Teorema di Fermat per $n = 4$

Dimostriamo che l'equazione diofantea $x^4 + y^4 = z^2$ non ha soluzioni $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ con $abc \neq 0$.

Ragionando per assurdo supponiamo che esistano soluzioni di questo tipo, e scegliamone una con $|c|$ minimo. Osserviamo subito che, se p è un primo che divide a e b, allora p^4 divide c^2 e, di conseguenza, p^2 divide c. Ne segue che $(a/p, b/p, c/p^2)$ è ancora una soluzione della nostra equazione, ma $|c/p| < |c|$, contraddicendo la scelta di (a, b, c). Allora a, b, c sono a due a due coprimi e, osservando che $(a^2)^2 + (b^2)^2 = c^2$, abbiamo che (a^2, b^2, c) è una terna pitagorica ridotta. Sappiamo allora che uno solo tra a^2, b^2 è pari, e possiamo supporre che questo sia b^2. Esistono quindi due interi m, n coprimi e tali che

$$a^2 = m^2 - n^2,\ b^2 = 2nm,\ c = m^2 + n^2.$$

Otteniamo, dalla prima relazione,

$$a^2 + n^2 = m^2$$

e si vede facilmente che (a, n, m) è una terna pitagorica ridotta. Come prima possiamo trovare $u, v \in \mathbb{N}$ tali che

$$a = u^2 + v^2,\ n = 2uv,\ m = u^2 + v^2.$$

Da $b^2 = 2nm$ otteniamo

$$b^2 = 2(2uv)(u^2 + v^2)$$

da cui

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = uv(u^2 + v^2).$$

Dato che $u, v, u^2 + v^2$ sono a due a due coprimi, ed il loro prodotto è un quadrato, esistono $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ tali che

$$u = \alpha^2,\ v = \beta^2,\ u^2 + v^2 = \gamma^2.$$

Sostituendo, nella terza uguaglianza, le espressioni di u e v, otteniamo

$$\alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2$$

ovvero (α, β, γ) è una soluzione della nostra equazione. Questa però è una contraddizione, dato che $|\gamma| < |c|$.

Vediamo adesso, come conseguenza, che l'equazione di Fermat $x^4+y^4 = z^4$ non ha soluzioni non banali. Se $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ è una soluzione di $x^4 + y^4 = z^4$, allora (a, b, c^2) è una soluzione di $x^4 + y^4 = z^2$. Di conseguenza $abc^2 = 0$, da cui $abc = 0$ e (a, b, c) è una soluzione banale di $x^4 + y^4 = z^4$.