Analisi Matematica 1

Anno Accademico 2013-2014

Roberto Monti

Versione del 18 Ottobre 2013

Contents

CHAPTER 1

Numeri naturali e reali

1. Numeri naturali e principio di induzione

Dal modo stesso in cui i numeri naturali vengono costruiti o definiti, discende la validità del *Principio d'induzione*.

Principio d'induzione. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

i) $A(0)$ (oppure $A(1)$ se $\mathbb{N}$ inizia da 1) è vera (*base induttiva*);
ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (*passo induttivo*).

Allora $A(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

1.1. Formula per la somma geometrica. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{1.1}$$

La formula vale anche se $x \in \mathbb{C}$ è un numero complesso $x \neq 1$. La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 - x} = 1 + x.$$

Supponiamo vera la formula (1.1) per $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

1.2. Disuguaglianza di Bernoulli. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $x > -1$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{1.2}$$

La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha un'identità. Supponiamo vera le (1.2) per un certo $n \in \mathbb{N}$ e proviamola per $n + 1$:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

1.3. Formula del Binomio di Newton. Il *fattoriale* $n!$ si definisce per induzione nel seguente modo:

i) $0! = 1$ e $1! = 1$;
ii) $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Dati $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \le n$, si definiscono i *coefficienti binomiali*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo per induzione la formula per il Binomio di Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Quando $n = 1$ la verifica è elementare:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

Supponiamo vera la formula per n e proviamola per $n+1$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ora utilizziamo la formula di Stiefel, la cui verifica è un facile esercizio. Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \le n$ vale l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Si trova allora

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.
\end{aligned}$$

2. Numeri reali

2.1. Relazioni d'ordine. Premettiamo la definizione di ordine totale.

Definizione 2.1 (Ordine totale). Una relazione $\leq$ su un insieme X è una relazione di *ordine totale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:

i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
ii) $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (confrontabilità);
iii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
iv) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva).

2.2. Introduzione assiomatica dei numeri reali. Introduciamo in modo assiomatico i numeri reali come *campo ordinato completo.*

Definizione 2.2. I numeri reali sono un insieme $\mathbb{R}$ munito di due operazioni $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e di una relazione di ordine totale $\leq$ che verificano, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$, la seguente lista di assiomi.

Assiomi della somma:

(S1) $x + y = y + x$ (proprietà commutativa);
(S2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (proprietà associativa);
(S3) esiste $0 \in \mathbb{R}$ tale che $x + 0 = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(S4) per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $-x \in \mathbb{R}$ tale che $x + (-x) = 0$ (esiste l'opposto).

Assiomi del prodotto (o moltiplicazione):

(P1) $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa);
(P2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (proprietà associativa);
(P3) esiste $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tale che $1 \cdot x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(P4) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, esiste $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot x^{-1} = 1$ (esiste il reciproco).

Proprietà distributiva:

(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Assiomi dell'ordine:

(O1) se $x \leq y$ allora $x + z \leq y + z$;
(O2) se $x \leq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Assioma di completezza:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Chiariremo l'assioma di completezza fra breve. Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sono in modo naturale sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. I numeri razionali $\mathbb{Q}$ con le usuali operazioni e relazione d'ordine formano un campo ordinato che verifica tutti gli assiomi precedenti, ad eccezione dell'Assioma di completezza.

Definizione 2.3 (Maggiorante, estremo superiore, massimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di A se $x \leq y$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *superiormente limitato* se ha un maggiorante.

iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo superiore* di A se è un maggiorante di A e se $x \leq z$ per ogni altro maggiorante z di A (ovvero x è il minimo dei maggioranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A porremo

$$\sup A = x.$$

iv) Se A non è superioremente limitato porremo

$$\sup A = \infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\sup \emptyset = -\infty$.

v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *massimo* di A se $x = \sup A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso

$$\max A = x.$$

L'estremo superiore e il massimo, se esistono, sono unici. La definizione di estremo superiore può essere riformulata nei seguenti termini. Un numero $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se:

i) $y \leq x$ per ogni $y \in A$;
ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $y > x - \varepsilon$.

Definizione 2.4 (Minorante, estremo inferiore, minimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di A se $y \leq x$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *inferiormente limitato* se ha un minorante.
iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo inferiore* di A se è un minorante di A e se $z \leq x$ per ogni altro minorante z di A (ovvero x è il massimo dei minoranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di A porremo

$$\inf A = x.$$

iv) Se A non è inferiormente limitato porremo

$$\inf A = -\infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\inf \emptyset = \infty$.

v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *minimo* di A se $x = \inf A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso

$$\min A = x.$$

Un numero $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se:

i) $y \geq x$ per ogni $y \in A$;
ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $y < x + \varepsilon$.

2.3. Conseguenze della completezza.

Proposizione 2.5 (Proprietà di Archimede). Per ogni coppia di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.

Dim. Supponiamo per assurdo che esistano numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ tali che $nx \leq y$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme

$$A = \big\{ nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \big\}$$

è superioremente limitato, in quanto y ne è un maggiorante. Per l'Assioma di completezza esiste l'estremo superiore $\bar{x} = \sup A$. Il numero $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è caratterizzato dalle seguenti due proprietà:

1) $nx \le \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero $\bar{x}$ è un maggiorante di A;
2) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > \bar{x} - \varepsilon$, ovvero $\bar{x}$ è il minimo dei maggioranti.

Scegliamo $\varepsilon = x > 0$ nella proprietà 2) e sia $n \in \mathbb{N}$ il corripondente numero naturale, ovvero $nx > \bar{x} - x$. Allora da 1) e 2) si ottiene:

$$\bar{x} \ge (n+1)x = nx + x > \bar{x} - x + x = \bar{x},$$

che è una contraddizione. □

Definizione 2.6 (Parte intera e frazionaria). Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale e si consideri l'insieme

$$A_x = \big\{p \in \mathbb{Z} : p \le x\big\}.$$

A_x è un insieme di numeri interi superiormente limitato che ha dunque estremo superiore. Poichè A_x è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ questo estremo superiore è un massimo. Definiamo la *parte intera di x*

$$[x] = \max\big\{p \in \mathbb{Z} : p \le x\big\} \in \mathbb{Z}.$$

Il numero $[x] \in \mathbb{Z}$ è il più grande intero minore o uguale ad x. La *parte frazionaria di x* è il numero $\{x\} = x - [x]$.

Parte intera e parte frazionaria verificano le seguenti disuguaglianze:

$$[x] \le x < [x] + 1, \quad 0 \le \{x\} < 1.$$

Proviamo ora che i numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$.

Proposizione 2.7 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.

Dim. [1] Siccome $y - x > 0$, per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(y-x) > 1$, ovvero $ny - nx > 1$. Segue che

$$nx < ny - 1 < [ny] \le ny.$$

Il numero $\bar{q} = [ny]/n \in \mathbb{Q}$ verifica dunque $x < \bar{q} \le y$. Per avere una disuguaglianza stretta anche a destra argomentiamo nel seguente modo. Esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $m(\bar{q} - x) > 1$ e quindi

$$x < \bar{q} - \frac{1}{m} < \bar{q} \le y.$$

Il numero $q = \bar{q} - \frac{1}{m} \in \mathbb{Q}$ verifica quindi la tesi.

□

[1]Dimostrazione omessa.

3. $\mathbb{R}$ come spazio metrico

La funzione *modulo* o *valore assoluto* su $\mathbb{R}$ è la funzione $|\cdot|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita, per ogni $x\in\mathbb{R}$, nel seguente modo

$$|x| = \max\{x,-x\} = \begin{cases} x & \text{se } x\geq 0; \\ -x & \text{se } x\leq 0. \end{cases}$$

Valgono le disuguaglianze elementari $x\leq |x|$ e $-x\leq |x|$, ed inoltre:

i) $|x|\geq 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ e $|x|=0$ se e solo se $x=0$;
ii) $|x| = |-x|$;
iii) $|x+y|\leq |x|+|y|$ per ogni $x,y\in\mathbb{R}$ (subadittività).

La verifica di iii) segue dalle disuguaglianze

$$x+y\leq |x|+|y| \quad \text{e} \quad -(x+y) = -x-y\leq |x|+|y|.$$

Una conseguenza di iii) è la *disuguaglianza triangolare*

$$|x-y|\leq |x-z|+|z-y| \quad \text{per ogni } x,y,z\in\mathbb{R}.$$

Infatti, $|x-y| = |x-z+z-y|\leq |x-z|+|z-y|$. Dalla iii) segue anche $|x| = |x-y+y|\leq |x-y|+|y|$ che riordinata fornisce $|x|-|y|\leq |x-y|$. Siccome i ruoli di x,y si possono scambiare, si ottiene la disuguaglianza

$$\big||x|-|y|\big|\leq |x-y|.$$

Definiamo la *funzione distanza* $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0,\infty)$, $d(x,y)=|x-y|$. Questa funzione verifica le seguenti proprietà:

i) $d(x,y)\geq 0$ per ogni $x,y\in\mathbb{R}$ e $d(x,y)=0$ se e solo se $x=y$;
ii) $d(x,y)=d(y,x)$ per ogni $x,y\in\mathbb{R}$;
iii) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ per ogni $x,y,z\in\mathbb{R}$ (disuguaglianza triangolare).

La coppia $(\mathbb{R},d)$ è allora uno *spazio metrico.* La funzione $d(x,y)=|x-y|$ si dice distanza standard o Euclidea su $\mathbb{R}$.

4. Esercizi

Esercizio 4.1. Sia $A\subset\mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \Big\{\frac{xy}{x+y}\in\mathbb{R} : 0<x,y<1\Big\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 4.2. Sia $A\subset\mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \big\{n-\sqrt{n^2-1}\in\mathbb{R} : n\in\mathbb{N},\, n\geq 1\big\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 4.3. Sia $A\subset\mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \Big\{\frac{n\log(1/n)}{n+1}\in\mathbb{R} : n\in\mathbb{N},\, n\geq 1\Big\}.$$

Provare che $\inf A = -\infty$.

CHAPTER 2

Numeri complessi

1. Introduzione

Introduciamo il simbolo $i = \sqrt{-1}$ che ubbidisce alla regola $i^2 = -1$. Il numero i si chiama *unità immaginaria*. I numeri complessi sono l'insieme

$$\mathbb{C} = \big\{ z = x + iy \, : \, x, y \in \mathbb{R} \big\},$$

ovvero l'insieme di tutte le "espressioni" della forma $x + iy$ dove x e y sono numeri reali. Il numero complesso $z = x + iy$ può essere identificato con il punto del piano Cartesiano $\mathbb{R}^2$ di coordinate (x, y):

Disegno

Definiamo la *parte reale* e la *parte immaginaria* del numero complesso $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x + iy) \quad \text{Parte reale di } z \\ y &= \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(x + iy) \quad \text{Parte immaginaria di } z. \end{aligned}$$

Le parti reale e immaginaria di un numero complesso sono numeri reali.

2. Operazioni sui numeri complessi

Introduciamo le operazioni di somma, prodotto e reciproco di numeri complessi.

2.1. Somma. Dati due numeri complessi $z = x + iy$ e $w = \xi + i\eta$ in $\mathbb{C}$, definiamo la loro somma:

$$z + w = (x + iy) + (\xi + i\eta) = (x + \xi) + i(y + \eta).$$

Nel piano complesso, la somma è semplicemente la somma vettoriale:

Disegno

2.2. Prodotto. Dati due numeri complessi $z = x+iy$ e $w = \xi+i\eta$ in $\mathbb{C}$, definiamo il loro prodotto:

$$z \cdot w = (x + iy) \cdot (\xi + i\eta) = x\xi + ix\eta + iy\xi + i^2 y\eta = (x\xi - y\eta) + i(x\eta + y\xi).$$

Abbiamo usato la regola $i^2 = -1$. Vedremo in seguito l'interpretazione geometrica del prodotto di numeri complessi. Il simbolo $\cdot$ per indicare il prodotto viene spesso omesso.

2.3. Reciproco e quoziente. Calcoliamo formalmente il reciproco di un numero complesso $z \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2-i^2y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Usiamo questo calcolo formale per *definire* il reciproco di $z = x+iy \neq 0$ nel seguente modo

$$\frac{1}{z} := \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Con un calcolo che ripercorre a ritroso il precedente si verifica ora che per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ si ha

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1.$$

Definito il reciproco di un numero complesso, è immediato definire anche il quoziente fra due numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ con $w \neq 0$:

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}.$$

2.4. Campo dei numeri complessi. L'operazione di somma verifica gli assiomi (S1)-(S4). L'operazione di prodotto verifica gli assiomi (P1)-(P4). Inoltre somma e prodotto sono legati dalla proprietà distributiva:

$$z \cdot (w+\zeta) = z \cdot w + z \cdot \zeta, \quad z, w, \zeta \in \mathbb{C}.$$

Questi fatti si riassumono dicendo che $\mathbb{C}$ è un *campo*.

Osservazione importante. Nel campo complesso $\mathbb{C}$ non c'è alcuna relazione d'ordine $\leq$. Dunque, scrivere

$$z \leq w \quad \text{con } z, w \in \mathbb{C} \quad \text{NON} \quad \text{ha senso.}$$

3. Coniugato, modulo e argomento

3.1. Coniugato. Definiamo il *coniugato* del numero complesso $z = x+iy$ come il numero complesso

$$\bar{z} = x - iy.$$

Chiaramente, nel piano complesso $\bar{z}$ è il punto simmetrico a z rispetto all'asse delle x:

Disegno

L'operazione di coniugazione verifica le proprietà descritte nel seguente teorema, la cui dimostrazione è elementare e viene omessa.

PROPOSIZIONE 3.1. Dati numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$, si ha:

1) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$;
2) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;
3) $\bar{\bar{z}} = z$;
4) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

La dimostrazione è elementare e viene omessa. Sono anche utili le seguenti formule per le parti reale e immaginaria di $z = x + iy$:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

3.2. Modulo. Il modulo del numero complesso $z = x + iy$ è

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Il modulo è sempre un numero reale non negativo. Se $z = x \in \mathbb{R}$ è un numero reale, allora si ha $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ e si trova il valore assoluto di x. Dunque il modulo è l'estensione del valore assoluto.

Per il Teorema di Pitagora, il modulo $|z|$ è la lunghezza del vettore z:

Disegno

3.3. Argomento. Sia $\vartheta \in [0, 2\pi)$ l'angolo formato in senso antiorario dal punto $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, a partire dal semiasse positivo delle x. Definiamo l'*argomento* di z

$$\arg(z) = \vartheta.$$

Dalla trigonometria sappiamo che si hanno le relazioni

$$x = |z| \cos\vartheta \quad \text{e} \quad y = |z| \sin\vartheta.$$

Supponendo $x \neq 0$ e formando il quoziente si trova

$$\mathrm{tg}\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{y}{x}.$$

Quando $x = 0$ allora l'argomento sarà $\pi/2$ quando $y > 0$ e $3\pi/2$ quando $y < 0$. Quando $\vartheta \in [0, \pi/2)$, ovvero quando z è nel primo quadrante, possiamo invertire la relazione precedente e trovare la formula per l'argomento

$$\arg(z) = \vartheta = \mathrm{arctg}\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Esercizio 3.1. Dato $z = x + iy \in \mathbb{C}$, provare che:
1) $\arg(z) = \pi + \mathrm{arctg}\big(y/x\big)$ quando z è nel secondo e terzo quadrante.
2) $\arg(z) = 2\pi + \mathrm{arctg}\big(y/x\big)$ quando z è nel quarto quadrante.

4. Rappresentazione trigonometrica ed esponenziale

4.1. Rappresentazione trigonometrica. Sia $r = |z| \geq 0$ il modulo di $z \in \mathbb{C}$, e sia $\vartheta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ il suo argomento. Allora avremo

$$\begin{aligned} z = x + iy &= r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta \\ &= r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta). \end{aligned}$$

Questa è la *rappresentazione trigonometrica* di z.

Usiamo la rappresentazione trigonometrica per interpretare geometricamente il prodotto di numeri complessi. Siano $z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ e $w = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ con $r, \varrho \geq 0$ e $\vartheta, \varphi \in [0, 2\pi)$. Allora si ha:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r\varrho\big[\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi + i(\cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\varphi)\big] \\ &= r\varrho\big(\cos(\vartheta + \varphi) + i\sin(\vartheta + \varphi)\big). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Abbiamo usato le formule di addizione per seno e coseno.

Le conclusioni sono interessanti:

1) Il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli: $|zw| = |z||w|$;

2) l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti: $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

Disegno

4.2. Rappresentazione esponenziale. Passiamo alla rappresentazione esponenziale di un numero complesso. Poniamo

$$e^{i\vartheta} := \cos\vartheta + i\sin\vartheta. \tag{4.4}$$

Questa formula si chiama *identità di Eulero*. Per il momento la accettiamo come definizione. Alla fine del corso ne daremo anche una dimostrazione basata sugli sviluppi di Taylor.

PROPOSIZIONE 4.1. L'esponenziale complesso ha le seguenti proprietà:

1) $|e^{i\vartheta}| = 1$ per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$;
2) $e^{i\vartheta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\vartheta+\varphi)}$ (formula di addizione).
3) $(e^{i\vartheta})^n = e^{in\vartheta}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (formula di de Moivre).

DIM. La 1) segue dalla definizione (4.4). La 2) è una riformulazione di (4.3). La formula 3) segue iterando la 2). □

Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si può scrivere nel seguente modo

$$z = re^{i\vartheta},$$

dove $r = |z| \geq 0$ è il modulo di z e $\vartheta = \arg(z)$ è il suo argomento. Questa è la *rappresentazione esponenziale* di un numero complesso.

5. Radici di un numero complesso

Sia $w = Re^{i\varphi}$, con $R = |w| \geq 0$ e $\varphi = \arg(w) \in [0, 2\pi)$, un numero complesso fissato e sia $n \in \mathbb{N}$. Vogliamo risolvere l'equazione

$$z^n = w$$

nell'incognita $z \in \mathbb{C}$. In altri termini, vogliamo trovare (tutte) le radici n-esime del numero complesso $w \in \mathbb{C}$. Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra, che vedremo fra breve, ci sono esattamente n soluzioni.

Cerchiamo soluzioni in forma esponenziale $z = re^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ da determinare. Usando la formula di de Moivre, avremo

$$z^n = (re^{i\vartheta})^n = r^n(e^{i\vartheta})^n = r^n e^{in\vartheta}.$$

L'equazione $z^n = w$ diventa allora

$$r^n e^{in\vartheta} = Re^{i\varphi}.$$

Uguagliando i moduli si ottiene l'equazione

$$r^n = R \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[n]{R}.$$

D'altra parte, si ha

$$e^{in\vartheta} = e^{i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad n\vartheta = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e quindi si trovano gli argomenti

$$\vartheta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Basta considerare gli indici $k = 0, 1, \dots, n-1$, perchè gli altri k danno delle ripetizioni. In conclusione, si ottengono n radici distinte

$$z_k = \sqrt[n]{R}\,\mathrm{e}^{i\vartheta_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Le radici si dispongono sui vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza centrata in 0 di raggio $\sqrt[n]{R}$.

Esempio 5.1. Vogliamo calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^4 = -1$. In primo luogo si scrive il numero complesso $w = -1$ in forma esponenziale: $R = |w| = 1$ mentre $\varphi = \arg(w) = \pi$. Dunque si ha $-1 = \mathrm{e}^{i\pi}$. Si trovano le quattro radici

$$z_k = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Le soluzioni si dispongono sui vertici di un quadrato:

Disegno

6. Numeri complessi come spazio metrico

Definiamo la distanza fra due numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ nel seguente modo:

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Si tratta della lunghezza del segmento che congiunge z e w:

Disegno

Osserviamo che, con $z = x + iy$ e $w = \xi + i\eta$, si ha

$$\begin{aligned} |z - w| &= |x + iy - (\xi + i\eta)| = |x + iy - \xi - i\eta| \\ &= |(x - \xi) + i(y - \eta)| \\ &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \end{aligned}$$

La distanza d verifica le seguenti proprietà:

(1) $d(z, w) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z - w| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z - w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = w.$
(2) $d(z, w) = |z - w| = |w - z| = d(w, z)$.
(3) $d(z, w) \le d(z, \zeta) + d(\zeta, w)$ (Disuguaglianza triangolare).

La verifica della disuguaglianza triangolare è omessa.

Esempio 6.1. Fissati un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ ed un numero reale $r \ge 0$, l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

è la circonferenza di raggio r e centro z_0.

Esempio 6.2. Fissati un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ ed un numero reale $r \ge 0$, l'insieme

$$B = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}$$

è tutto il cerchio (bordo incluso).

Disegno

Esempio 6.3. L'insieme

$$E = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = 4\}$$

è un'ellisse di fuochi i e $-i$.

7. Polinomi complessi

Definizione 7.1. Siano $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ numeri complessi. Un'espressione della forma

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

si dice *polinomio complesso* della variabile $z \in \mathbb{C}$. Se $a_n \neq 0$ diremo che $P(z)$ ha grado $n \in \mathbb{N}$.

Un numero complesso $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice *radice* di un polinomio complesso $P(z)$ se $P(z_0) = 0$, ovvero se $P(z)$ calcolato in $z = z_0$ si annulla. Il vantaggio di lavorare con polinomi complessi è che hanno sempre un numero di radici pari al grado del polinomio.

Teorema 7.2 (Fondamentale dell'Algebra). Sia $P(z)$ un polinomio complesso di grado $n \in \mathbb{N}$. Allora l'equazione

$$P(z) = 0$$

ha esattamente n soluzioni (contate con la loro molteplicità), dette radici del polinomio.

La dimostrazione del Teorema è fuori dalla nostra portata ed è omessa.

Esempio 7.3. Il polinomio $P(x) = 1 + x^2$ della variabile reale $x \in \mathbb{R}$ non ha radici reali. Il polinomio complesso $P(z) = 1 + z^2$ ha invece esattamente due radici in campo complesso che sono $z = \pm i$.

Osservazione 7.4. Sia $P(z)$ un polinomio complesso di grado $n \geq 1$ con $a_n = 1$. Siano $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ le sue radici. Allora il polinomio può essere fattorizzato nel seguente modo

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

Osservazione 7.5. Supponiamo che il polinomio complesso

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

abbia coefficienti reali: $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Allora

$$P(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(\bar{z}) = 0.$$

Dunque, nota una radice $z \in \mathbb{C}$ se ne conosce automaticamente una seconda $\bar{z} \in \mathbb{C}$.

Dim. Osserviamo preliminarmente che

$$P(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P(z)} = 0.$$

Inoltre, si ha

$$\overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k = P(\bar{z}).$$

Abbiamo usato il fatto che i coefficienti sono reali: $\bar{a}_k = a_k$. L'affermazione segue. □

8. Esercizi svolti sui numeri complessi

Esercizio 8.1. Calcolare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3 = 8i.$$

Ovvero: calcolare le radici terze di $8i$

Soluzione. Scriviamo $8i$ in forma esponenziale:

$$\begin{array}{ll} R = |8i| = 8 & \text{modulo} \\ \varphi = \arg(8i) = \frac{\pi}{2} & \text{argomento.} \end{array}$$

Disegno

Cerchiamo soluzioni della forma $z = r\mathrm{e}^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ da determinare. Abbiamo l'equazione

$$8i = 8\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = z^3 = r^3\mathrm{e}^{3i\vartheta}.$$

Otteniamo

$$r^3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad r = 2.$$

E poi

$$3\vartheta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2,$$

ovvero

$$\vartheta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3}\pi, \quad k = 0, 1, 2.$$

Precisamente: $\vartheta_0 = \pi/6$, $\vartheta_1 = \frac{5}{6}\pi$, $\vartheta_2 = \frac{3}{2}\pi$. Le soluzioni in forma algebrica sono:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = 2\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\Big) = 2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{3} + i, \\ z_1 &= 2\mathrm{e}^{i\frac{5}{6}\pi} = 2\Big(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\Big) = 2\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\Big) = -\sqrt{3} + i, \\ z_2 &= 2\mathrm{e}^{i\frac{3}{2}\pi} = 2\Big(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\Big) = -2i. \end{aligned}$$

Nel piano di Gauss:

Disegno

Esercizio 8.2. Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4 - 2i\sqrt{3}z^2 - 4 = 0$$

e rappresentarle nel piano di Gauss.

Soluzione. Ponendo $w = z^2$ l'equazione diviene

$$w^2 - 2i\sqrt{3}w - 4 = 0.$$

Usiamo la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado:

$$\begin{aligned} w_\pm &= \frac{2i\sqrt{3} \pm \sqrt{4i^2 \cdot 3 + 16}}{2} \\ &= \frac{2i\sqrt{3} \pm 2}{2} = \pm 1 + i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dobbiamo risolvere le due equazioni

$$\begin{aligned} z^2 &= w_+ = 1 + i\sqrt{3} \\ z^2 &= w_- = -1 + i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Risolviamo la prima equazione. Scriviamo w_- in forma esponenziale. Modulo e argomento sono (osserviamo che w_+ è nel primo quadrante):

$$\begin{aligned} R &= |w_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \\ \varphi &= \arg(w_+) = \operatorname{arctg}\Big(\frac{\sqrt{3}}{1}\Big) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Dunque, si ha

$$w_+ = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = 2\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big).$$

Otteniamo l'equazione per l'incognita $z = r\mathrm{e}^{i\vartheta}$, con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$:

$$r^2\mathrm{e}^{i2\vartheta} = z^2 = w_+ = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Si ottengono le due equazioni:

$$\begin{aligned} r^2 &= 2 \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{2} \\ 2\vartheta &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k = 0, 1. \end{aligned}$$

Gli argomenti sono

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad \vartheta_1 = \frac{7}{6}\pi.$$

Si trovano le prime due soluzioni in forma algebrica:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\vartheta_0} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ z_1 &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\vartheta_1} = -\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{aligned}$$

In modo analogo si risolve l'equazione $z^2 = w_- = -1 + i\sqrt{3}$. Si trovano le soluzioni:

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{2}\Big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \\ z_3 &= \sqrt{2}\Big(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big). \end{aligned}$$

Esercizio 8.3. Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3 = 9\bar{z}.$$

Soluzioni. Certamente $z = 0$ è una soluzione. Cerchiamo soluzioni in forma esponenziale $z = re^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Osserviamo che

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \overline{re^{i\vartheta}} = r\overline{e^{i\vartheta}} \\ &= r\big(\overline{\cos\vartheta + i\sin\vartheta}\big) = r(\cos\vartheta - i\sin\vartheta) \\ &= r\big(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta)\big) = re^{-i\vartheta}.\end{aligned}$$

Dunque, si trova l'equazione

$$z^3 = 9\bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad r^3 e^{3i\vartheta} = 9re^{-i\vartheta},$$

e deduciamo che

$$r^3 = 9r \quad \Leftrightarrow \quad r = 0 \quad \text{oppure} \quad r = 3,$$

e poi

$$3\vartheta = -\vartheta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ovvero

$$\vartheta_k = \frac{k}{2}\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Troviamo le soluzioni

$$z_1 = 3e^{i\cdot 0} = 3, \quad z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i, \quad z_3 = 3e^{i\pi} = -3, \quad z_4 = 3e^{i\frac{3}{2}\pi} = -3i,$$

cui va aggiunta la soluzione $z_0 = 0$.

Esercizio 8.4. Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^3\bar{z} + 3z^2 - 4 = 0.$$

Soluzione. Riscriviamo l'equazione in questo modo

$$z^2(z\bar{z} + 3) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad z^2(|z|^2 + 3) = 4. \tag{8.5}$$

Eguagliamo i moduli a destra e sinistra

$$|z^2|(|z|^2 + 3) = |z^2(|z|^2 + 3)| = |4| = 4,$$

e osserviamo che $|z^2| = |z|^2$. Si ottiene dunque l'equazione per l'incognita $t = |z|^2 \geq 0$

$$t^2 + 3t - 4 = 0.$$

Le soluzioni sono $t = -4$, che è da scartare, e $t = 1$, che è accettabile. Dunque, deve essere $|z|^2 = 1$ e quindi $|z| = 1$. e sostituendo tale valore nell'equazione (8.5) si ottiene $z^2 = 1$ che ha le soluzioni $z = \pm 1$. Queste sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione.

Esercizio 8.5. Disegnare nel piano di Gauss l'insieme dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(iz^2 - i\bar{z}^2) \geq -4 \\ \left| z - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2} \right| \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Soluzione. L'insieme
$$C = \Big\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \Big| z - \Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{2} \Big) \Big| \leq \sqrt{2} \Big\}$$
è un cerchio di centro $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt{2}$ e raggio $r = \sqrt{2}$ (circonferenza inclusa):

Disegno

Studiamo la prima disequazione. Poniamo $z = x + iy$:
$$\begin{aligned} iz^2 - i\bar{z}^2 &= i(x+iy)^2 - i(x-iy)^2 \\ &= i(x^2 + 2ixy - y^2) - i(x^2 - 2ixy - y^2) \\ &= -2xy - 2xy + i(x^2 - x^2 - y^2 + y^2) = -4xy. \end{aligned}$$
Dunque, si ha
$$\operatorname{Re}(iz^2 - i\bar{z}^2) \geq -4 \quad \Leftrightarrow \quad -4xy \geq -4 \quad \Leftrightarrow \quad xy \leq 1.$$
L'insieme
$$A = \big\{ z = x + iy \in \mathbb{C} \,:\, xy \leq 1 \big\}$$
è la regione del piano delimitata dai due rami di iperbole $xy = 1$ (iperbole inclusa):

Disegno

In conclusione, le soluzioni sono date dall'intersezione $A \cap C$:

Disegno

Esercizio 8.6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro fissato. Disegnare nel piano complesso il seguente insieme
$$S_\alpha = \Big\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\bar{z} + 1 - i\alpha}{z + 1} \in \mathbb{R} \Big\}$$

Soluzione. In primo luogo deve essere $z + 1 \neq 0$, ovvero:
$$z \neq -1.$$
L'insieme S_α è formato dai punti $z \neq -1$ tali che
$$\operatorname{Im}\Big(\frac{\bar{z} + 1 - i\alpha}{z + 1} \Big) = 0.$$
Calcoliamo il quoziente, ponendo $z = x + iy$:
$$\begin{aligned} \frac{\bar{z} + 1 - i\alpha}{z + 1} &= \frac{\bar{z} + 1 - i\alpha}{z + 1} \frac{\bar{z} + 1}{\bar{z} + 1} \\ &= \frac{\bar{z}^2 + \bar{z} + \bar{z} + 1 - i\alpha\bar{z} - i\alpha}{|z|^2 + z + \bar{z} + 1} \\ &= \frac{(x - iy)^2 + 2(x - iy) + 1 - i\alpha(x - iy) - i\alpha}{x^2 + y^2 + 2x + 1} \\ &= \frac{x^2 - 2ixy - y^2 + 2x - 2iy + 1 - i\alpha x - \alpha y - i\alpha}{x^2 + y^2 + 2x + 1}. \end{aligned}$$
Annulliamo la parte immaginaria:
$$\begin{aligned} -2xy - 2y - \alpha x - \alpha = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2y(x+1) + \alpha(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x+1)(2y + \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Quindi deve essere $x+1=0$ oppure $2y+\alpha=0$. Nel primo caso si ha la retta $x=-1$ (ma il punto $z=-1$ è escluso).

Disegno

Nel secondo caso si ha la retta $y=-\frac{\alpha}{2}$.

Esercizio 8.7. Determinare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $z_0 = i$ sia radice del polinomio

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + \lambda z^2 - 2z + 2.$$

Calcolare quindi tutte le radici.

Soluzione. Il numero complesso $z_0 = i$ è radice del polinomio se

$$0 = P(i) = i^4 - 2i^3 + \lambda i^2 - 2i + 2 = 3 - \lambda.$$

Quindi $\lambda = 3$. Il polinomio è

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2.$$

Osserviamo che i coefficienti del polinomio sono reali. Due radici del polinomio sono dunque $z_0 = i$ e $\bar{z}_0 = -i$. Le altre due radici sono $z_1 \in \mathbb{C}$ e $\bar{z}_1 \in \mathbb{C}$, da determinare. Il polinomio si fattorizza nel seguente modo:

$$\begin{aligned} P(z) &= (z-i)(z+i)(z-z_1)(z-\bar{z}_1) \\ &= (z^2+1)(z^2 - z\bar{z}_1 - z_1 z + |z_1|^2) \\ &= z^4 - (z_1+\bar{z}_1)z^3 + (1+|z_1|^2)z^2 - (z_1+\bar{z}_1)z + |z_1|^2. \end{aligned}$$

Eguagliando i coefficienti del polinomio si ottiene il sistema di equazioni nell'incognita z_1:

$$\begin{cases} -2 = -(z_1+\bar{z}_1) \\ 3 = |z_1|^2 + 1 \\ -2 = -(z_1+\bar{z}_1) \\ 2 = |z_1|^2. \end{cases}$$

Le ultime due equazioni sono doppioni delle prime due. Dunue si ha il sistema

$$\begin{cases} z_1 + \bar{z}_1 = 2 \\ |z_1|^2 = 2 \end{cases}$$

Se $z_1 = x_1 + iy_1$, la prima equazione fornisce $x_1 = 1$ e quindi la seconda diventa

$$2 = |z_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 = 1 + y_1^2,$$

da cui si deduce che $y_1^2 = 1$, ovvero $y_1 = \pm 1$. Scegliendo il segno $+$ si trova la coppia di soluzioni

$$z_1 = 1+i, \quad \bar{z}_1 = 1-i.$$

Scegliendo il segno $-$ si trovano le stesse soluzioni, scambiate fra loro.

In conclusione, le quattro soluzioni sono $\pm i$ e $1 \pm i$.

Esercizio 8.8. Disegnare nel piano complesso l'insieme delle $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{\sqrt{4-|z-4|}}{\sqrt{4-|z+4i|}} > 1. \tag{8.6}$$

Soluzione. Abbiamo le restrizioni:

$$4 - |z-4| \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z-4| \leq 4, \tag{8.7}$$

$$4 - |z+4i| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z+4i| < 4. \tag{8.8}$$

Rappresentiamo il dominio di esistenza nel seguente disegno:

Disegno

Con tali restrizioni, possiamo elevare al quadrato la disuguaglianza (8.6) e ottenere

$$\begin{aligned} \frac{4-|z-4|}{4-|z+4i|} > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 4-|z-4| > 4-|z+4i| \\ &\Leftrightarrow \quad |z+4i| > |z-4| \\ &\Leftrightarrow \quad |z+4i|^2 > |z-4|^2. \end{aligned}$$

Ponendo $z = x+iy$ si ottiene la disuguaglianza equivalente:

$$\begin{aligned} |x+iy+4i|^2 > |x+iy-4|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+(y+4)^2 > (x-4)^2+y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+8y+16 > x^2-8x+16+y^2, \end{aligned}$$

ovvero $y > -x$:

Disegno

In definitiva, le soluzioni sono:

Disegno