Orario	Lun	11.30 – 13.30	LF	
	Mar	10.30 – 13.30	RG	Fino al 31 ottobre
	Mer	8.30 – 10.30	RG	Fino al 31 ottobre
	Gio	10.30 – 13.30	LF	

LIBRI

Walter D'Ambrosio – Matematica: . . . . – Zanichelli

Crasta – Malusa – Audisi Matematica . . . – La Dotta

Bramanti, Pagani Salsa – Matematica – Zanichelli

E_MAIL : lorenzo.fusi@unifi.it

roberto.gianni@unifi.it

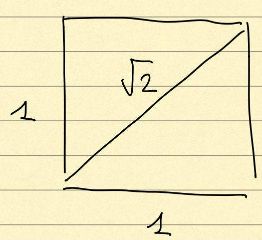
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ (Naturali)

$\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3 \ldots\}$ (Interi)

$\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{m}{n} \quad m, n \in \mathbb{Z}, \ n \neq 0 \right\}$ (Razionali)

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ $\qquad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\Downarrow$ dimostr.



Se $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{m}{n}$ $m, n \in \mathbb{Z}$ e

m, n primi fra loro (hanno come divisore comune 1)

Supponiamo per assurdo che (m,n primi tra loro)

$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

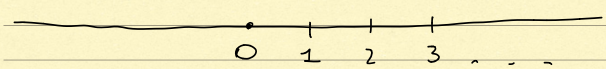
$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2}$ $\qquad m^2 = 2n^2$

m^2 è un numero pari $\Rightarrow$ m è pari (se infatti m fosse dispari, ossia $m = 2r+1$, $\Rightarrow m^2 = \underbrace{(2r+1)}_{m}\underbrace{(2r+1)}_{m} = \underbrace{4r^2+4r+1}_{disp.}$)

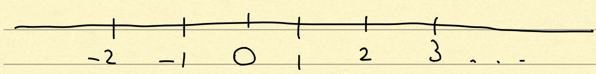
Se m è pari $m = 2q$ $\quad q \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \frac{4q^2}{n^2} = 2 \Rightarrow n^2 = 2q^2 \Rightarrow n^2$ è pari $\Rightarrow$ n è pari

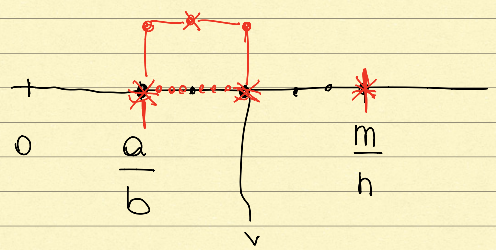
$n = 2z$ $\quad z \in \mathbb{Z}$ $\quad \to m = 2q$, $\to n = 2z$ $\Rightarrow$ m e n non sono primi tra loro (contraddizione)



$\mathbb{N}$



$\mathbb{Z}$



$a, b, m, n \in \mathbb{N} \qquad b, n \neq 0$

$\frac{a+m}{b+n}$ (Si può dimostrare x esercizio) $\qquad \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+n} < \frac{m}{n}$

$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} < \sqrt{2} < \frac{m}{n} = \frac{3}{2}$

0.5 $\qquad$ 1.5

Il campo dei numeri reali è definito come l'"Estensione" di $\mathbb{Q}$ ai numeri irrazionali

Possiamo anche dire che $\mathbb{R}$ soddisfa l'assioma di completezza

<u>Def</u>: « Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ $\quad A \cup B = \mathbb{R}$ $\quad A \cap B = \emptyset$

e t.c. $\quad a < b \quad \forall\ a \in A$ e $b \in B$

$\Rightarrow \exists\ c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$a \leq c \leq b$$ »

I razionali $\mathbb{Q}$ non soddisfano l'assioma di completezza

$A = \{x \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } x^2 < 2\} \qquad A \cap B = \emptyset$

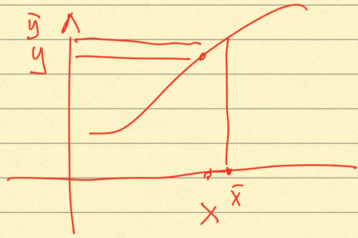
$B = \{x \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } x^2 \geq 2\} \qquad A \cup B = \mathbb{Q}$

Ma l'unico c che soddisfa $a \leq c \leq b \quad \forall \begin{matrix} a \in A \\ b \in B \end{matrix}$

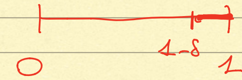
è $c = \sqrt{2}$, ma $c \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q}$ non soddisfa l'assioma di completezza.

$$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$$

$\mathbb{R}$ può essere visto come l'insieme dei numeri che può essere messo in corrispondenza biunivoca con una retta



(0,1)



Definiz. SUP, INF, MAX e MIN di un insieme.

Sia $A \subset \mathbb{R}$

1) M è un "maggiorante" di A se $y \leq M \quad \forall\, y \in A$
2) m " "minorante" " $y \geq m \quad \forall\, y \in A$

3) A si dice limitato superiormente se ammette almeno 1 maggiorante
4) " " inferiormente " " 1 minorante
5) A si dice LIMITATO se è limitato superior e inferiorment

A Limitato

Un numero L si dice $\sup(A)$ e si indica $L = \sup(A)$
se L è il minimo (più piccolo) dei maggioranti

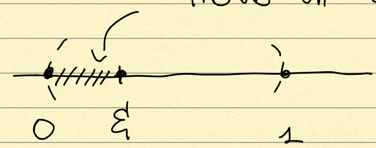
Un numero ℓ si dice $\inf(A)$ " " $\ell = \inf(A)$
se ℓ è il massimo (più grande) dei minoranti

Se L, ℓ appartengono ad $A \Rightarrow L = \max(A) \quad \ell = \min(A)$

Es. $A = (0,1) = \{ x \in \mathbb{R} : \quad 0 < x < 1 \}$

$\inf(A) = 0 \qquad \forall\, x \in A \quad x > 0$. 0 è il più grande dei minoranti poiché se io per assurdo dico che $\varepsilon > 0$ è un minoranti trovo una contraddizione

trovo un $z \in A$ t.c. $z < \varepsilon$



$\sup(A) = 1$

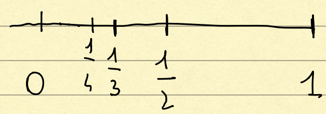
$A = \left\{ x = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1 \right\}$

$\inf = 0$

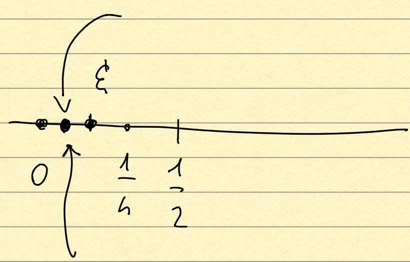
$\sup = 1$

$\min = ??$

$\max = 1$



$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad n > \frac{1}{\varepsilon}$



$\varepsilon = 10^{-10} \qquad n > 10^{10}$

$(0, +\infty)$

PRINCIPIO di INDUZIONE

Sia P una proposizione (formula, risultato geometrico ...) che dipende a $n \in \mathbb{N}$

1) $P(n_0)$ sia vera $\qquad n_0 \in \mathbb{N}$

2) Se è vera $P(n) \Longrightarrow$ è vera anche $P(n+1)$ $\forall\, n > n_0$

$\Longrightarrow \boxed{P \text{ vale } \forall\, n \geq n_0}$

Esempio Dimostrare che $\forall\ n \geq 1$ la somma dei primi n numeri naturali è $\frac{n(n+1)}{2}$

$$1+2+3+\ldots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}=S(n)$$

$$S(1)=1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}=1$$ ok 1) è dimostrato

Supponiamo che $S(n)$ sia vera

$$S(n)=1+2+3\ldots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$S(n)+(n+1)=\underbrace{(1+2+3+\ldots+n)}_{=\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=$$

$$=(n+1)\left[\frac{n}{2}+1\right]=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ho dimostrato che $S(n)+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\ \cancel{??} = S(n+1)$

$$S(n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$S(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Es: Dimostrare che la somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2

$S(n) = \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots \qquad + (2n-1)}_{\text{n oddendi tutti dispari}}$

$S(1) = 1$

$S(2) = 1 + 3$

$S(3) = 1 + 3 + 5 \ldots$

1) $S(1) = 1 = 1^2 = 1$ è vera

2) Supponiamo che $S(n)$ sia vera. Dimostriamo che allora è vera anche $S(n+1)$

$(2(n+1)-1) = 2n+1$

$S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

$S(n) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 = S(n+1)$

Es. « Verificare usando il principio di induzione che $\forall\, n > 2,\, n \in \mathbb{N}$ vale $\boxed{n^2 > 2n+1}$ »

1) $S(3)$ $\qquad 9 > 7$ vera !! $\qquad \left(S(2) \quad 4 > 5 \ \text{\textit{4}} \right)$

2) Suppongo vera $S(n)$ e dimostro la validità di $S(n+1)$

$S(n+1)$ $\qquad \boxed{(n+1)^2 > 2(n+1) + 1}$ (Devo dimostrarla)

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > (2n+1) + (2n+1) = (2n+2) + 2n > (2n+2)+1$$

perchè $2n > 1$

se $n > 2$

Quindi ho dimostrato che $\boxed{(n+1)^2 > 2(n+1)+1}$

Es. « Dimostrare che per $n > 4$ si ha $2^n > n^2$ »

$S(n)$ $\qquad 2^n > n^2$

$S(5)$ $\qquad 2^5 > 5^2 \iff 32 > 25$ vero !!

Suppongo che $S(n)$ sia vera e dimostro che è vero anche $S(n+1)$

Devo dimostrare che $2^{n+1} > (n+1)^2$ $\qquad S(n+1)$

$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 = n^2 + n^2 >$ (si veda es. preced.) $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$