Esercizi sui numeri complessi

Nicola Arcozzi

26 gennaio 2007

(1) Trovare $Re(z),\ Im(z),\ |z|,\ \overline{z},\ Arg(z)$, dove

$$z = 1,\ z = i - \sqrt{3},\ z = -\frac{\pi}{2}i,\ z = -3 + 2i.$$

(2) Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ delle equazioni

$$(i) z^3 = 1 + i,\ (ii)\ z^6 = 1,\ (iii)\ iz^5 + 1 = 0,\ (iv)\ z^4 = 2i - 1.$$

(3) Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ delle equazioni

$(i)\ z^2 - 2(2+i)z - i = 0,\ (ii)\ z^2 + i = 0,\ (iii)\ z^2 + z + 1 = 0,\ (iv) iz^2 + z - 1 = 0.$

(4) Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ delle equazioni

$$(z^5 + 2i)(2iz^2 + 2z + 1 + i) = 0.$$

(5) Calcolare $Arg(z)$ e $|z|$, dove

$$z = (1 + i)^{17}.$$

Scrivere quindi z in forma trigonometrica.

(6) Calcolare

$$z = e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

(7) Trovare l'equazione della rotazione del piano con centro in 0 di un angolo di $\pi/3$ (in senso antiorario).

(8) Verificare che

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}},$$

per ogni $\theta \in \mathbb{R}$.

Soluzioni di alcuni esercizi.

(2) (i) $z = \sqrt[6]{.}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{2}{3}\pi\right)\right),\ k = 0, 1, 2.$

(ii) $z = \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(k\frac{\pi}{3}\right),\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (disegnare le soluzioni nel piano complesso).

(iii) $z = \cos\left(\frac{\pi}{10} + k\frac{2}{5}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10} + k\frac{2}{5}\pi\right),\ k = 0, 1, 2, 3, 4.$

(iv) $z = \sqrt[8]{5}\left(\cos\left(\frac{\pi - \arctan(2)}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi - \arctan(2)}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)\right),\ k = 0, 1, 2, 3.$

(3) (i) $z = 2 + i \pm \sqrt[4]{34}\left(\cos\left(\frac{\arctan(5/3)}{2}\right) + i\sin\cos\left(\frac{\arctan(5/3)}{2}\right)\right)$. (Scrivere parte reale e immaginaria delle due soluzioni z_1 e z_2).

(ii) $z = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})$.

(iii) $z = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. (Mostrare che le soluzioni di questa equazione sono anche radici cubiche di $w = 1$ e disegnarle sul piano complesso).

(iv) $z = \frac{i}{2} \pm \sqrt[4]{17}\left(\cos\left(\frac{\arctan(4)+\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\arctan(4)+\pi}{2}\right)\right)$.

(4) $z = \frac{i}{2} \pm \frac{\sqrt[4]{5}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi - \arctan(2)}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi - \arctan(2)}{2}\right)\right)$, o

$z = \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{10} + k\frac{2}{5}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{10} + k\frac{2}{5}\pi\right)\right),\ k = 0, 1, 2, 3, 4.$