ALGEBRA delle SERIE _una nota_

- $\sum_1 a_n , \sum_1 b_n$ conv (1) $\not\Rightarrow$ $\sum_1 a_n b_n$ conv (vale se $\sum_1 |a_n|, \sum |b_n|$ conv)
  (2) $\not\Leftarrow$ "
  (3) $\Rightarrow$ $\sum_1 (a_n+b_n)$ conv
  (4) $\not\Leftarrow$

dimostrazione

(1) è sufficiente trovare un controesempio
sia $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = b_n$ allora $\sum a_n, \sum b_n$ conv per il criterio di Leibnitz ma $a_n b_n = \frac{1}{n}$ la cui serie diverge

(2) è sufficiente trovare un controesempio.
siano $0 < \alpha, \beta < 1$ t.c. $\alpha + \beta > 1$ allora $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $b_n = \frac{1}{n^\beta}$ sono t.c.
$\sum a_n, \sum b_n$ non conv ma $\sum a_n b_n$ conv.

(3) occorre dimostrare che $\exists \lim_{k \to +\infty} S_k$ dove $S_k = \sum_{n=1}^{k} (a_n + b_n)$
da cui
$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=1}^{k} b_n = A_k + B_k$$
dove A_k = somme parziali di a_n. Quindi $\exists A = \lim A_k$
B_k = " di b_n $B = \lim B_k$
essendo $\sum a_n, \sum b_n$ convergenti $\Rightarrow \sum_1^n S_k \to A + B$
cioè se $\sum a_n, \sum b_n$ conv allora $\sum_1^n (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$

NB: Non è in generale vero $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$
Infatti sia $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{-1}{n}$. Allora $a_n + b_n = 0 \Rightarrow \sum (a_n + b_n) = 0$
ma $\sum a_n + \sum b_n$ non è definito.

(4) è sufficiente trovare un controesempio.
(Posso utilizzare il precedente $a_n = 1/n = -b_n$) oppure
$\left. \begin{array}{l} a_n = \frac{1}{n} \\ b_n = -1/(n+1) \end{array} \right\}$ allora $(a_n + b_n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum (a_n + b_n)$ è serie telescopica
e converge mentre $\nexists \sum a_n, \nexists \sum b_n$.

Qualche esercizio svolto sulle SERIE NUMERICHE:

Studiare il carattere delle seguenti serie

$\sum_1^{+\infty} \left(1-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

$a_n \doteq \left(1-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$. $a_n>0$ $\forall n$. ovvero $a_n = \left[\left(1-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right]^{\sqrt{n}}$

studio $b_n = \left(1-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = \Big(\underbrace{\left(1-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}}}_{\to e^{-1}}\Big)^{\underbrace{\sqrt{n}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\to 1}} \longrightarrow 1/e$

in particolare $0<b_n<1/e$ poiché $b_n \nearrow$ essendo $\frac{1}{\sqrt{n}} \searrow \Rightarrow \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \searrow$

da cui $\Rightarrow \left(1-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \nearrow$

$0<a_n<1/e^{\sqrt{n}}$ e $\sum_1 1/e^{\sqrt{n}}$ converge per confronto con $1/n^2$ (ad esempio)

$\sum_1^{+\infty} \sin(\sin(n))^n$

oss: $\sin n \in (-1,1)$ (Nota $\sin n \neq 1 \wedge \sin n \neq -1$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow \sin^n n \in (-\sin 1, \sin 1)$ $\forall n$

$\Rightarrow \sin(\sin n)^n \in (-\sin^n(\sin 1); \sin^n(\sin 1))$

$|\sin(\sin(n))^n| \underset{\uparrow}{=} \sin|\sin n|^n \leq \sin^n 1 = q^n$ serie geometrica di ragione $0<\sin 1<1$

$\sin x$ è dispari

$\Rightarrow \sum \sin^n 1$ conv $\Rightarrow$ per confronto $\sum|\sin(\sin n)^n|$ conv

$\Rightarrow \sum \sin(\sin n)^n$ conv assolutamente.

$\sum_1^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{\alpha^2}{\sqrt{n}}\right)$ $\alpha\in\mathbb{R}$

oss: $\frac{\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{\alpha^2}{\sqrt{n}}} \to 1$ quindi $a_n = \frac{\alpha^{2n}\ln(1+\alpha^2/\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \Theta\left(\frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\alpha^2}{\sqrt{n}}\right)$

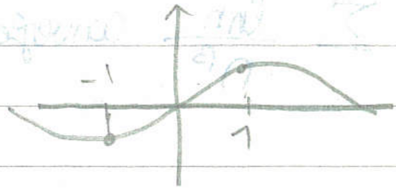
cioè $\sum a_n$ ha lo stesso andamento asintotico di $\sum_1 \frac{\alpha^{2(n+1)}}{n}$

e quindi converge se $|\alpha|<1$
diverge se $|\alpha|\geq 1$

$\sum_1 n^{-\ln(n)}$

$n^{-\ln(n)} = e^{-\ln^2 n}$. oss: $n^2 e^{-\ln^2 n} = e^{2\ln n}\cdot e^{-\ln^2 n} = e^{\overbrace{\ln n(2-\ln n)}^{<0}} \longrightarrow 0$

$\Rightarrow a_n = n^{-\ln n} \underset{\text{asintoticamente}}{\ll} \frac{1}{n^2}$ la cui serie converge e quindi $\sum a_n$ conv.



$\sum_{1}^{+\infty} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

Ora: $\ln n! = \sum_{1}^{n} \ln(k) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n \begin{matrix} > n-2 \\ < n \cdot \ln n \end{matrix}$ $\forall n \geq 2$

da cui $a_n = \ln(n!)/n^\alpha > 0$

Inoltre $a_n > \frac{1-2/n}{n^{\alpha-1}} = \Theta\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$ quindi se $\alpha - 1 \leq 1$ si ha ($\alpha \leq 2$)

$\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ div $\Rightarrow \sum a_n$ div

d'altra parte $a_n < \frac{n \cdot \ln n}{n^\alpha} = \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}} \doteq b_n$ FATTO: $\sum b_n$ converge sse $\alpha - 1 > 1$ cioè $\alpha > 2$

da cui se $\alpha \leq 2$ allora $\sum a_n$ div
$\alpha > 2$ conv

$\sum_1 \frac{\ln n}{n^\beta}$ converge sse $\beta > 1$

infatti sia $\beta > 1$

$\frac{\ln n}{n^\beta} = \frac{\ln n}{n^k} \cdot \frac{1}{n^{\beta-k}}$ scelgo k t.c. $\beta - k > 1$, $k > 0$

allora $\frac{\ln n}{n^k} \to 0$ da cui $a_n \underset{\text{asintoticamente}}{\ll} \frac{1}{n^{\beta-k}}$ la cui serie converge essendo $\beta - k > 1$

sia $\beta < 1$ scelgo k t.c. $\beta + k < 1$, $k > 0$

$\frac{\ln n}{n^\beta} = \underbrace{\ln n \cdot n^k}_{\to +\infty} \cdot \frac{1}{n^{\beta+k}} \underset{\text{asintoticamente}}{\gg} \frac{1}{n^{\beta+k}}$ la cui serie diverge essendo $\beta + k < 1$.