Esercizi IAS-foglio 1

(Prof. ssa D. Bubboloni) 30 settembre 2019

Questi esercizi sono delle semplici riflessioni su alcuni argomenti trattati o ripropongono alcuni elementi del corso lasciati al vostro controllo durante le lezioni. G denota sempre un gruppo.

0. Sia $H \leq G$, con G gruppo (anche infinito). Provare che se S e' un sistema di rappresentanti per i laterali destri di H, allora l'insieme $S^{-1} := \{s^{-1} : s \in S\}$ e' un sistema di rappresentanti per i laterali sinistri di H.

1. Dire se sono vere o false le seguenti affermazioni.

i) Se $A, B \subseteq G$ e $AB = BA$ allora $AB \leq G$.

ii) Se $|AB| = |G|$ e G e' finito, allora $AB \leq G$.

2. Provare che $H \trianglelefteq G$ sse $H \leq G$ e per ogni $g \in G$, $H^g \subseteq H$.

3. Provare che se $H \leq G$ e $B \leq N_G(H)$ allora $BH \leq G$.

4. Provare che, per ogni $n \geq 3$, $Z(S_n) = 1$.

5. Sia G finito e $H \leq G$ tale che $G = \bigcup_{g \in G} H^g$. Allora $H = G$.

6. Provare che se G e' infinito puo' esistere un $H < G$ tale che $G = \bigcup_{g \in G} H^g$.

7. Se G e' finito, e' possibile trovare $H_1, H_2 < G$ tali che

$$G = \bigcup_{g \in G} H_1^g \cup \bigcup_{g \in G} H_2^g \ ?$$

In caso affermativo esibire un esempio.

9. Provare che $(\mathbb{Q}, +)$ e' abeliano ma non ciclico.

10. Se $|G| = 5 \cdot 2^2 \cdot 3^2$ ed esistono due sottogruppi H, K di G con $|H| = 5 \cdot 2 \cdot 3$ e $|K| = 2^2 \cdot 3^2$, allora $G = HK$.

11. Siano $H, K \leq G$ con G finito. Dire se sono vere le due affermazioni:

a) $|HK|$ divide $|G|$;

b) $|\langle H, K \rangle|$ divide $|G|$.

12. Provare che se $\psi, \varphi \in S_n$ sono tali che $T_\psi = T_\varphi$ allora sono coniugate.

14. Cercate una dimostrazione chiara per il seguente fatto utilizzato a lezione. Il numero $\mu_T(S_n)$ di partizioni di S_n aventi tipo $T = [m_1^{t_1}, \ldots, m_s^{t_s}]$ (espresso in forma normale) e' dato da

$$\mu_T(S_n) = \frac{n!}{m_1^{t_1} \cdots m_s^{t_s} t_1! \cdots t_s!}.$$

15. Provare che gli unici sottogruppi normali di A_4 sono $1, V, A_4$.

16. Sia G un gruppo, $H \leq G$ e $x \in G$. Se esiste $y \in G$ tale che $xH = Hy$, si puo' dedurre che $xH = Hx$?

17. Cercate una dimostrazione del seguente risultato.
Sia G un gruppo, $H \leq G$. Allora esiste un sistema di rappresentanti dei laterali sinistri di H che e' anche sistema di rappresentanti dei laterali destri di H.

18. Si considerino i sottogruppi normali di S_4: $S_4,\ A_4,\ V, 1$. Determinare la struttura dei quozienti S_4/A_4, S_4/V, A_4/V.

19. Siano $A, B \leq G$. Provare che $|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$.