Quanta matematica devo sapere per studiare fisica?

Franco Bagnoli

5. Equazioni differenziali

Equazioni differenziali

In fisica e in molti altri contesti, accade che la variazione (nel tempo, per esempio) di una qualche quantità dipenda dalla quantità stessa.

Per esempio, abbiamo equazioni del tipo

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}),$$

e vogliamo ottenere, se possibile, la forma esplicita di $x(t)$.

La soluzione di una equazione differenziale necessita della conoscenza delle condizioni iniziali, ovvero del valore di $x(0)$, $\dot{x}(0)$, ecc.

L'ordine di una equazione dipende dal massimo grado delle derivate presenti.

Equazioni differenziali lineari

Se le derivate della funzione incognita sono legate da relazioni lineari, l'equazione è lineare, ovvero del tipo

$$a\,\ddot{x} + b\dot{x} + cx + d = 0$$

I coefficienti a, b, c, d possono essere costanti o dipendere esplicitamente dal tempo.

Ci occuperemo qui sono di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del primo e secondo ordine.

Equazioni differenziali lineari

Data una equazione differenziale lineare,

$$a\,\ddot{x} + b\dot{x} + cx + d = 0$$

chiamiamo

$$a\,\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

l'equazione omogenea associata (ovvero senza la parte costante).

Chiamiamo inoltre soluzione particolare x_p una qualsiasi soluzione dell'equazione originale. Di solito si sceglie una soluzione costante, che per l'equazione di cui sopra è

$$x_p = -\frac{d}{c}$$

Equazioni differenziali lineari

La soluzione dell'equazione differenziale completa è data dalla somma della soluzione dell'equazione omogenea più una soluzione particolare.

La soluzione dell'equazione omogenea è definita a meno di una costante moltiplicativa, dato che se $x(t)$ è soluzione di

allora $y(t) = Ax(t)$ è pure soluzione della stessa equazione.

Inoltre una equazione di ordine n possiede n soluzioni indipendenti.

Le costanti moltiplicative sono fissate dalle condizioni iniziali.

Equazioni lineari del 1° ordine

Le equazioni del 1° ordine sono del tipo

$$a\dot{x} + bx + c = 0.$$

La soluzione particolare è $x = -c/b$. L'equazione omogenea associata è

$$\dot{x} = -\frac{b}{a}x = -\gamma\, x$$

La funzione esponenziale è quella le cui derivate sono proporzionali alla funzione stessa, per cui

$$x(t) = A\exp(-\gamma\, t)$$

e la soluzione generale è (sostituendo)

$$x(t) = A\exp\left(-\frac{b}{a}\, t\right) - \frac{c}{b}.$$

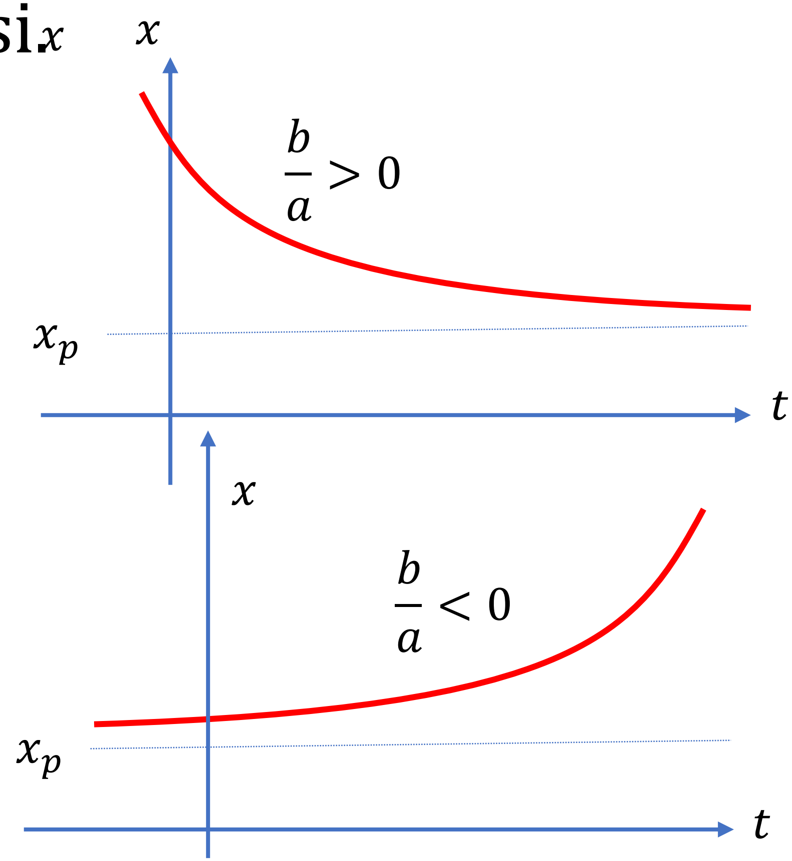
Equazioni lineari del 1° ordine

$$x(t) = A \exp\left(-\frac{b}{a}\, t\right) - \frac{c}{b}.$$

A seconda del segno di b/a si hanno comportamenti molto diversi.

Se $b/a > 0$ la $x(t)$ converge (monotonicamente) alla soluzione particolare.

Se $b/a < 0$ la $x(t)$ diverge all'infinito quando il tempo aumenta (converge alla soluzione particolare per $t \to -\infty$)



Equazioni lineari del 2° ordine

Le equazioni del 2° ordine sono del tipo

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx + d = 0$$

e sappiamo già come eliminare la costante $x_p = -\frac{d}{c}$.

cerchiamo la soluzione dell'equazione omogenea associata

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

come una esponenziale

$$x = e^{kt}.$$

Sostituendo otteniamo l'equazione algebrica

$$ak^2 + bk + c = 0.$$

Equazioni lineari del 2° ordine

La soluzione dell'equazione

$$ak^2 + bk + c = 0.$$

è

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2a},$$

ovvero due radici k_1 e k_2.

La soluzione dell'equazione omogenea è in genere

$$x(t) = A\exp(k_1 t) + B\exp(k_2 t)$$

di nuovo in cui A e B vengono fissate dalle condizioni iniziali dopo aver inserito la soluzione particolare.

Equazioni lineari del 2° ordine

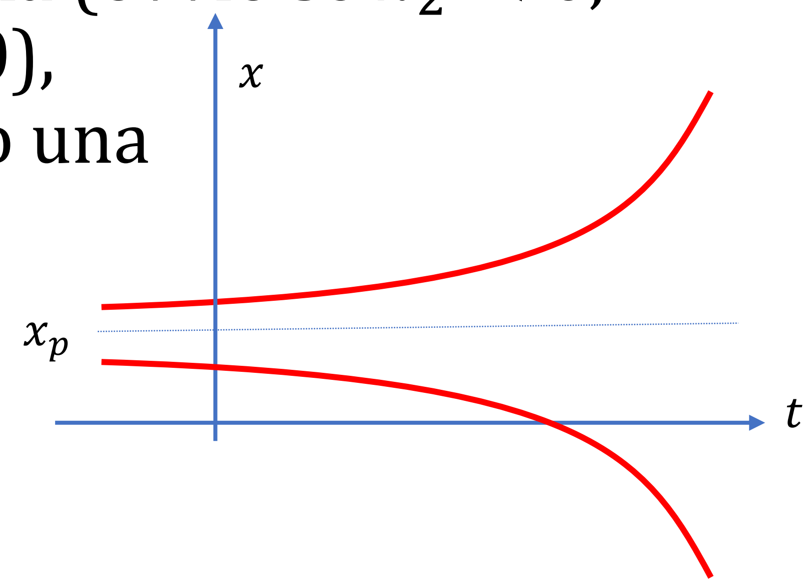
Si hanno comportamenti diversi a seconda del segno di $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$.

Se $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} > 0$ abbiamo due k reali, e prendiamo che $k_1 > k_2$.

Se $k_1 > 0$, asintoticamente, per $t \to \infty$, l'esponenziale positiva domina (ovvio se $k_2 < 0$, ma in pratica anche se $k_2 > 0$), quindi praticamente abbiamo una divergenza esponenziale

$$x = \mathrm{A}\exp(\mathrm{k}_1\mathrm{t})$$

(rispetto alla soluzione particolare).



Massimo dell'energia

Questo è quello che succede nelle vicinanze di un punto instabile, tipo una pallina posta sopra un pallone: a meno di non metterla esattamente nel punto di equilibrio, la pallina si allontanerà (almeno inizialmente) seguendo una legge esponenziale.

Infatti se un punto è un massimo dell'energia, avremo localmente

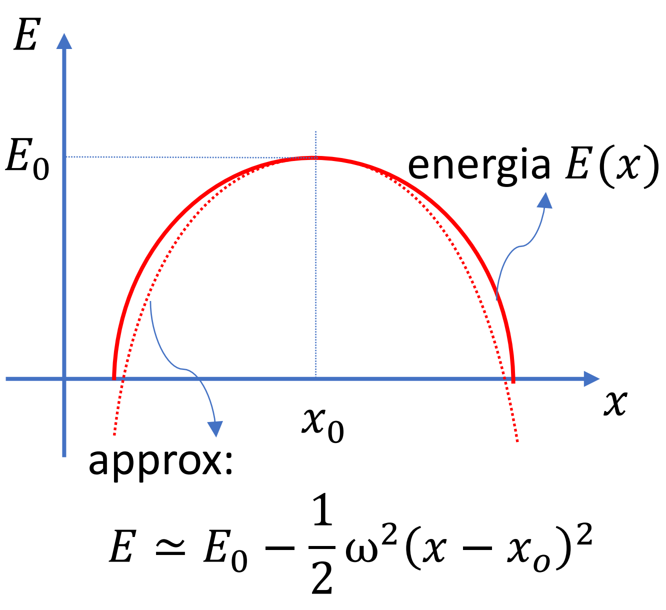
$$E(x) = E_0 - \frac{1}{2}\omega^2(x - x_0)^2,$$

e dato che la forza è $f = -\frac{dE}{dx}$, da

$$f = ma = m\ddot{x}$$

abbiamo

$$\ddot{x} = \frac{\omega^2}{m}(x - x_0) \;\Rightarrow\; k_1 = \frac{\omega}{\sqrt{m}}$$



Equazioni lineari del 2° ordine

Se $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} < 0$ abbiamo due k complessi coniugati, ovvero

$$k = -\frac{b}{2a} \pm \frac{i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = -\gamma \ \pm i\omega.$$

La soluzione è

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(Ae^{i\omega t} + Be^{-\omega t}\right).$$

Ricordiamo che

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega \mathrm{t}) + \sin(\omega \mathrm{t}).$$

Le costanti A e B sono in genere complesse, in modo che $x(t)$, una volta imposta la soluzione particolare e le condizioni iniziali, sia reale.

Equazioni lineari del 2° ordine

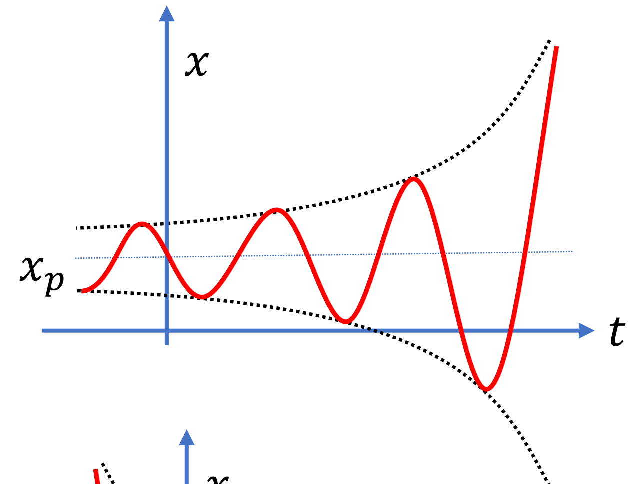
Possiamo quindi riportare tutto a numeri reali scrivendo

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)).$$

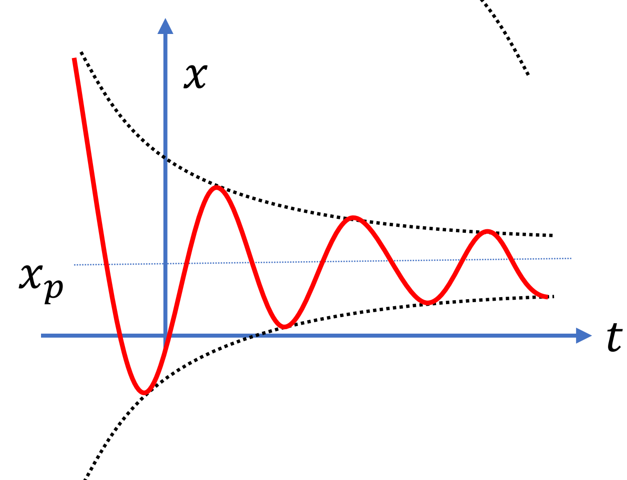
Abbiamo quindi un moto oscillante che può essere divergente se

$$\gamma = \frac{b}{2a} < 0$$

o convergente nel caso opposto.



Il caso convergente è tipico di un oscillatore armonico smorzato, come una molla in presenza di attrito viscoso o un'altalena per le piccole oscillazioni.



Oscillatore armonico

Un caso interessante è quello dell'oscillatore armonico senza smorzamento:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x.$$

La soluzione è

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),\ \text{con}$$
$$\dot{x}(t) = -A\,\omega\sin(\omega t) + B\,\omega\cos(\omega t),$$

e possiamo studiare il ruolo delle condizioni iniziali:

cond. iniziali	A	B	$x(t)$
$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$	x_0	0	$x_0\cos(\omega\, t)$
$x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$	0	v_0/ω	$\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega\, t)$

Oscillatore armonico

Il primo caso

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = 0$$

corrisponde a una molla fatta partire da fermo con una certa elongazione, il secondo

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = v_0$$

a una molla fatta partire dalla condizione di equilibrio con una certa velocità, per esempio dopo un urto.

Oscillatore armonico

Si può anche studiare il sistema in un altro modo. Moltiplicando per $\dot{x}$ abbiamo

$$\ddot{x}\dot{x} + \omega^2 x\dot{x} = 0.$$

Ora, $\mathrm{d}\dot{x}^2/\mathrm{d}x = 2\dot{x}\ddot{x}$ e $\mathrm{d}\dot{x}^2/\mathrm{d}x = 2\dot{x}x$, quindi l'eq. precedente diventa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathrm{x}}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\mathrm{x}^2\right) = 0$$

ovvero

$$\frac{1}{2}\dot{\mathrm{x}}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\mathrm{x}^2 = E = \text{costante}$$

che esprime appunto la conservazione dell'energia.

Oscillatore armonico

Ma considerando $\dot{x} = y$ come una variabile indipendente,

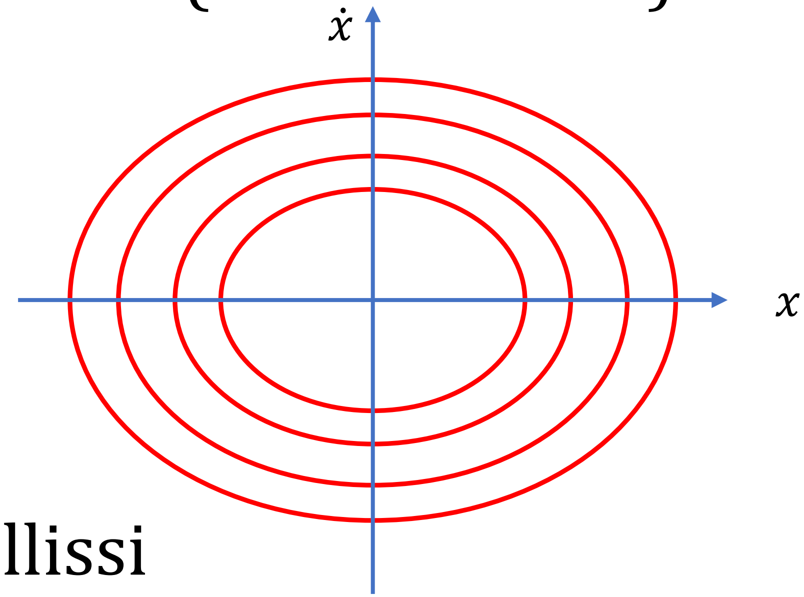
$$\frac{1}{2}\dot{\mathrm{x}}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\mathrm{x}^2 = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2\mathrm{x}^2 = E = \text{costante}$$

è l'equazione di una famiglia di ellissi (al variare di E).

E del resto eliminando t da una soluzione, per esempio

$$x = x_0 \cos(\omega t),$$
$$\dot{x} = -x_0\omega \sin(\omega t),$$

otteniamo di nuovo delle ellissi.



La proiezione del moto lungo l'ellissi su di un asse ci dà il moto oscillatorio.

Casi particolari

Bisogna citare due casi "degeneri":

$$\dot{x} = v \ \ \text{(costante)}$$

che ha come soluzione il moto uniforme

$$x(t) = x_0 + vt$$

e il moto uniformemente accelerato

$$\ddot{x} = a \ \ \text{(costante)}$$

che ha come soluzione

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

dove al solito x_0 e v_0 sono dati dalle condizioni iniziali.