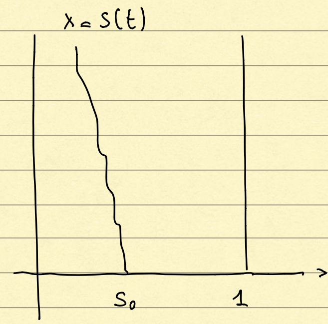
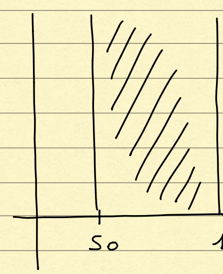
$$(P_D)\quad \begin{cases} C_t - C_{xx} = 0 \\ C(x,0) = \hat{C}(x) \\ C_x(1,t) = 0 \\ -\lambda \dot{s} = \theta\, C(s,t) \\ \dot{s}\,[C(s,t) + \lambda] = -C_x(s,t) \\ s(0) = s_0 \end{cases}$$



$$\theta = \frac{t_D}{t_R} = \frac{L^2/D}{L/K} = \frac{LK}{D}$$

Caso 1 $\quad \theta \ll 1 \quad t_D \ll t_R$

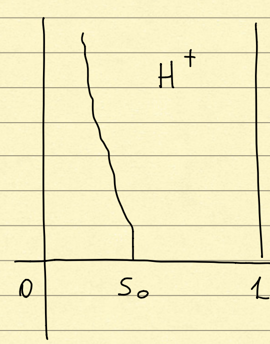
$$(P_{D1})\quad \begin{cases} C_t - C_{xx} = 0 \\ C(x,0) = \hat{C}(x) \\ C_x(1,t) = 0 \\ \dot{s} = 0 \Rightarrow s = s_0 \\ C_x(s_0,t) = 0 \end{cases}$$



(P_{D1}) si risolve con metodi standard (per esempio separazione delle variabili)

Caso 2 $\quad \theta \gg 1 \quad t_D \gg t_R$

$$(P_{D2})\quad \begin{cases} C_t - C_{xx} = 0 \\ C(x,0) = \hat{C}(x) \\ C_x(1,t) = 0 \\ C(s,t) = 0 \\ C_x(s,t) = -\lambda \dot{s} \\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

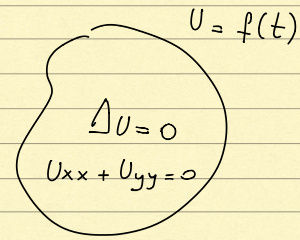


P_{D2} è esattamente uguale al problema di Stefan ad 1 fase nel caso 1D

(Si risolve con tecniche di p.to fisso)

PROBLEMA NELLA SCALA REATTIVA $\quad t_{ref} = t_R$

$$
(P_R)\quad
\begin{cases}
\theta C_t - C_{xx} = 0 \\
C(x,0) = \hat{c}(x) \\
C_x(1,t) = 0 \\
-\lambda \dot{s} = c(s,t) \\
\theta \dot{s}\left[c(s,t) + \lambda\right] = -C_x(s,t) \\
s(0) = s_0
\end{cases}
$$



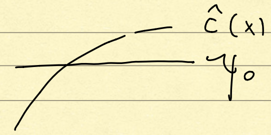
$U_{xx} = 0$ su $[a,b]$

$U'(a) = U_1(t)$

$U'(b) = U_2(t)$

CASO 1 $\quad \theta \ll 1 \quad t_D \ll t_R$

$$
(P_{R1})\quad
\begin{cases}
C_{xx} = 0 \\
C_x(1,t) = 0 \\
-\lambda \dot{s} = c(s,t) \\
C_x(s,t) = 0 \\
s(0) = s_0
\end{cases}
$$



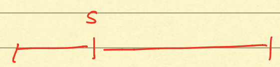
$C_{xx} = 0 \qquad C_x = h(t) \implies h(t) \equiv 0 \implies C_x \equiv 0$

$C = \psi(t) \implies \boxed{\psi(t) = -\lambda \dot{s}}$

Suppongo di conoscere $\psi(0) = \psi_0$ che rappresenta la concentrazione di ioni H^+ dopo un "brevissimo" intervallo in cui opero la diffusione

$$\psi_0 \simeq \int_{s_0}^{1} \hat{c}(x)\,dx \quad \left(\text{Quantità di ioni } H^+ \text{ che ho all'istante } t=0\right)$$

Per risolvere $\psi(t) = -\lambda\dot{s}$ faccio questo bilancio



$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left[\int_0^{s(t)} \lambda\, dx\right]}_{\text{mosso molare di reagenti}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left[\int_{s(t)}^{1} \psi(t)\, dx\right]}_{\text{mosso molare di } H^+}$$

$$\lambda s(t) - \psi(t)(1-s(t)) = Cost = \lambda s_0 - \psi_0(1-s_0)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{(1-s)}\left[\lambda s + \underbrace{\psi_0(1-s_0)-\lambda s_0}_{=:\gamma}\right] = \frac{1}{(1-s)}\left[\lambda s+\gamma\right]$$

$$\boxed{\begin{cases}\lambda\dot{s} = \dfrac{\lambda s+\gamma}{s-1}\\[2ex] s(0)=s_0\end{cases}}$$

Pb. mo di Cauchy che mi descrive l'evoluzione di s

$$\int_0^t \frac{\dot{s}(s-1)}{\lambda s+\gamma} = \int_0^t \frac{1}{\lambda} = \frac{t}{\lambda} = \int_{s_0}^{s(t)} \frac{(\xi-1)}{(\lambda\xi+\gamma)}\, d\xi$$

$$\begin{array}{l|l} \xi - 1 & \lambda\xi+\gamma \\ \hline -\xi - \frac{\gamma}{\lambda} & \frac{1}{\lambda}\end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\xi-1}{\lambda\xi+\gamma} = \frac{1}{\lambda} - \left(1+\frac{\gamma}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda\xi+\gamma}$$

$$\frac{t}{\cancel{\lambda}} = \left[\frac{\xi}{\cancel{\lambda}} - \left(1+\frac{\gamma}{\lambda}\right)\ln(\lambda\xi+\gamma)\frac{1}{\cancel{\lambda}}\right]_{s_0}^{s(t)}$$

$$\lambda s(t)+\gamma = \lambda s - \lambda s_0 + \psi_0(1-s_0)$$

$$\lambda s_0+\gamma = \psi_0(1-s_0) > 0$$

$$\boxed{t = t(s) = s - s_0 - \left(1+\frac{\gamma}{\lambda}\right)\ln\frac{\lambda s+\gamma}{\lambda s_0+\gamma}}$$

$t = t(s)$ invertendo mi do $s = s(t)$

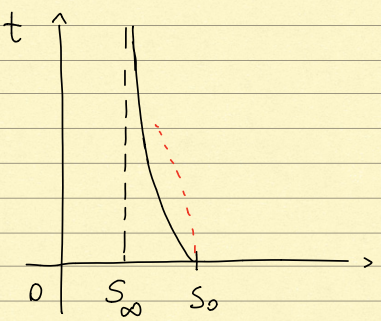
$$\dot s(0) = \dot s_0 = \frac{\lambda s_0+\gamma}{(s_0-1)} = \frac{\cancel{\lambda s_0} - \cancel{\lambda s_0} + \psi_0(1-s_0)}{(s_0-1)} = -\psi_0 < 0$$

$$\lambda \dot s = \frac{\lambda s+\gamma}{s-1}$$

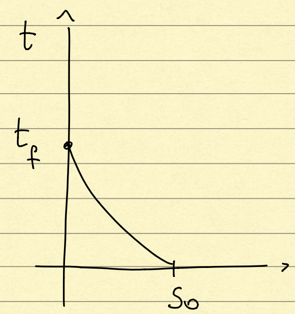
Quindi inizialmente la mia frontiera $x = s(t)$ decresce

$$\lambda\frac{ds}{dt} = \frac{\lambda s+\gamma}{s-1}$$

CASO A



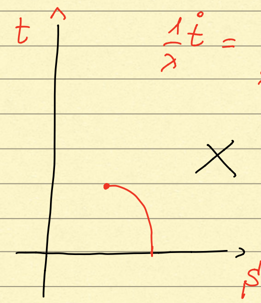
CASO B



CASO C

$$\frac{1}{\lambda}\frac{dt}{ds} = \frac{s-1}{\lambda s+\gamma}$$

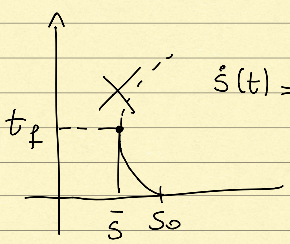
$$\frac{1}{\lambda}\dot t = \frac{s-1}{\lambda s+\gamma}$$



Non esaurisco tutto il reagente

Esaurisco il reagente in un tempo finito t_f

CASO D



$$\dot s(t) = 0 \Rightarrow \lambda\bar s - \lambda s_0 + \psi_0(1-s_0) = 0$$

$$\lambda\bar s = \underbrace{\lambda s_0 - \psi_0(1-s_0)}_{-\gamma} > 0$$

$$\lambda\bar s + \gamma = 0$$

$$\boxed{t = t(s) = s - s_0 - \left(1+\frac{\gamma}{\lambda}\right)\ln\left(\frac{\lambda s+\gamma}{\lambda s_0+\gamma}\right)}$$

$$t_f = \bar{s} - s_0 - \left(1+\frac{\gamma}{\lambda}\right)\ln(0^+) \quad \Rightarrow \quad t_f = +\infty$$

Quindi i casi C e D non si verificano mai !!

Il caso A si ha $\lambda s_0 > \psi_0(1-s_0)$ $(\gamma<0)$

Provate x esercizio

Il caso B si ha $\lambda s_0 < \psi_0(1-s_0)$ $(\gamma>0)$

PROBLEMA nella scala reattiva per $\theta \gg 1$ $\qquad t_D \gg t_R$

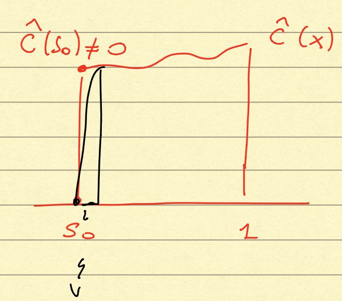
$$\theta c_t - c_{xx} = 0$$

$$c_t - \frac{1}{\theta} c_{xx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} c_t = 0 \\ c(x,0) = \hat{c}(x) \\ c(s_0,t) = 0 \\ \dot{s} = 0 \end{cases}}$$

$$\theta \dot{s}\,[c(s,t)+\lambda] = -c_x(s,t)$$

$$-\dot{s}\,[c(s,t)+\lambda] = \frac{1}{\theta}\cancel{c_x(s,t)} \quad \Rightarrow \quad \dot{s} = 0$$

$$-\lambda \dot{s} = c(s,t)$$



Strato limite in cui reazione e diffusione si bilanciano

$$c_t = 0 \quad \Rightarrow \quad c(x,t) = \hat{c}(x)$$

$\hat{c}(s_0) \neq 0 \Rightarrow$ la condizione $c(s_0,t) = 0$ non è mai soddisfatta

Suppongo che $\exists$ uno strato limite in prossimità di s_0 in cui la diffusione e la reazione sono confrontabili. Chiamiamo h lo spessore (dimensionale) dello strato limite

Tempi caratteristici sono $\quad t_D^h = \dfrac{h^2}{D} \qquad t_R^h = \dfrac{h}{K}$

$$\frac{t_D^h}{t_R^h} = \frac{hK}{D} = O(1)$$

Per semplicità prendiamo $\frac{hk}{D} = 1 \Rightarrow h = \frac{D}{k}$

Sia x^* è la variabile dimensionale $\quad x = \frac{x^*}{L} \qquad \xi = \frac{x^*}{h}$

$$xL = \xi h \qquad x = \xi \frac{h}{L} \qquad h/L = \eta \ll 1$$

$$\boxed{\frac{D}{KL} = \eta = \frac{1}{\theta}} \qquad \theta = \frac{t_D}{t_R} = \frac{L^2/D}{L/k} = \frac{Lk}{D}$$

$$\boxed{x = \eta \xi = \frac{1}{\theta}\xi}$$

ξ è la variabile spaziale nello scala dello strato limite

x " " " dello sbarretto

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \xi} \qquad \theta C_t - C_{xx} = 0 \qquad \theta C_t - \theta^2 C_{\xi\xi} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \theta \frac{\partial}{\partial \xi} \qquad \cancel{\frac{1}{\theta}} C_t - C_{\xi\xi} = 0$$

$\theta \gg 1$

$$\cancel{C_x(1,t) = 0}$$

$$\theta \dot{s}\left[C + \lambda\right]_{|s} = -C_x(s,t)$$

$$\cancel{\theta}\dot{s}\left[C(s,t) + \lambda\right] = -\cancel{\theta} C_\xi(s,t)$$

$$\boxed{\begin{cases} C_{\xi\xi} = 0 \\ -\lambda\dot{s} = C(s,t) \\ C_\xi(s,t) = -\dot{s}\left[C(s,t) + \lambda\right] \end{cases} \quad (*)}$$

Pb. ma nello strato limite

SOLUZIONE di $(*)$ $\quad C_{\xi\xi} = 0 \qquad C_\xi = -\dot{s}\left[-\lambda\dot{s} + \lambda\right] = \lambda\dot{s}\left[\dot{s} - 1\right]$

$$C = \lambda\dot{s}\left[\dot{s} - 1\right]\xi + f(t)$$

$$C(s,t) = -\lambda\dot{s} = \lambda\dot{s}(\dot{s} - 1)s + f(t) \quad \rightarrow \quad f(t) = -\lambda\dot{s} - \lambda\dot{s}(\dot{s} - 1)s$$

$$\boxed{c = \lambda \dot{s}(\dot{s}-1)(\xi - s) - \lambda \dot{s}}$$

Per fare il "MATCHING" con la soluzione nello strato L (ossia $\hat{c}(x)$)

s^* (soluzione dimensionale)

$[s^*, s^*+h]$ è lo strato limite dimensionale

$[s, s+1]$ è lo strato limite adimensionale riscalato con h

↳ è la "fine" dello strato limite

MATCHING $\quad \hat{C}(s) \cong \hat{C}(s+\eta, t) = c(s+1, t)$

$$\begin{cases} \hat{c}(s) = \lambda \dot{s}(\dot{s}-1) - \lambda \dot{s} = \lambda \dot{s}\,[\dot{s}-2] \\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda \dot{s}^2 - 2\lambda \dot{s} - \hat{c}(s) = 0 \\ s(0) = s_0 \end{cases} \qquad \dot{s} = \frac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 + 4\hat{c}(s)\lambda}}{2\lambda}$$

$$\dot{s} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{\hat{c}(s)}{\lambda}}$$

Butto via il segno + perché non ha senso fisico

$$\begin{cases} \dot{s} = 1 - \sqrt{1 + \frac{\hat{c}(s)}{\lambda}} \\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

(Si risolve numericamente)