che

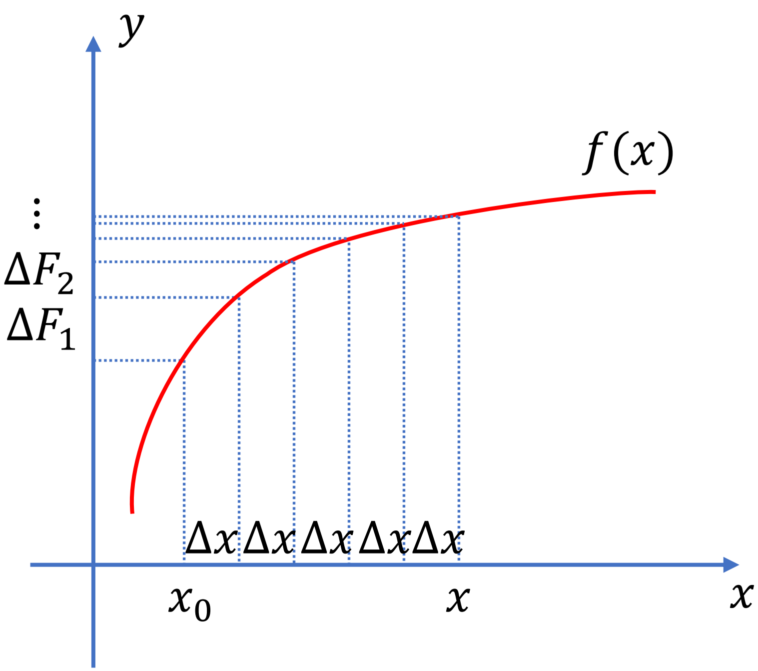
$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) \simeq f(x)\Delta x,$$

ovvero che $f(x)\Delta x$ dice quanto aumenta la F nell'intervallino Δx. Se adesso indichiamo con $F(x) = F(x_0 + n\Delta x)$ e $x_i = x_0 + n\Delta x$, abbiamo

$$F(x) - F(x_0) = \Delta F_0 + \Delta \mathrm{F}_1 + \cdots$$
$$\simeq \; f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots$$

ovvero

$$F(x) = F(x_0) \simeq \sum_i f(x_i)\Delta x.$$



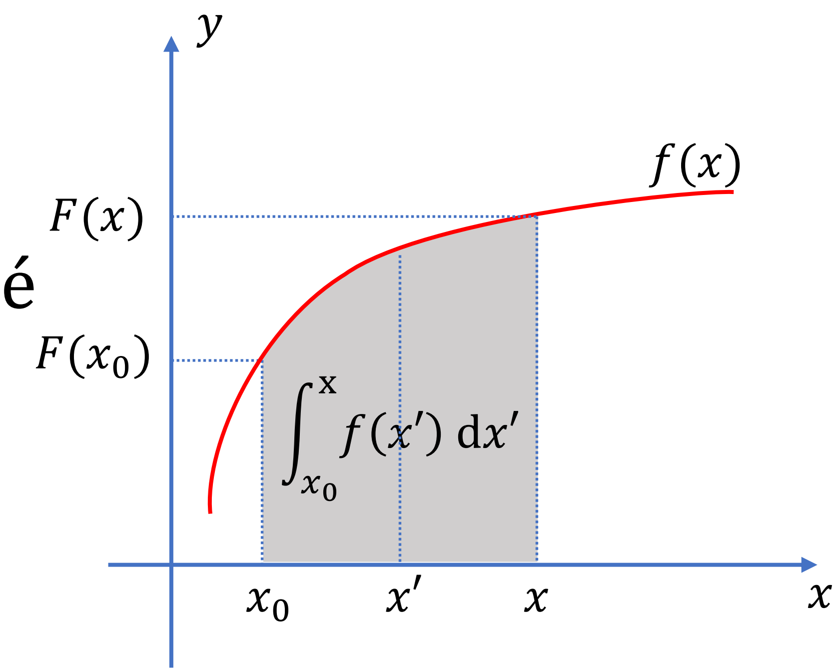
Integrali

Passando al limite indichiamo la somma come

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{\mathrm{x}} f(x')\,\mathrm{d}x'$$

dove bisogna stare attenti perché la "x" dentro l'integrale non è la "x" che appare come estremo.

L'integrale rappresenta l'area sotto la curva, ma occhio che il valore può essere negativo sia perché $f(x) < 0$ sia perché $x < x_0$ e quindi i vari dx devono essere negativi.



Proprietà degli integrali

Se definisco

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x')\mathrm{d}x'$$

abbiamo che

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$$

ma dato che le costanti spariscono nella derivata, tutte le funzioni del tipo $F(x) + c$ corrispondono alla stessa $f(x)$.

Poi ovviamente

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x,$$

sia se $a < c < b$ che negli altri casi.

Proprietà degli integrali

Da cui anche

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x\,.$$

L'integrale è lineare (come la derivata):

$$\int \big(af(x) + bg(x)\big)\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integrali da ricordare

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c; \quad n \neq -1$$

$$\int x^{-1} \mathrm{d}x = \ln(x) + c; \quad \int_{x_0}^{x} y^{-1} \mathrm{d}y = \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

$$\int e^{x} \mathrm{d}x = e^{x} + c; \quad \int e^{\omega x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\omega} e^{\omega x} + c;$$

$$\int \sin(x)\, \mathrm{d}x = -\cos(x) + c; \int \sin(\omega x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\omega} \cos(\omega x) + c;$$

$$\int \cos(x)\, \mathrm{d}x = \sin(x) + c; \int \cos(\omega x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\omega} \sin(\omega x) + c;$$

Metodi di risoluzione di integrali

Diversamente dalle derivate, gli integrali non si possono sempre esprimere come combinazione di funzioni conosciute (e molte funzioni sono definite a partire da integrali).

I metodi più semplici per provare a "manipolare" gli integrali sono la sostituzione e l'integrazione per parti.

Sostituzione

prendiamo per esempio

$$\int_a^b t \sin(\omega t^2)\, \mathrm{d}t.$$

Se sostituiamo $y = \omega t^2$ abbiamo $\mathrm{d}y = 2\omega\, t\, \mathrm{d}t$ e il $t\, \mathrm{d}t$ c'è già!

Con un po' di manipolazioni otteniamo

$$\int_a^b t \sin(\omega t^2)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\omega} \int_a^b \sin(\omega t^2)\, 2\omega \mathrm{t d}t$$

$$= \frac{1}{2\omega} \int_{\omega a^2}^{\omega b^2} \sin(y)\, \mathrm{d}y = \frac{1}{2\omega} \left(\cos(\omega a^2) - \cos(\omega b^2)\right).$$

Si noti che anche i limiti di integrazione sono stati sostuititi.

Integrazione per parti

dato che

$$\frac{\mathrm{d}(FG)}{\mathrm{d}t} = (FG)' = F'G + FG' = fG + Fg,$$

abbiamo che

$$\int_a^b fG = (FG)_a^b - \int_a^b Fg$$

Esempio:

$$\int_a^b t\sin(t)\,\mathrm{d}t \colon G = t, f = \sin(t)$$

$$\int_a^b t\sin(t)\,\mathrm{d}t = (-t\cos(t))_a^b + \int_a^b \cos(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= (-t\cos(t))_a^b + (\sin(t))_a^b.$$

Derivare per credere.