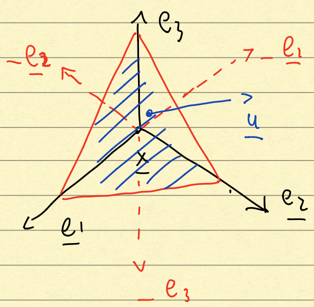
Teorema di Cauchy « $\underline{t}(\underline{x},\underline{u},t)$ è lineare in $\underline{u}$. Cioè $\exists\ \mathbb{T}(\underline{x},t)$

t.c. $\underline{t}(\underline{x},\underline{u},t) = \mathbb{T}(\underline{x},t)\,\underline{u}$

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix}$$

dim: Considero un tetraedro infinitesimo τ

τ



$\underline{u} = n_1\underline{e_1} + n_2\underline{e_2} + n_3\underline{e_3}$

Ho 3 facce di area $d\sigma_i$

$d\sigma$ è la faccia $\perp$ a $\underline{u}$

$d\sigma_i = (\underline{u}\cdot\underline{e_i})\,d\sigma$

Scrivo l'equazione dell'equilibrio per τ $\quad \underline{R}_s + \underline{R}_m = 0$

$$\underline{R_s} + \underline{R_m} = \int_{\partial\tau} \underline{t}(\underline{x},\underline{u},t)\,d\sigma + \int_{\tau} \rho \underline{f}\, d\underline{x} = 0$$

Per il tetraedro τ l'eq.ne di equilibrio diventa

$$\sum_{i=1}^{3} \underline{t}(\underline{x},-\underline{e_i},t)\,d\sigma_i + \underline{t}(\underline{x},\underline{u},t)\,d\sigma + \rho\underline{f}\,dx = 0$$

. dx è il volume del tetraedro

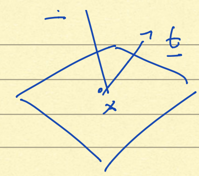
$$\sum_{i=1}^{3} \underline{t}(\underline{x},-\underline{e_i},t)\,n_i\,\cancel{d\sigma} + \underline{t}(\underline{x},\underline{u},t)\,\cancel{d\sigma} + \rho\underline{f}\,\frac{dx}{d\sigma} = 0 \qquad d\sigma \to 0$$

$$\frac{dx}{d\sigma} \to 0 \quad \text{se} \quad d\sigma \to 0$$

dx è infinitesimo di ordine superiore a $d\sigma_i$ e $d\sigma$

4 ↑

Nel limite $d\sigma \to 0$ ho



$$\underline{t}(\underline{x},\underline{n},t) = -\sum_{i=1}^{3} \underline{t}(\underline{x},-\underline{e}_i,t)\, n_i$$

Per il principio di azione e reazione

$$\boxed{\underline{t}(\underline{x},\underline{n},t) = \sum_{i=1}^{3} \underline{t}(\underline{x},\underline{e}_i,t)\, n_i}$$

Se definisco la matrice $\mathbb{T}(\underline{x},t)$ come la matrice le cui colonne sono $\underline{t}(\underline{x},\underline{e}_i,t)$

$$\mathbb{T} = \left(\underline{t}_{|\underline{e}_1} \,;\, \underline{t}_{|\underline{e}_2} \,;\, \underline{t}_{|\underline{e}_3} \right) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix}$$

- La simmetria di $\mathbb{T}$ si determina imponendo il bilancio del momento angolare

$$\Longrightarrow \boxed{\underline{t}(\underline{x},\underline{n},t) = \mathbb{T}(\underline{x},t)\,\underline{n}}$$

Torniamo all'eq.ne di bilancio

$$\int_{\Omega_t} \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\nabla \underline{v})\underline{v} \right) d\underline{x} = \int_{\partial\Omega_t} \mathbb{T}\underline{n}\, d\sigma + \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}\, d\underline{x}$$

applico il teo
della divergenza
alle comp.ti di $\mathbb{T}\underline{n}$

$$\int_{\Omega_t} \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\nabla \underline{v})\underline{v} \right) d\underline{x} = \int_{\Omega_t} \mathrm{div}(\mathbb{T})\, d\underline{x} + \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}\, d\underline{x}$$

$$\operatorname{div}\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial T_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{12}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{13}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial T_{12}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{23}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial T_{13}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{23}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{33}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Per l'arbitrarietà di Ω_t

Bilancio del momento lineare $$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\nabla \underline{v})\underline{v}\right) = \operatorname{div}\mathbb{T} + \rho \underline{f}}$$

Bilancio di massa $$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0}$$

Il problema non è "chiuso" $\rho, \underline{v}, \mathbb{T}$ sono 10 incognite ma abbiamo solo 4 equazioni

- Dobbiamo scrivere $\mathbb{T}$ in funzione delle variabili cinematiche (dove l'equazione costitutiva del materiale)

- Noi considereremo i cosiddetti fluidi Newtoniani

$$\boxed{\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \mu\left(\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^T\right)} \; *$$ p pressione Pascal

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ μ è il coefficiente di viscosità $[\mu] = Pa \cdot s$

Equazione di bilancio del momento per i fluidi Newtoniani (*)
omogenei (ρ = costante) $\Rightarrow$ incomprimibili $-p\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\operatorname{div}} \underline{v} = 0 \\ \rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\nabla \underline{v})\underline{v}\right) = \operatorname{div}\left(-p\mathbb{I} + \mu(\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^T)\right) + \rho \underline{f} \end{cases}$$

$$\operatorname{div}(-p\mathbb{I}) = -\nabla p$$

$$\operatorname{div}(\mu(\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^T)) = \mu \operatorname{div}(\nabla \underline{v}) + \mu \operatorname{div}(\nabla \underline{v}^T) =$$

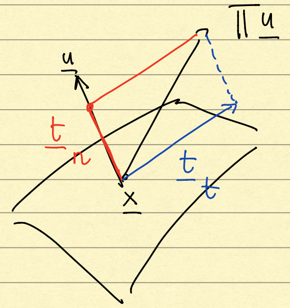
$\operatorname{div}(\nabla \underline{v}) =$ per esercizio è $= \Delta \underline{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{div}(\nabla \underline{v}^T) = \nabla(\underbrace{\operatorname{div} \underline{v}}_{=0}) = 0$$

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{div} \underline{v} = 0 \\ \rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\nabla \underline{v})\underline{v}\right) = -\nabla p + \mu \Delta \underline{v} + \rho \underline{f} \end{cases}}$$

NAVIER-STOKES incomprimibile

Sforzo (Stress)



$\mathbb{T}$ tensore di Cauchy

$\underline{t}_n = (\mathbb{T}\underline{n} \cdot \underline{n})\underline{n} \rightsquigarrow$ legata a p

$\underline{t}_t = \mathbb{T}\underline{n} - (\mathbb{T}\underline{n} \cdot \underline{n})\underline{n}$. è legato ai termini extra diagonali di $\mathbb{T}$

FLUIDI I fluidi sono mezzi continui che in condizioni statiche non esibiscono "sforzi di taglio" (la componente tangenziale dello stress è nulla)

FLUIDI (perfetti, o ideali, inviscidi) sono i fluidi che anche in condizioni "dinamiche" non hanno sforzi di taglio

I fluidi perfetti si ottengono ponendo $\mu = 0$ nell'equazione $\mathbb{T} = -p\mathbb{I} + \cancel{\mu(\ldots)}$

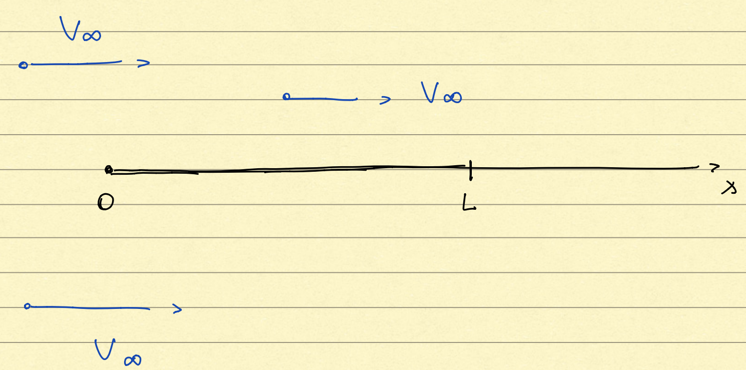
In questo caso le equazioni di moto diventano

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{div} \underline{v} = 0 \\ \rho\left(\dfrac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\nabla \underline{v})\underline{v}\right) = -\nabla p + \rho \underline{f} \end{cases}}$$

Equazioni di Eulero

STRATO LIMITE MECCANICO

Considero una lastra piana con un getto di "aria" che va a scontrarsi con la lastra



Scrivo le equazioni di Navier Stokes per il fluido (aria) trascurando le forze di massa. Considero il sistema come 2D

$\underline{v} = (v_1, v_2)$

$$\boxed{\begin{cases} v_{1x} + v_{2y} = 0 \\ \rho(\cancel{v_{1t}} + v_1 v_{1x} + v_2 v_{1y}) = -p_x + \mu(v_{1xx} + v_{1yy}) \\ \rho(\cancel{v_{2t}} + v_1 v_{2x} + v_2 v_{2y}) = -p_y + \mu(v_{2xx} + v_{2yy}) \end{cases}}$$

Consideriamo il caso stazionario

Condizioni al contorno

$$\begin{cases} \lim\limits_{y\to+\infty} \underline{v} = V_\infty \underline{e_1} & V_\infty > 0 \\ \lim\limits_{y\to+\infty} p = p_0 & p_0 \text{ cost.} \\ \underline{v} = 0 \text{ su } y=0 & x \geq 0 \end{cases}$$

"SCALING" (Riduco il pb.mo in forma adimensionale)

$x = \tilde{x} L \qquad y = H\tilde{y}$ (H è lo spessore dello strato limite (incognito))

Ipotesi di Prandtl è $\frac{H}{L} = \varepsilon \ll 1$

$$v_1 = V_\infty \tilde{v}_1 \qquad v_2 = (\varepsilon V_\infty)\tilde{v}_2 \qquad p = (\rho V_\infty^2)\tilde{p}$$

$$\begin{cases} \tilde{v}_{1x} + \tilde{v}_{2y} = 0 \\ \rho \frac{V_\infty^2}{L}\left(\tilde{v}_1 \tilde{v}_{1x} + \tilde{v}_2 \tilde{v}_{1y}\right) = -\left(\frac{\rho V_\infty^2}{L}\right)\tilde{p}_x + \left(\frac{\mu V_\infty}{H^2}\right)\left(\varepsilon^2 \tilde{v}_{1xx} + \tilde{v}_{1yy}\right) \\ \rho \frac{V_\infty^2 \varepsilon}{L}\left(\tilde{v}_1 \tilde{v}_{2x} + \tilde{v}_2 \tilde{v}_{2y}\right) = -\left(\frac{\rho V_\infty^2}{H}\right)\tilde{p}_y + \left(\frac{\varepsilon \mu V_\infty}{H^2}\right)\left(\varepsilon^2 \tilde{v}_{2xx} + \tilde{v}_{2yy}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{v}_{1x} + \tilde{v}_{2y} = 0 \\ \left(\tilde{v}_1 \tilde{v}_{1x} + \tilde{v}_2 \tilde{v}_{1y}\right) = -\tilde{p}_x + \left(\boxed{\frac{\mu}{\rho V_\infty L}} \cdot \boxed{\frac{L^2}{H^2}}\right)\left(\varepsilon^2 \tilde{v}_{1xx} + \tilde{v}_{1yy}\right) \\ \left(\tilde{v}_1 \tilde{v}_{2x} + \tilde{v}_2 \tilde{v}_{2y}\right) = -\frac{\tilde{p}_y}{\varepsilon^2} \left(\frac{\mu}{\rho V_\infty L} \cdot \frac{L^2}{H^2}\right)\left(\varepsilon^2 \tilde{v}_{2xx} + \tilde{v}_{2yy}\right) \end{cases}$$

Pb. non dimensionale riscalato

$$\begin{cases} \lim\limits_{y \to +\infty} \tilde{V}_1 = 1 \\ \lim\limits_{y \to +\infty} \tilde{p} = \dfrac{p_0}{\rho \tilde{V}_\infty} = \tilde{p}_0 \\ \tilde{V}_1 = \tilde{V}_2 = 0 \quad \text{su } \tilde{y} = 0 \end{cases}$$

Reynolds number $\Rightarrow Re = \dfrac{\rho V_\infty L}{\mu}$

(Rapporto fra le forze inerziali e le forze viscose)

$$\frac{H^2}{L^2} = \varepsilon^2$$

Hyp

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{Re\,\varepsilon^2} = O(1) \qquad \frac{1}{Re\,\varepsilon^2} = \alpha = O(1)$$

SISTEMA (ometto i $\sim$

$$\begin{cases} V_{1x} + V_{2y} = 0 \\ V_1 V_{1x} + V_2 V_{1y} = -p_x + \alpha\left(V_{1xx}\varepsilon^2 + V_{1yy}\right) \\ V_1 V_{2x} + V_2 V_{2y} = -p_y/\varepsilon^2 + \alpha\left(V_{2xx}\varepsilon^2 + V_{2yy}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} V_1|_\infty = 1 \\ p|_\infty = p_0 \\ V_1 = V_2 = 0 \quad \text{su } y = 0 \end{cases}$$