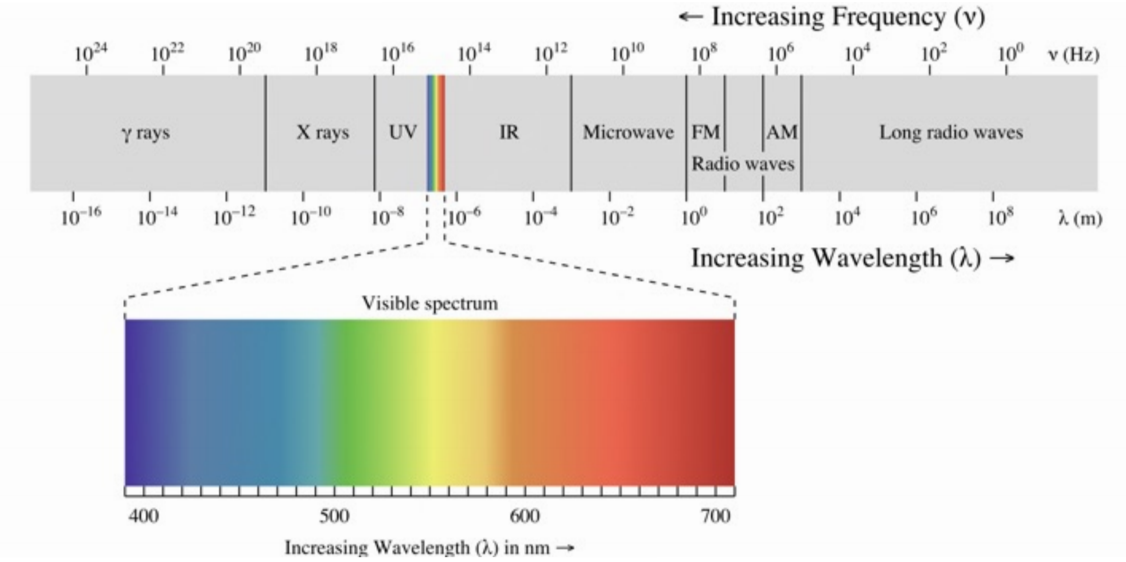
lunedì 17 settembre 2019

- Dalle equazioni di Maxwell discende l'esistenza delle onde elettro-magnetiche



- LUCE VISIBILE è la porzione dello spettro e-m a cui è sensibile l'occhio umano

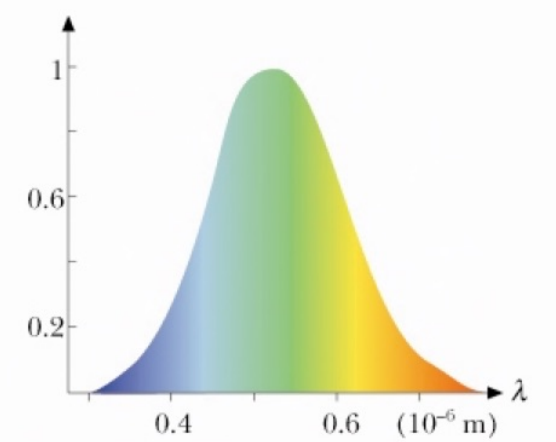


Figura 10.29
Sensibilità media relativa dell'occhio ai diversi colori.

$400\,nm \lesssim \lambda \lesssim 800\,nm$

- L'Ottica studia la propagazione della luce

La discussione sulla natura corpuscolare o ondulatoria della luce risale al XVII sec.

Newton: luce composta da piccolissime particelle di materia emesse dalle sostanze luminose in tutte le direzioni e che si propagano in linea retta

Huygens: luce composta da un insieme di onde meccaniche che si propagano in linea retta

XVIII secolo:

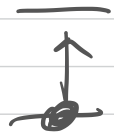
Thomas Young: esperimento della doppia fenditura che si spiega solo con la teoria ondulatoria

XX secolo: effetto fotoelettrico che solo la teoria corpuscolare riesce a spiegare

(lo studio e l'interpretazione dell'effetto fotoelettrico sono alla base dello sviluppo della MECCANICA QUANTISTICA)

per i fenomeni di INTERAZIONE RADIAZIONE – MATERIA
è più adeguata una trattazione CORPUSCOLARE

es: EFFETTO FOTOELETTRICO
ASSORBIMENTO ed EMISSIONE di atomi



FOTONI $E = h\nu$ $\quad p = \hbar k = h/\lambda$

DUALITA' ONDA – CORPUSCOLO

SPETTROSCOPIA OTTICA

studio della materia attraverso l'analisi dello spettro della luce emessa o assorbita

SORGENTE – SEPARATORE DI λ – RIVELATORE

Come costruire il separatore di λ: ci basiamo su un fenomeno descritto dall'ottica ondulatoria: INTERFERENZA fra sorgenti

Equazioni di Maxwell

Voi avete visto l'anno scorso

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{D} = \rho \\ \nabla \wedge \bar{E} = 0 \end{cases} \qquad \bar{D} = \varepsilon \bar{E}$$

vedrete che studiando il campo magnetico $\bar{H}$, $B = \mu \bar{H}$ ← induzione magnetica

$\bar{H}$ → campo magnetico

μ → permeabilità magnetica

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{B} = 0 \\ \nabla \wedge \bar{H} = \bar{J} \end{cases}$$

Queste 4 eq. messe insieme danno le eq. di Maxwell per campi statici.

Se si hanno campi variabili nel tempo

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla \cdot \bar{D} = \rho \\ &\nabla \wedge \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ &\nabla \cdot \bar{B} = 0 \\ &\nabla \wedge \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \end{aligned}}$$

Vediamo come dalle equazioni di Maxwell si trovi che il campo elettromagnetico si propaga come un'onda.

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla \cdot \bar{D} = \rho \\ &\nabla \wedge \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ &\nabla \cdot \bar{B} = 0 \\ &\nabla \wedge \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \end{aligned}}$$

$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$ induzione dielettrica

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu}$$

ε costante dielettrica

μ permeabilità magnetica

ρ densità di carica

$\bar{J}$ densità di corrente

---

* Nota sui nomi

$B \rightarrow$ campo magnetico
$H \rightarrow$ campo magnetizzante

oppure

$H \rightarrow$ campo magnetico
$B \rightarrow$ induzione magnetica

Richiami

$$\nabla \wedge \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

ROTORE (vettore) *

determinante di

$$\nabla \wedge \bar{v} = \bar{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \bar{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla \cdot \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

DIVERGENZA (scalare)

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}$$

GRADIENTE (vettore)

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

LAPLACIANO per uno scalare

$$\boxed{\nabla \wedge (\nabla \wedge \bar{v}) = \nabla(\nabla \cdot \bar{v}) - \nabla^2 \bar{v}}$$

$$\nabla^2 \bar{v} = \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)\bar{k} =$$

$$\nabla^2 v_x \bar{i} + \nabla^2 v_y \bar{j} + \nabla^2 v_z \bar{k}$$

Le equazioni di Maxwell nel vuoto ($\rho = 0$, $\bar{J} = 0$) diventano:

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla \cdot \bar{D} = 0 \\ &\nabla \wedge \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ &\nabla \cdot \bar{B} = 0 \\ &\nabla \wedge \bar{H} = +\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \end{aligned}}$$

applicando il rotore alla seconda equazione otteniamo:

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \bar{E}) = -\nabla \wedge \left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right)$$

poiché si può dimostrare che

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \bar{v}) = \nabla (\nabla \cdot \bar{v}) - \nabla^2 \bar{v}$$

otteniamo

$$\nabla (\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \bar{B}) \qquad (1)$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = 0 \longrightarrow \nabla \cdot \bar{E} = 0$$

$$\nabla \wedge \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \longrightarrow \nabla \wedge \frac{\bar{B}}{\mu_0} = \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \wedge \bar{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

e quindi la (1) diventa

$$-\nabla^2 \bar{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \left(-\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}\right)$$

$$\nabla^2 \bar{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

poniamo $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \bar{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}} \quad (2)$$

equazione di D'Alembert o delle onde

Dalla quarta equazione di Maxwell potremmo ottenere la stessa relazione anche per il campo magnetico.

La (2) corrisponde a 3 equazioni scalari per le 3 componenti del campo elettrico E_x, E_y, E_z

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{cases}$$

sono equazioni di onde che si propagano con velocità c.

(par. 10.3 Mazzoldi - Nigro - Voci)

onde piane $\xrightarrow{\text{Maxwell}}$ $\overline{E}$ e $\overline{B}$ sono TRASVERSI

Consideriamo il caso di onde e-m piane che si propagano lungo x

$$\overline{E} = \overline{E}(x, t)$$

il campo elettrico è costante sui piani perpendicolari alla direzione di propagazione

Si può dimostrare che le onde piane sono TRASVERSALI hanno cioè componenti solo perpendicolari alla direzione di propagazione:

Consideriamo la I eq. di Maxwell:

$$\nabla \cdot \overline{E} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

ma per un'onda piana che si propaga lungo x E non dipende né da y né da z: $\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \longrightarrow$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad \text{e per lo stesso motivo} \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

dalla IV eq. di Maxwell si ottiene

$$\nabla \wedge \bar{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \qquad \begin{cases} \left(\cancel{\dfrac{\partial B_z}{\partial y}} - \cancel{\dfrac{\partial B_y}{\partial z}}\right) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_x}{\partial t} \\ \left(\cancel{\dfrac{\partial B_x}{\partial z}} - \dfrac{\partial B_z}{\partial x}\right) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_y}{\partial t} \\ \left(\dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \cancel{\dfrac{\partial B_x}{\partial y}}\right) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_y}{\partial t} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial x} \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_z}{\partial t} = +\dfrac{\partial B_y}{\partial x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

E_x se c'è è costante ma abbiamo detto $\rho = 0 \implies E_x = 0$

$E_x = 0 \longrightarrow \bar{E} \perp x$ CAMPO TRASVERSO

Dalla II eq. di Maxwell

$$\nabla \wedge \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \qquad \begin{cases} \left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}}}_{=0} - \underbrace{\cancel{\frac{\partial E_y}{\partial z}}}_{=0} \right) = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \left(\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial z}} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}} \right) = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases}$$

anche per il campo magnetico abbiamo trovato

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \longrightarrow$$ B_x se c'è è costante

ma abbiamo detto che

$$\overline{J} = 0 \rightarrow B_x = 0$$

anche $\overline{B} \perp x \longrightarrow \overline{B}$ è trasverso

Consideriamo quindi una onda piana che si propaga lungo x e il cui campo $\bar{E}$ è diretto lungo y (polarizzazione lineare)

$$\bar{E} = E_y(x,t)\,\bar{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}} + \cancel{\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}} + \cancel{\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}} = \dfrac{1}{c^2}\cancel{\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}} \\ \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \cancel{\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}} + \cancel{\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \cancel{\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}} + \cancel{\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}} + \cancel{\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}} = \dfrac{1}{c^2}\cancel{\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}} \end{cases}$$

rimaniamo con un'unica equazione

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad (3)$$

Una possibile soluzione di questa eq. è una onda monocromatica

$$\bar{E}(x,t) = \underbrace{E_0}_{\text{AMPIEZZA}}\,\bar{j}\,\cos(\underbrace{kx - \omega t + \phi}_{\text{FASE}})$$

Per semplicità possiamo prendere $\phi = 0$ (equivale ad una traslazione spaziale o temporale)

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -k^2 E_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(kx - \omega t)$$

che sostituite nella (3) danno

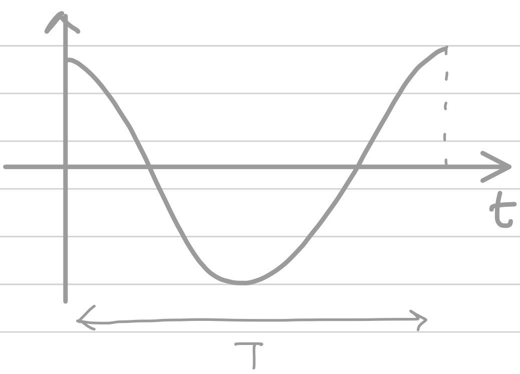
$$-k^2 E_0 \cos(kx-\omega t) = -\frac{1}{c^2}\omega^2 E_0 \cos(kx-\omega t)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \qquad \boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$ RELAZIONE DI DISPERSIONE

Vediamo di capire il significato di ω e k

$$E = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

fissiamo x E è una funzione periodica del tempo che si ripete per dopo un periodo T tale che



$$\omega T = 2\pi$$

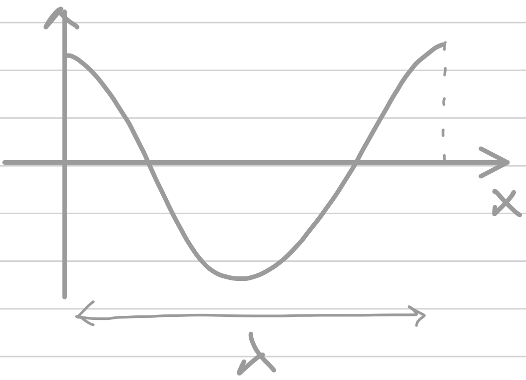
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

T PERIODO

ω PULSAZIONE

$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ FREQUENZA

fissando invece il tempo, E è una funzione periodica di x che si ripete su un intervallo λ tale che



$$k\lambda = 2\pi$$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

λ LUNGHEZZA D'ONDA

k NUMERO D'ONDE

$$k = \frac{\omega}{c} \longrightarrow \frac{\cancel{2\pi}}{\lambda} = \frac{\cancel{2\pi}\nu}{c} \longrightarrow \lambda\nu = c$$

VELOCITÀ DELLA LUCE

nel vuoto:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$\varepsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}\ \frac{C^2}{m^2 N}$$

$$\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\ \frac{m\,kg}{C^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8.85 \cdot 4\pi\ 10^{-19}}} \sim 2.99\ 10^8\ m/s$$

dal 1983 si considera il valore di c come esatto e pari a

$$\boxed{c = 2.99792458\ 10^8\ m/s}$$ (*)

e a partire da esso viene definita la lunghezza del metro nel Sistema Internazionale

in un mezzo

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}$$

n è l' INDICE DI RIFRAZIONE DEL MEZZO

$$n \geqslant 1$$

(*) confermato nell'ultima Conferenza Generale dei pesi e delle misure del 2018

(par. 10.2 Mazzoldi - Nigro - Voci)

$\bar{B} \perp \bar{E}$ e $|B| = |E|/c$

Prendiamo nuovamente la II seconda eq. di Maxwell:

$$\nabla \wedge \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

con $E = E_0 \cos(kx - \omega t)$

$$B = B_0 \cos(kx - \omega t)$$

otteniamo

$$\nabla \wedge \bar{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E}{\partial x}\bar{k} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$\rightarrow$ $\bar{B}$ è diretto lungo z e quindi è $\perp$ a E

$$-E_0 k \sin\cancel{(kx - \omega t)} = -B_0 \omega \sin\cancel{(kx - \omega t)}$$

$$B_0 = E_0 \frac{k}{\omega} = \frac{E_0}{c}$$

$$|B| = \frac{|E|}{c}$$

Le onde elettromagnetiche possono propagar-
si anche in mezzi diversi dal vuoto

Le onde elettro-magnetiche possono propagarsi
anche in mezzi diversi dal vuoto con
velocita'
$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

si definisce

INDICE DI RIFRAZIONE DEL MEZZO
$$\boxed{n = \frac{c}{v}}$$

Polarizzazione

$\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono VETTORI è dunque necessario specificarne la DIREZIONE

$\vec{E}, \vec{B}$ trasversi $\longrightarrow$ la loro direzione è su piani $\perp$ alla direzione di propagazione

la direzione del vettore $\vec{E}$ viene chiamata POLARIZZAZIONE della luce

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \bar{j} \cos(kx - \omega t)}$$

POLARIZZAZIONE LINEARE (E oscilla lungo una direzione costante)

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \bar{j} \cos(kx - \omega t) \pm E_0 \bar{k} \sin(kx - \omega t)}$$

POLARIZZAZIONE CIRCOLARE

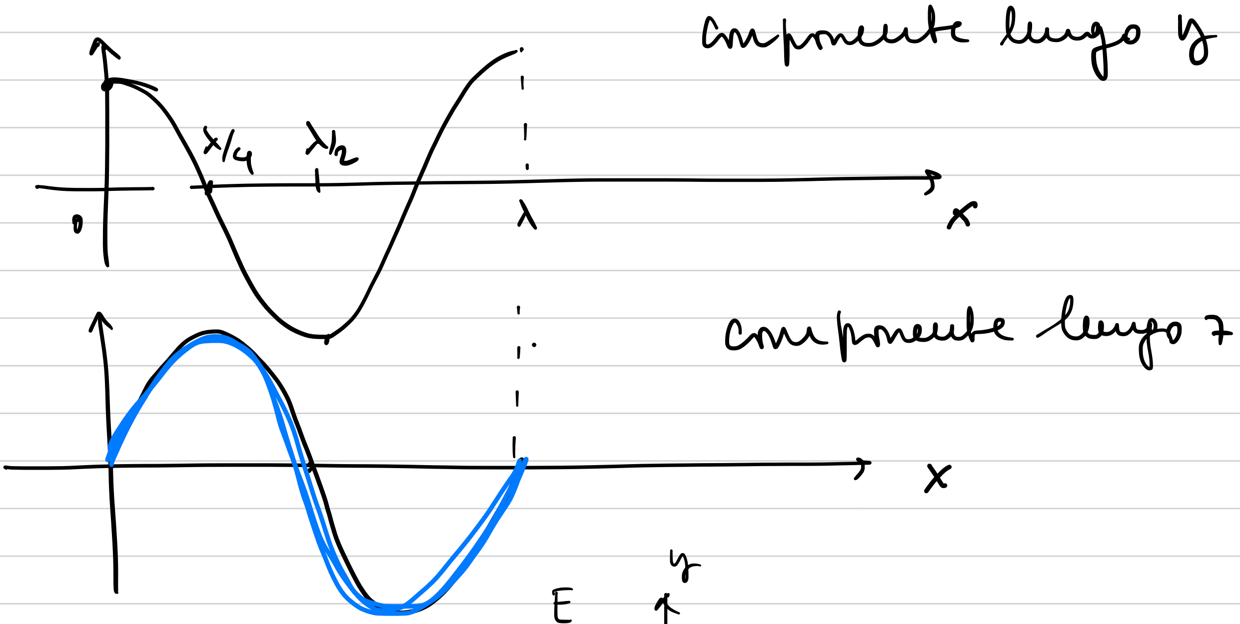
fissato il tempo $t = 0$

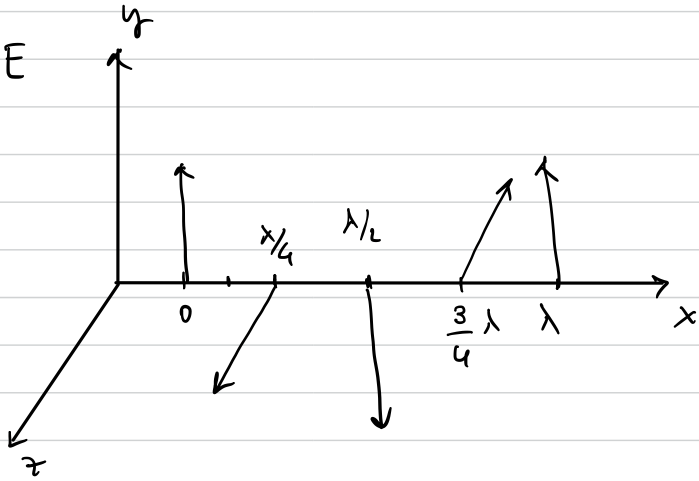
$$\vec{E} = E_0 \bar{j} \cos(kx) \pm E_0 \bar{k} \sin(kx)$$

la direzione di E ruota ma il suo modulo è costante.

POLARIZZAZIONE CIRCOLARE

$E_0 \bar{j} \cos(kx) + E_0 \bar{k} \sin(kx)$





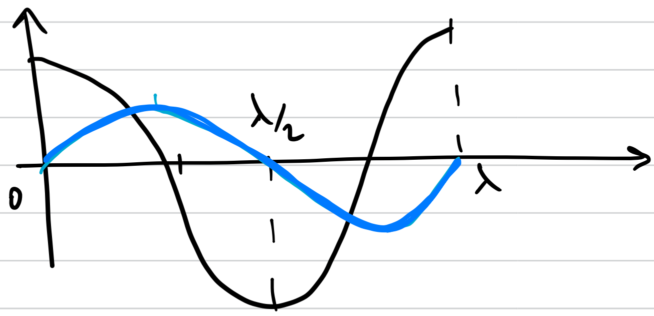
la direzione ruota
il modulo resta
costante

POLARIZZAZIONE ELLITTICA

$\vec{E} = E_{0y} \bar{j} \cos(kx - \omega t) + E_{0z} \bar{k} \cos(kx - \omega t)$

$E_{0y} \neq E_{0z}$ $\longrightarrow$ la direzione ed il modulo di E cambiano

a tempo fissato $t = 0$

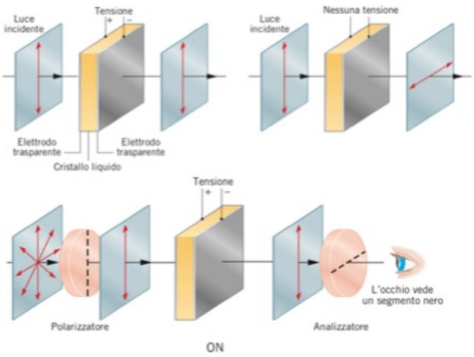


polarizzazione

Polaroid

il primo brevetto del 1929: cristalli di iodiochinina solfato o herapatite immersi in un film polimerico trasparente di nitrocellulosa. Nel processo di fabbricazione i cristalli sono allineati mediante un campo magnetico. Il materiale tende ad assorbire la luce polarizzata parallelamente alla direzione dell'allineamento dei cristalli, lasciando passare la luce perpendicolare ad essi: **polarizzatore**

Schermo a Cristalli Liquidi (LCD) molecole in funzione di un campo elettrico applicato possono ruotare la polarizzazione della luce



Occhiali per cinema 3D

Una delle tecniche utilizzate per ottenere una visione stereoscopica sfrutta la polarizzazione della luce: due immagini proiettate in rapida sequenza su di un apposito schermo riflettente, vengono discriminate da occhiali dotati di lenti polarizzate orientate ortogonalmente l'una rispetto all'altra.

esistono dei materiali che trasmettono solo luce polarizzata in una data direzione

POLARIZZATORI (anisotropia ottica)

ne è un esempio il materiale POLAROID brevettato per la prima volta nel 1929

occhiali polaroid

i materiali che la ruotano

ne sono un esempio i CRISTALLI LIQUIDI che sono usati negli schermi LCD (Liquid Crystal Display)