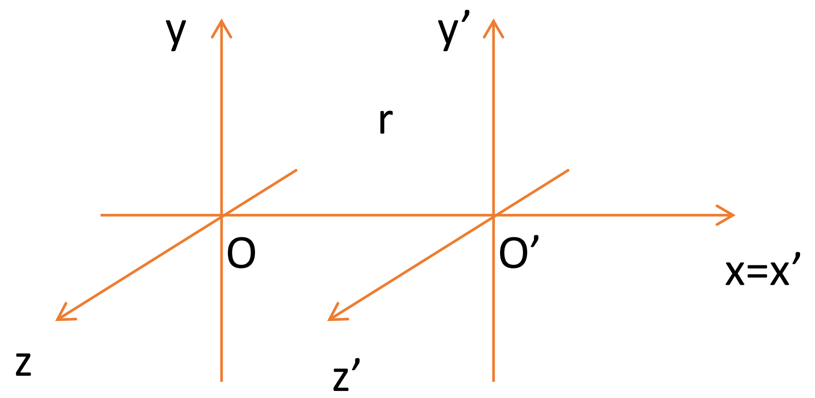
Approfondimenti Lezione 1

Mara Bruzzi

1. Cenni alla teoria della relatività ristretta

La velocità della luce nel vuoto è costante ed è indipendente dallo stato di moto rettilineo uniforme dell'osservatore.

Trasformazioni di Lorentz-Einstein:

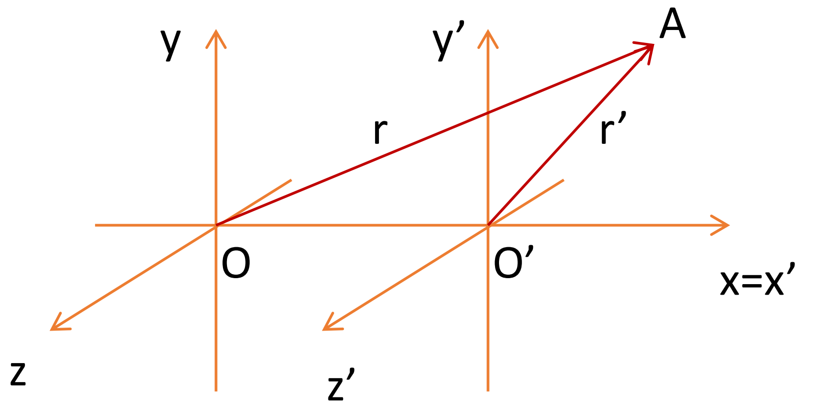


All'istante t =t'=0 O' coincide con O. Sia O che O' vedono la luce propagarsi con velocita' c . O' si muove di moto rettilineo uniforme rispetto a O con velocita' v.

Il punto A segna il fronte d'onda della luce , ha coordinate (x,y,z,t) per O e (x',y'z',t') per O'. Per O all'istante t il fronte d'onda è una sfera di raggio r = c t, con $r^2 = x^2+y^2+z^2$

Per O' all'istante t'
Il fronte d'onda è in
$r' = ct'$ con

$r'^2 = x'^2+y'^2+z'^2$



quindi valgono le :

$x^2+y^2+z^2 - c^2t^2 = 0$ (1)
$x'^2+y'^2+z'^2 - c'^2t'^2 = 0$ (2)

Abbiamo: y = y', z=z', OO'= vt. Si assumono le relazioni:

$x'=\gamma\,(x-vt)$; $t' = a(t-bx)$,

trasformazioni di Galileo se $\gamma=1$, a=1 b=0.

Sostituendo in (1), (2) si ottengono le relazioni:

$\gamma^2 - a^2b^2c^2 = 1$ (i)
$a^2 - \gamma^2v^2/c^2 = 1$ (ii)
$\gamma^2v - a^2b^2c^2 = 0$ (iii)

$$a = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad b = \frac{v}{c^2}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Risolvendo rispetto a: γ, a,b abbiamo:

Le trasformazioni compatibili con l'invarianza della velocità della luce sono quindi:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$y'=y$

Trasformazioni di Lorentz

$z'=z$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Sia m_0 la massa della particella quando essa è ferma relativamente all'osservatore, la quantità di moto della particella è pari a:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma\, m_0 v = mv$$

Dove abbiamo posto: $m = \gamma\, m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ massa effettiva

Allora posso esprimere l'energia cinetica della particella come:

$$E_K = \int F \cdot ds = \int \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) \cdot ds = \int v\, d\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right)$$

con: $$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right)$$

Integrando per parti $E_K = \int v d\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right)$ otteniamo:

$$E_K = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \int_0^v \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} - m_0 c^2$$

Combinando i primi due termini scriviamo infine: $E_K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_0 c^2 = (m - m_0) c^2$

Definiamo: **m_0c^2 = energia della particella a riposo**

→ Energia totale della particella (no energia potenziale)

$$E = m_0 c^2 + E_K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = mc^2$$

Quantità di moto ed energia

Sia m_0 la massa della particella quando essa è ferma relativamente all'osservatore, la quantità di moto (momento) della particella che si muove con velocità v rispetto all'osservatore è pari a:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma\ m_0 v = mv$$

Dove abbiamo posto: $m = \gamma\ m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ massa effettiva della particella relativamente all'osservatore.

Allora valgono anche :

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right)$$

$$E_K = \int F \cdot ds = \int \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) \cdot ds = \int v d\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right)$$

Integrando per parti $$E_K = \int v d\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right)$$ otteniamo:

$$E_K = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} - m_0 c^2$$

Combinando i primi due termini scriviamo infine:

$$E_K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_0 c^2 = (m - m_0) c^2$$

Definiamo: **m_0c^2 = energia della particella a riposo**

Energia totale della particella

E’ definita come somma dell’energia a riposo più l’energia cinetica (in assenza di energia potenziale):

$$E = m_0 c^2 + E_K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = mc^2$$

Può anche essere riscritta:

$$E = mc^2 = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$$

Se la particella ha **massa a riposo nulla**: $E = pc \rightarrow$ $p = E / c$

Fotoni come quanti di radiazione elettromagnetica

Sappiamo che l'onda elettromagnetica, oltre all'energia, trasporta momento. L'energia E e il momento p in un'onda elettromagnetica che viaggia nel vuoto sono legate dalla relazione **E = pc**.

Osserviamo che la relazione tra energia e momento di un'onda elettromagnetica è pari alla relazione di Einstein per una **particella di massa a riposo nulla**:

$$E = mc^2 = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} = pc$$

Poiché vale che $E = h\nu$ possiamo associare al **quanto di energia dell'onda elettromagnetica** la **particella fotone**, con le seguenti caratteristiche:

massa a riposo nulla, velocità nel vuoto pari a c;
Energia : $E_f = h\nu$;
momento: $p = E/c = h/\lambda$;

2. Entanglement quantistico

Nell’ **esperimento di Young** con un fascio di elettroni il passaggio dalla doppia fenditura produce una figura di interferenza sullo schermo. Problemi:

1) La meccanica quantistica stabilisce soltanto in modo probabilistico il punto in cui ogni particella colpirà lo schermo, specificando il livello di probabilità alta oppure bassa, ma **non è in grado di esprimere una previsione esatta di dove essa apparirà sullo schermo**.

2) **Che cosa succede alle particelle nel percorso che dalla sorgente le porta allo schermo?** Ogni particella è descritta da una funzione d'onda non localizzata, sembrerebbe interagire con entrambe le fenditure producendo una sorta di interferenza con se stessa, se la si considera come puntiforme però non può che attraversare una sola fenditura.

Interpretazione di Copenaghen*

In meccanica quantistica **i risultati delle misurazioni di variabili coniugate sono non deterministici**, anche conoscendo tutti i dati iniziali è impossibile prevedere il risultato di un singolo esperimento. Quindi, le affermazioni probabilistiche della meccanica quantistica sono **irriducibili**, nel senso che non riflettono la nostra conoscenza limitata di qualche variabile nascosta .

Osserviamo che invece nella fisica classica si ricorre alla probabilità anche se il processo è deterministico, in modo da sopperire a una nostra conoscenza incompleta dei dati iniziali .

Esempio: se conoscessi con precisione l'altezza da cui un dado viene lanciato, la sua velocità e l'angolo d'inclinazione sarebbe possibile conoscere a priori come poserà il dado sul tavolo utilizzando le leggi della meccanica.

Domande come: «Dov'era la particella prima che ne misurassi la posizione?», sono prive di senso, in quanto la meccanica quantistica studia esclusivamente quantità osservabili, ottenibili mediante processi di misurazione.

L'atto della misurazione causa il «collasso della funzione d'onda», nel senso che **quest'ultima è costretta dal processo di misurazione ad assumere i valori di uno a caso dei possibili stati permessi.**

* A tutt'oggi maggiormente condivisa fra gli studiosi ed ispirata ai lavori svolti nella capitale danese da Bohr e Heisenberg attorno al 1927

Obiezioni all'interpretazione di Copenaghen

Einstein: «*Dio non gioca a dadi*»; Bohr: "Einstein, smettila di dire a Dio cosa deve fare"

Paradosso di Einstein-Podolsky-Rosen (EPR): esperimento ideale teso a evidenziare che se in un sistema quantistico ipotizziamo condizioni quali realismo, località e completezza, ritenute ragionevolmente vere per qualunque teoria che descriva la realtà fisica senza contraddire la relatività, giungiamo a una contraddizione. EPR concludono che la teoria quantistica è incompleta.

Completezza : assenza di variabili nascoste

Località : i processi fisici non possono avere effetto immediato su elementi fisici di realtà in un altro luogo separato da quello in cui avvengono (in accordo con il fatto che la velocità della luce (relatività ristretta) è la velocità limite alla quale può viaggiare un qualunque tipo d'informazione).

Realismo: l'assunto per cui tutti gli oggetti debbono oggettivamente possedere dei valori preesistenti per ogni possibile misurazione prima che queste misurazioni vengano effettuate

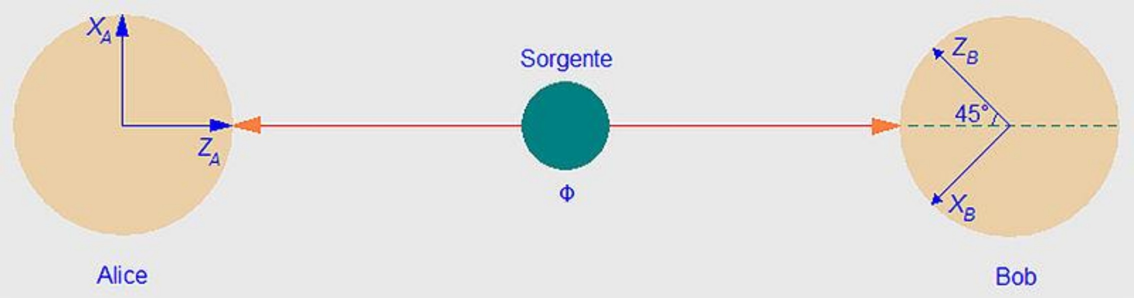
→ Einstein: «*Credi davvero che la luna non sia lì se non la guardi?*»

Paradosso EPR

Una **sorgente emette coppie di elettroni**, uno dei quali viene inviato alla destinazione *A* (Alice), l'altro viene inviato alla destinazione *B* (Bob). **Secondo la meccanica quantistica, possiamo sistemare la sorgente in modo che ciascuna coppia di elettroni emessi occupi uno stato quantistico detto singoletto di spin**, descritto come sovrapposizione quantistica di due stati, indicati con I e II.

I: l'elettrone *A* ha spin parallelo all'asse *z* (+*z*) e l'elettrone *B* ha spin antiparallelo (-*z*).
II: l'elettrone *A* ha spin -*z* e l'elettrone *B* ha spin +*z*.

Impossibile associare ad uno dei due elettroni nel singoletto di spin uno stato di spin definito: gli elettroni sono detti *entangled*, cioè intrecciati.



Alice misura lo spin lungo l'asse ottenendo e.g.: +*z*; secondo la meccanica quantistica la funzione d'onda che descrive lo stato di singoletto dei due elettroni collassa nello stato I, se Bob successivamente misurasse lo spin lungo l'asse *z*, otterrebbe -*z* con una probabilità del 100%. Analogamente, se Alice misurasse -*z*, Bob otterrebbe +*z*, sempre con una probabilità del 100%.

→ una misura eseguita su una parte di un sistema quantistico può propagare *istantaneamente* un effetto sul risultato di un'altra misura, eseguita successivamente su un'altra parte dello stesso sistema, **indipendentemente dalla distanza che separa le due parti → devono esistere variabili nascoste se si vogliono evitare "paradossali" effetti a distanza istantanei che contraddicono località e realismo.**

Benché proposto originariamente per mettere in luce l'incompletezza della meccanica quantistica, ulteriori sviluppi teorici e sperimentali hanno portato una gran parte dei fisici a considerare **il paradosso EPR** solo un illustre esempio di come la meccanica quantistica contrasti in modo stridente con le esperienze quotidiane del mondo macroscopico (per quanto la questione non sia assolutamente chiusa). In particolare il **teorema di Bell** (1964) afferma che nessuna teoria fisica locale e deterministica a variabili nascoste può riprodurre le predizioni della meccanica quantistica.

Bell ha dimostrato che la condizione di realismo locale impone alcune modificazioni (restrizioni) nelle correlazioni previste dalla meccanica quantistica tra i parametri di particelle definite entangled mentre, di converso, previsioni in completo accordo con la teoria quantistica implicano la rinuncia ad almeno uno fra determinismo e località.

Tecnologie di frontiera basate su entanglement quantistico:

Crittografia quantistica: si usano particelle entangled per trasmettere segnali che non possono essere intercettati senza lasciare traccia dell'intercettazione avvenuta;
Vedere ad esempio: Aspetti di Crittografia Moderna : http://www.clusit.it/download/Q01_web.pdf

Computazione quantistica: si usano stati quantistici intrecciati per eseguire molti calcoli in parallelo, permettendo velocità che non si possono raggiungere con i computer classici.
Vedere ad esempio: Introduzione alla Teoria dell'Informazione Quantistica : http://www.bo.imm.cnr.it/users/degliesposti/TIQ.pdf