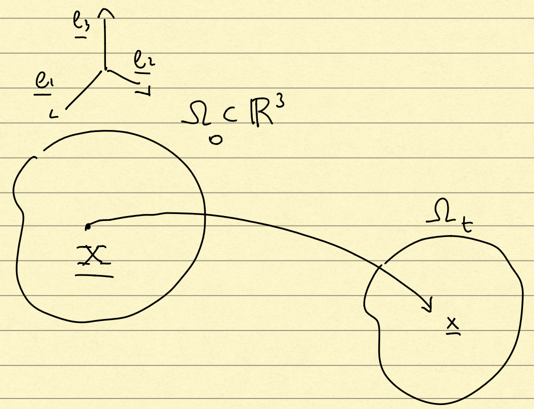
Richiami di Meccanica dei Continui



Chiamo corpo continuo un insieme di p.ti $\mathcal{B}$ che all'istante $t=0$ occupa una posizione Ω_0 (configuraz. di riferimento)

Ω_t è invece la posizione che $\mathcal{B}$ occupa all'istante $t>0$ (configurazione attuale)

$\underline{X}$ si chiamano coordinate lagrangiane

$\underline{x}$ si chiamano coordinate euleriane

Il p.to $\underline{X}$ è portato in $\underline{x}$ mediante una mappa

$$\underline{x} = \underline{\chi}(\underline{X}, t)$$

$$\Omega_t = \underline{\chi}(\Omega_0, t)$$

$\underline{\chi}$ (Moto del sistema) è un'incognita del problema

Supponiamo che $\underline{\chi} \in C^2$ e $J = \det \mathbb{F} > 0$

$$\mathbb{F} = \frac{\partial \underline{\chi}}{\partial \underline{X}} \qquad F_{ij} = \frac{\partial \chi_i}{\partial X_j}$$

$\mathbb{F}$ si chiama gradiente di deformazione

La mappa $\underline{\chi}$ è dunque invertibile

Ci sono 2 modi per descrivere il moto di $\mathcal{B}$

- LAGRANGIANO Mi metto a cavallo di $\underline{X}$ e ne seguo il moto
- EULERIANO Mi fisso in un p.to dello spazio e osservo le particelle che transitano per quel punto al variare del tempo

Nell'approccio Lagrangiano uso $\underline{X}$ $\begin{cases} \underline{X} = \underline{\chi}^{-1}(\underline{x},t) \\ \underline{x} = \underline{\chi}(\underline{X},t) \end{cases}$

" " Euleriano uso $\underline{x} = \underline{\chi}(\underline{X},t)$

VELOCITÀ e ACCELERAZIONE

$$(L) \begin{cases} \underline{v}(\underline{X},t) = \dfrac{\partial \underline{\chi}}{\partial t}(\underline{X},t) \\ \underline{a}(\underline{X},t) = \dfrac{\partial^2 \underline{\chi}}{\partial t^2}(\underline{X},t) \end{cases} \qquad (E) \begin{cases} \underline{v}(\underline{x},t) = \dfrac{\partial \underline{\chi}}{\partial t}(\underline{X},t)\Big|_{\underline{X} = \underline{\chi}^{-1}(\underline{x},t)} \\ \underline{a}(\underline{x},t) = \dfrac{\partial^2 \underline{\chi}}{\partial t}(\underline{X},t)\Big|_{\underline{X} = \underline{\chi}^{-1}(\underline{x},t)} \end{cases}$$

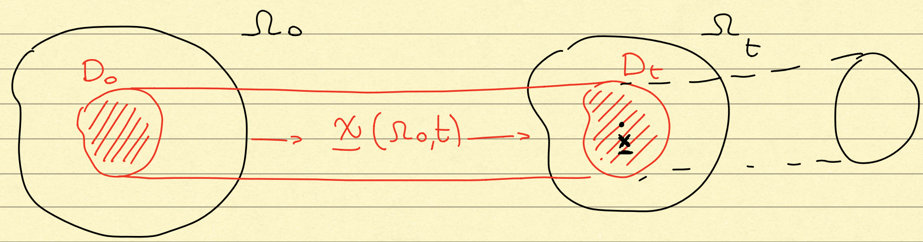
Supponiamo che G rappresenti una quantità definita sul corpo $\mathcal{B}$

$$G = \underbrace{G_L(\underline{X},t)}_{\substack{\text{descr.}\\ \text{lagrang}}} = \underbrace{G_E(\underline{x},t)}_{\substack{\text{descr.}\\ \text{Euleriana}}}$$

Se derivo G ho $\dfrac{dG}{dt} = \dfrac{\partial G_L}{\partial t}(\underline{X},t)$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(G_E\big(\underline{\chi}(\underline{X},t),t\big)\Big) = \nabla G_E \cdot \frac{\partial \underline{\chi}}{\partial t} + \frac{\partial G_E}{\partial t} = \underbrace{\nabla G_E \cdot \underline{v}}_{\text{termine conv.}} + \frac{\partial G_E}{\partial t}$$

. I moti in cui la velocità (in descriz. Euleriana) $\underline{v}(\underline{x},t)$ non dipende dal tempo si dicono STAZIONARI



$D_t \subset \Omega_t$ si dice "MATERIALE" se al variare del tempo è costituito dagli stessi punti

TEO: (trasporto di Reynolds) Supponiamo D_t sia un volume materiale e $G_E(\underline{x},t)$ sia una proprietà (scalare) definita su D_t

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{D_t} G_E(\underline{x},t)\,d\underline{x}\right] \underbrace{=}_{\text{(teo del trasporto)}} \int_{D_t}\left[\frac{\partial G_E}{\partial t} + \mathrm{div}(G_E \underline{v})\right] d\underline{x}$$

(Senza dimostrazione)

Supponiamo che $G_E(\underline{x},t) = \rho(\underline{x},t)$

$$m(D_t) = \int_{D_t} \rho(\underline{x},t)\,d\underline{x} \qquad \frac{d}{dt} m(D_t) = 0 \qquad \left(\text{Conservazione della massa}\right)$$

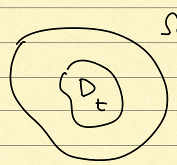
$$\frac{d}{dt}\left(\int_{D_t} \rho(\underline{x},t)\,d\underline{x}\right) = \int_{D_t}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \underline{v})\right] d\underline{x} = 0 \qquad (*)$$

Dato che (*) vale per tutti i domini materiali

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \underline{v}) = 0}$$

Bilancio di massa
o equazione di continuità

ESEMPIO



$$\mathrm{Vol}(D_t) = \int_{D_t} 1 \cdot d\underline{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Vol}(D_t)\right) = \frac{d}{dt}\int_{D_t} 1 \cdot d\underline{x} = \int_{D_t} \cancel{\frac{\partial 1}{\partial t}} + \mathrm{div}(\underline{v}) = \int_{D_t} \mathrm{div}(\underline{v})\,d\underline{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{D_t} 1 \cdot d\underline{x}\right] = \int_{D_t} \operatorname{div}(\underline{v})\, d\underline{x} \implies$$

Se $\operatorname{div} \underline{v} = 0$ i volumi sono conservati (moti isocorici)

Ex:

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0 \not\Rightarrow \rho = \text{cost}$$

$$\rho = \text{Cost} \implies \operatorname{div} \underline{v} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho \cdot \underline{v} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0$$

BILANCIO DEL MOMENTO LINEARE (o IMPULSO) (Seconda legge della mecc. per i continui)

Impulso di D_t $\qquad \underline{Q} = \int_{D_t} \rho \underline{v}\, d\underline{x}$

$$\frac{d\underline{Q}}{dt} = \left(\text{Risultante delle forze applicate a } D_t\right)$$

$$\frac{dQ_i}{dt} = (\text{teo R.}) = \int_{D_t} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \operatorname{div}(\rho v_i \underline{v})\right] =$$

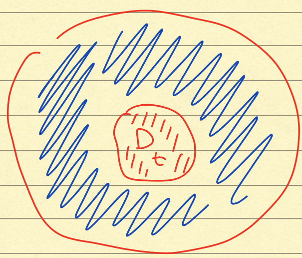
$$= \int_{D_t} \left[\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \underbrace{\cancel{v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \cancel{v_i \operatorname{div}(\rho \underline{v})}}_{=0} + \nabla v_i \cdot \rho \underline{v}\right] d\underline{x}$$

$$\frac{dQ_i}{dt} = \int_{D_t} \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \nabla v_i \cdot \underline{v}\right) d\underline{x} \qquad \frac{d\underline{Q}}{dt} = \int_{D_t} \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\nabla \underline{v})\underline{v}\right) d\underline{x}$$

Introduco il gradiente di un vettore $\bar{\nabla}\underline{v} = \begin{pmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ v_{3x} & v_{3y} & v_{3z} \end{pmatrix}$

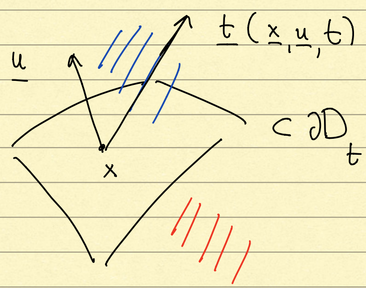
$$(\bar{\nabla}\underline{v})\,\underline{v} = \begin{pmatrix} \bar{\nabla}v_1 \\ \bar{\nabla}v_2 \\ \bar{\nabla}v_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\nabla}v_1\cdot\underline{v} \\ \bar{\nabla}v_2\cdot\underline{v} \\ \bar{\nabla}v_3\cdot\underline{v} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\underline{\underline{Q}}}{dt} = \int_{D_t} \rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\bar{\nabla}\underline{v})\underline{v}\right) d\underline{x} = \underbrace{\text{Risultante delle forze applicate a } D_t}_{\text{La risultante}}$$



$$\underline{R} = \underline{R}_s + \underline{R}_m \qquad \begin{cases} \underline{R}_s & \text{forze di superficie} \\ \underline{R}_m & \text{forze di massa (e.g. gravità)} \end{cases}$$

Le forze di superficie si calcolano ipotizzando l'$\exists$ di un vettore detto sforzo $\underline{t}(\underline{x},\underline{u},t)$ che agisce su un p.to $\underline{x}$ del bordo ∂D_t



L'esistenza di questo vettore è il POSTULATO DI EULERO-CAUCHY

$[\underline{t}]$ pressione forza per unità di superficie

Per il principio di azione e reazione $\underline{t}(\underline{x},-\underline{u},t) = -\underline{t}(\underline{x},\underline{u},t)$

$$\underline{R}_s = \int_{\partial D_t} \underline{t}(\underline{x},\underline{u},t)\,d\sigma \qquad \underline{R}_m = \int_{D_t} \rho\,\underline{f}\,d\underline{x}$$

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = \int_{D_t} \rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\nabla \underline{v})\underline{v}\right) d\underline{x} = \int_{\partial D_t} \underline{t}(\underline{x}, \underline{u}, t)\, d\sigma + \int_{D_t} (\rho \underline{f})(\underline{x}, t)\, d\underline{x}}$$

Eq.ne di bilancio dell'impulso (quantità di moto)

<u>Teo di Cauchy</u> « lo sforzo $\underline{t}(\underline{x}, \underline{u}, t)$ dipende linearmente da $\underline{u}$, ossia $\exists$ un tensore (matrice 3x3) simmetrico $\mathbb{T}(\underline{x}, t)$ t.c.

$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{u}, t) = \mathbb{T}(\underline{x}, t)\, \underline{u} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$