Serie di potenze

Sorge spesso il problema di approssimare localmente il comportamento di una funzione generica con qualcosa di più semplice, in particolare con un polinomio che è facilmente derivabile e integrabile:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \dots$$

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^3 \dots$$

$$\int p(x)\ \mathrm{d}x = c + a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \cdots$$

Serie di potenze

L'idea è quella di cercare il polinomio le cui derivate coincidono con quelle della funzione data in un punto x_0, ovvero

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 \dots$$

Come si può notare, la funzione coincide con il polinomio nel punto $x = x_0$ e così fanno le sue derivate (fino all'ordine massimo del polinomio). I coefficienti numerici servono per eliminare le costanti che vengono facendo le derivate.

Serie di potenze

A questo punto uno può considerare la serie infinita (serie di Taylor)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Dove abbiamo indicato con

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right)_{\mathrm{x}}.$$

Ricordarsi che $0! = 1, 1! = 1, 2! = 2\times1 = 2\,, 3! = 3\times2\times1 = 6$, ecc.

Ovviamente il tutto ha senso se la serie converge

Serie di Taylor e McLaurin

Le serie vengono di solito riportate per $x_0 = 0$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$$

per esempio

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

per averle intorno ad un altro punto basta calcolare le derivate in x_0 e sostituire la x con $x - x_0$, per esempio per $x_0 = 3$, $x = 3 + \epsilon$

$$e^x = e^3 + e^3(x-3) + \frac{e^3(x-3)^2}{2} + \frac{e^3(x-3)^3}{3!} +..$$

o anche

$$e^{3+\epsilon} = e^3 \left(1 + \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3!} + \cdots\right)$$

Convergenza delle serie

La serie è una successione di somme parziali, che converge se converge la successione. Ma purtroppo non c'è un criterio "semplice" per stabilire la convergenza.

Ovviamente la condizione necessaria per la convergenza della serie è che i termini della serie vadano a zero, ma questo non è sufficiente, per esempio la serie $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge, infatti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \simeq \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = (\ln(x))_1^{\infty} = \infty\,.$$

Per le serie a segni alterni, basta che i termini vadano a zero, dato che il resto (somma infinita meno somma parziale) della serie troncata è in valore assoluto minore del primo termine trascurato, quindi $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Convergenza delle serie

Prendiamo per esempio la serie parziale

$$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

Se la moltiplichimo per $1 - x$ abbiamo

$$\begin{aligned} S_n(1-x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)(1 - \mathrm{x}) \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n - x - x^2 - \cdots - x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1} \end{aligned}$$

Quindi

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-x},$$

se $|x| < 1$ (raggio di convergenza)

Alcune serie da ricordare

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \text{ per } |x| < 1, \binom{a}{n} = \frac{a!}{n!\,(a-n)!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \ \forall\, x$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \ \forall\, x$$

Queste serie sono anche molto utili per calcolare (praticamente) i limiti e avere un'idea di come una funzione va a zero o all'infinito, per esempio abbiamo subito $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \ \forall\, n$.

Alcune serie da ricordare

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \text{ per } |x| < 1, \binom{a}{n} = \frac{a!}{n!\,(a-n)!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \;\forall\, x$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \;\forall\, x$$

Queste serie sono anche molto utili per calcolare (praticamente) i limiti e avere un'idea di come una funzione va a zero o all'infinito, per esempio abbiamo subito $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \;\forall\, n$.

Manipolazione di serie

In molti casi basta sostituire: da

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ per } |x| < 1$$

si ottiene

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \text{ per } |x| < 1.$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \text{ per } |x| < 1.$$

da

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

derivando si ha

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Manipolazione di serie

Vogliamo calcolare la serie di $\ln(1+x)$. derivando abbiamo

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\ln(1+x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

integrando tra 0 e x

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$