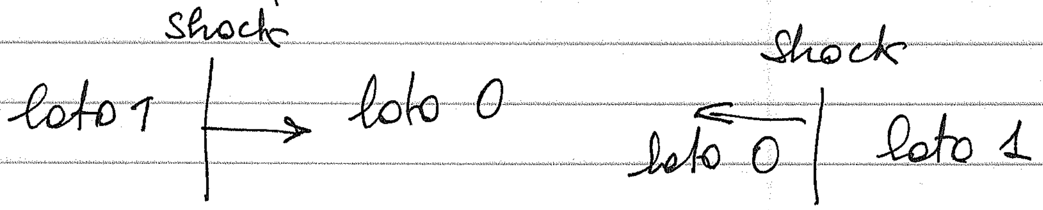
SHOCK COMPRESSIVO E CONDIZIONE DELL'ENTROPIA

Ricordiamo le convenzioni su "prima" e "dopo" lo shock:

lato 0. Denota il gas davanti allo shock, ovvero non ancora attraversato dallo shock

lato 1. Denota il gas dietro lo shock, ovvero le particelle attraversate dallo shock



<u>DEF.</u>

Uno schock si dice <u>COMPRESSIVO</u> se $p_1 > p_0$

Quindi in uno schock compressivo la pressione del gas è innalzata non appena le particelle attraversano lo schock.

Mostriamo adesso che per un gas che obbedisce alla legge $p\rho^{-\gamma} = cost.$ a valle e a monte dello schock allora lo schock è compressivo se e solo se soddisfa la condizione dell'entropia.

Mostriamo questo fatto in più passi.

Per prima cosa mostriamo il seguente risultato: posto

$$Ma_i = \frac{|\dot{s} - u_i|}{c_i} = \frac{U_i}{c_i} \qquad i=0,1$$

allora o $Ma_0 > 1$ e $Ma_1 < 1$ oppure $Ma_0 < 1$ e $Ma_1 > 1$, ovvero la velocità relativa allo shock è supersonica in un lato e subsonica nell'altro.

Per dimostrarlo si parte dalle due (prima e terza) condizioni di Rankine-Hugoniot

$$[\![\rho U]\!] = 0$$

$$[\![\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2}]\!] = 0$$

Si osserva poi che la velocità del suono è

$$c^2 = \gamma p \tau$$

e quindi si scrive la seconda come

$$[\![\frac{1}{\gamma-1} c^2 + \frac{U^2}{2}]\!] = 0$$

ovvero

$$[\![2c^2 + (\gamma-1) U^2]\!] = 0 \Rightarrow [\![\frac{2}{\gamma+1} c^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} U^2]\!] = 0$$

Si introduce quindi

$$\mu^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} > 0 \quad (\text{perché } \gamma>1)$$

e si osserva che

$$\frac{2}{\gamma+1} = 1-\mu^2 = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{\gamma+1-\gamma+1}{\gamma+1}$$

Quindi

$$[\![(1-\mu^2)c^2 + \mu^2 U^2]\!] = 0$$

ovvero

$$(1-\mu^2)c_0^2+\mu^2U_0^2 = (1-\mu^2)c_1^2+\mu^2U_1^2$$

Posto c_*^2 il valore comune cioè

$$(1-\mu^2)c_0^2+\mu^2U_0^2 = c_*^2 = (1-\mu^2)c_1^2 + \mu^2 U_1^2$$

otteniamo

$$\begin{cases} -(1-\mu^2)c_0^2 - \mu^2 U_0^2 = -c_*^2 \\ -(1-\mu^2)c_1^2 - \mu^2 U_1^2 = -c_*^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(1-\mu^2)c_0^2 + (1-\mu^2)U_0^2 = U_0^2 - c_*^2 \\ -(1-\mu^2)c_0^2 + (1-\mu^2)U_1^2 = U_1^2 - c_*^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\mu^2)(u_0^2 - c_0^2) = u_0^2 - c_*^2 \\ (1-\mu^2)(u_1^2 - c_1^2) = u_1^2 - c_*^2 \end{cases}$$

Ora $1-\mu^2 = \frac{2}{\gamma+1} > 0$ e quindi concludiamo

$$|u_0| \gtrless c_0 \iff |u_0| \gtrless c_*$$

$$|u_1| \gtrless c_1 \iff |u_1| \gtrless c_*$$

Adesso riscriviamo l'espressione per c_*^2

$$\rho_1 c_*^2 = \rho_1 [\mu^2 u_1^2 + (1-\mu^2) \underbrace{\gamma p_1 \tau_1}_{c_1^2}] =$$

$$= \rho_1 \mu^2 u_1 + (1-\mu^2) \gamma p_1$$

Ora

$$(1-\mu^2)\gamma = \frac{2\gamma}{\gamma+1} = 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = 1+\mu^2$$

$$\rho_1 c_*^2 = \rho_1 \mu^2 u_1^2 + (1+\mu^2) p_1 \qquad (*)$$

Ricordiamo adesso la seconda condizione di Rankine-Hugoniot

$$[\![p + \rho u^2]\!] = 0$$

e poniamo P il valore comune

$$p_0 + \rho_0 u_0^2 = P = p_1 + \rho_1 u_1^2$$

Quindi

$$\begin{cases} \rho_1 u_1^2 = P - p_1 \\ \rho_0 u_0^2 = P - p_0 \end{cases}$$

Sostituendo nella espressione $(*)$ si ha

$$\rho_1 c_*^2 = \mu^2 (P - p_1) + (1+\mu^2) p_1$$
$$= \mu^2 P + p_1$$

Nello stesso modo si ottiene

$$\rho_0 c_*^2 = \mu^2 P + p_0$$

ovvero questo sistema

$$\begin{cases} \rho_0 c_*^2 = \mu^2 P + p_0 \\ \rho_1 c_*^2 = \mu^2 P + p_1 \end{cases}$$

Eliminando $q_1^2 P$ si ottiene

$$(\rho_1 - \rho_0)\, c_*^2 = p_1 - p_0$$

cioè

$$c_*^2 = \frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0} \qquad (+)$$

Adesso ricordiamo la prima condizione di Rankine-Hugoniot

$$\rho_0 u_0 = N = \rho_1 u_1$$

e la relazione (Δ) a pg. 37

$$N^2 = -\frac{p_0 - p_1}{\tau_0 - \tau_1} = -\frac{p_0 - p_1}{\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1}} =$$

$$= -(\rho_0 \rho_1)\frac{p_0 - p_1}{\rho_1 - \rho_0} = +(\rho_0\rho_1)\frac{p_0 - p_1}{\rho_0 - \rho_1}$$

Del resto

$$N^2 = N N = \rho_0 u_0 \rho_1 u_1 = \rho_0 \rho_1 u_0 u_1$$

Quindi

$$N^2 = -\frac{P_0 - P_1}{\tau_0 - \tau_1} \Rightarrow u_0 u_1 = \frac{P_0 - P_1}{\rho_0 - \rho_1}$$

Confrontando con la (+) abbiamo

$$c_*^2 = u_0 u_1$$

nota come RELAZIONE DI PRADTL

Quindi, riprendendo quanto visto, se
$|u_0| < c_* \Rightarrow |u_0| < c_0$

Ma se $|u_0| < c_*$ la relazione di Prandtl implica $|u_1| > c_*$ e quindi $|u_1| > c_1$.

Viceversa se $|u_0| > c_* \Rightarrow |u_0| > c_0$
Ma $|u_0| > c_*$ implica $|u_1| < c_*$ e quindi $|u_1| < c_1$.

Abbiamo quindi provato

- o $Ma_0 > 1$ e $Ma_1 < 1$
- oppure $Ma_0 < 1$ e $Ma_1 > 1$.

Dobbiamo adesso determinare quale famiglie di caratteristiche si interseca per generare lo shock.
Si ricorda che abbiamo a che fare col sistema (R) di pag. 30, le cui caratteristiche sono

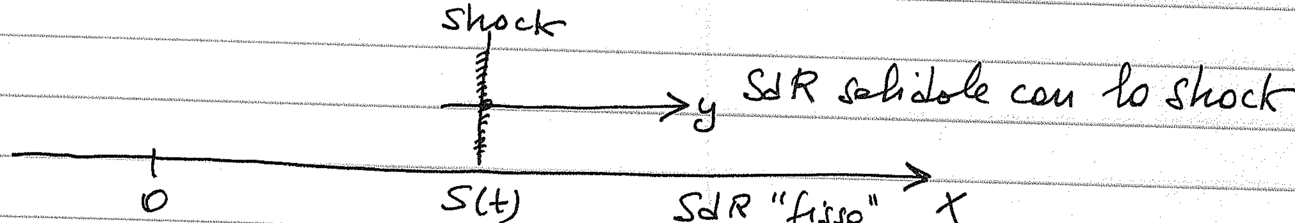
$$\frac{dx}{dt} = u + c \qquad \text{caratteristiche } C_+$$

$$\frac{dx}{dt} = u - c \qquad \text{caratteristiche } C_-$$

$$\frac{dx}{dt} = u \qquad \text{caratteristiche } C_0.$$

Nelle equazioni delle caratteristiche compare u (velocità del gas) mentre le condizioni di Rankine-Hugoniot coinvolgono $U = u - \dot{s}$.

L'idea è quindi quella di scrivere il sistema di equazioni (R) in un sistema di riferimento solidale con lo shock.



Supponendo $S(0) = 0$ e indicato con y l'ascisse nel SdR solidale con lo shock, abbiamo

$$x = S(t) + y$$

$$y = x - S(t)$$

Una qualsiasi grandezza f può essere espressa in entrambe i s.d.R, cioè

$$\hat{f}(y,t) = f(y+s(t), t)$$

$$f(x,t) = \hat{f}(\underbrace{x-s(t)}_{y}, t)$$

In particolare

$$f_x = \hat{f}_y \frac{\partial y}{\partial x} = \hat{f}_y$$

$$f_t = \hat{f}_y \underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{-\dot{s}} + \hat{f}_t = -\dot{s}(t)\,\hat{f}_y + \hat{f}_t$$

Operando questa trasformazione il sistema

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ \varepsilon \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{c^2}{\gamma\rho} & u & \gamma-1 \\ 0 & \frac{c^2}{\gamma} & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ \varepsilon \end{pmatrix}_x$$

si trasforma in

$$\begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{u} \\ \hat{\varepsilon} \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} \hat{u}-\dot{s} & \rho & 0 \\ \frac{c^2}{\gamma\rho} & \hat{u}-\dot{s} & \gamma-1 \\ 0 & \frac{c^2}{\gamma} & \hat{u}-\dot{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{u} \\ \hat{\varepsilon} \end{pmatrix}_y$$

Quindi, nel s.d.r. solidale con lo shock le equazioni delle caratteristiche sono

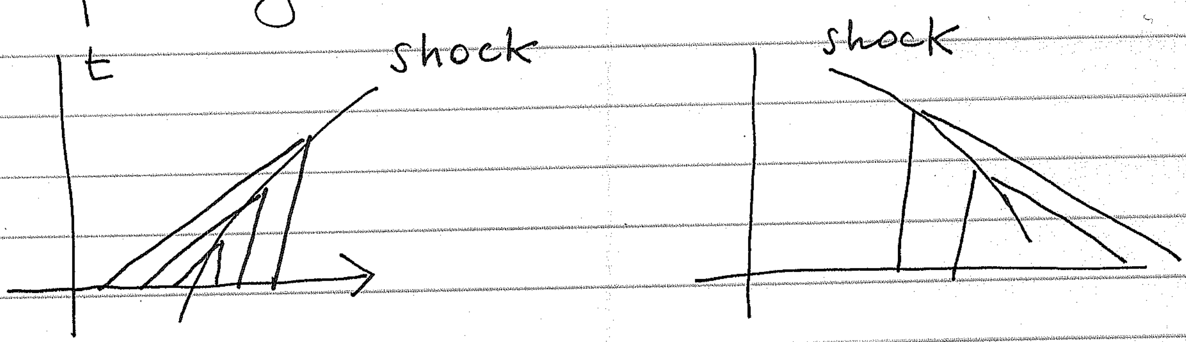
$$\frac{dy}{dt} = (\hat{u} - \dot{s}) + c = U + c \qquad \text{caratteristica } C_+$$

$$\frac{dy}{dt} = (\hat{u} - \dot{s}) - c = U - c \qquad \text{caratteristica } C_-$$

$$\frac{dy}{dt} = \hat{u} - \dot{s} = U \qquad \text{caratteristica } C_0$$

<u>N.B.</u> con $\hat{u}$ si intende la velocità delle particelle del gas rispetto al SdR "fisso" x espressa in termini della variabile y.

Posto come sopra è facile individuare quale famiglia di caratteristiche genera lo shock. Lo shock si genera quando si ha un andamento delle caratteristiche di questo genere



Abbiamo quindi questi due casi

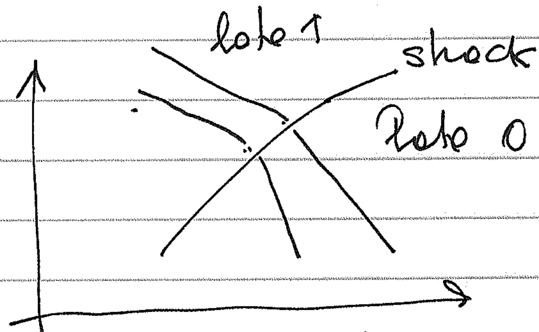
- CASO 1 Nel sdr del fluido lo shock avanza verso destra, ovvero nel SdR dello shock il fluido si muove verso sinistra.

$U < 0$

Condizione di Rankine Hugoniot $[\![\rho U]\!] = 0$ impone $U_0 < 0$ e $U_1 < 0$

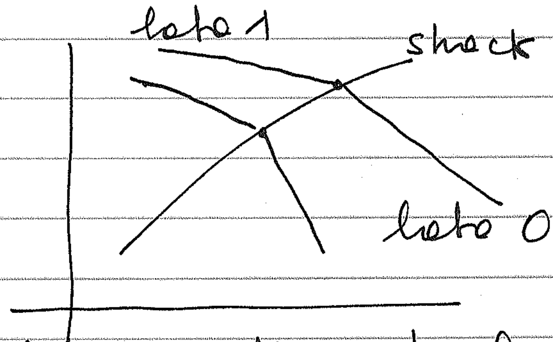
Vediamo il l'andamento delle caratteristiche in vicinanza dello shock.

Caratteristiche C_0 $\frac{dy}{dt} = U < 0$ sia a dx che a sx dello shock



le caratteristiche C_0 non hanno un andamento tale da generare lo shock

Caratteristiche C_- $\frac{dy}{dt} = U - c < 0$ sia a dx che a sx dello shock

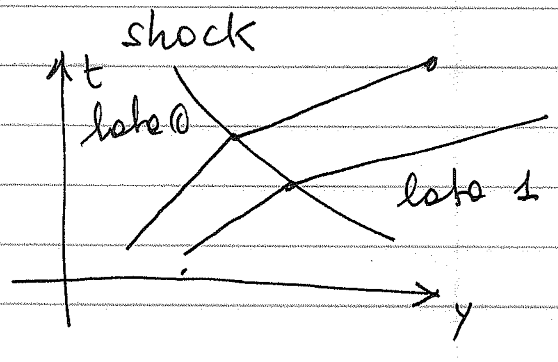


le caratteristiche C_- non generano lo shock

Quindi nel caso 1 lo shock è generato dall'incrocio delle caratteristiche C_+

- CASO 2 $U>0$ — Nel sdR dello shock il fluido si muove verso destra

Ragionando come prima è facile provare che in questo caso lo shock è generato dall'incrocio delle caratteristiche C_-. In questo caso infatti l'andamento delle caratteristiche C_0 e C_+ è il seguente



Mostriamo adesso che uno shock è compressivo se e solo se $\rho_1 > \rho_0$.

La prova è banale: si ricorda che lo shock si dice compressivo quando $p_1 > p_0$

Ricordando la (+) di pag. 47

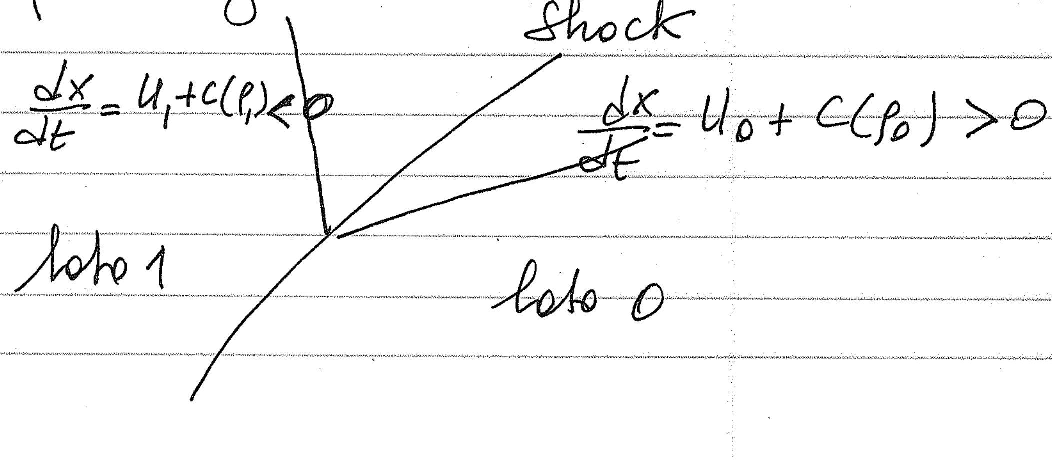
si ha

$$C_*^2 = \frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0} > 0$$

Quindi se $p_1 > p_0$ (shock compressivo) allora $\rho_1 > \rho_0$. Viceversa se $\rho_1 > \rho_0$ allora $p_1 > p_0$ e lo shock deve essere compressivo.

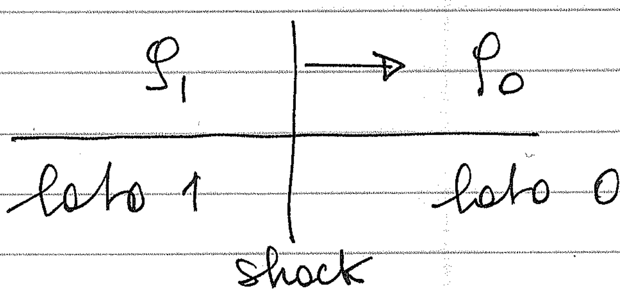
Mostriamo adesso che uno shock non compressivo viola la condizione dell'entropia.
Supponiamo, per fissare le idee, che $U < 0$. Lo stesso ragionamento che stiamo per sviluppare si applica anche al caso $U > 0$.

Se $U < 0$ sappiamo lo shock è generato dall'incrocio delle caratteristiche C_+. Mostriamo che se lo shock non è compressivo allora abbiamo un andamento delle caratteristiche di questo genere



che viola esplicitamente il principio dell'entropia.

Se lo shock non è compressivo (e consideriamo $U \leq 0$) allora $\rho_1 < \rho_0$



ed inoltre $U_1 < 0$ e $U_0 < 0$. Sappiamo poi che

$$\rho_1 U_1 = \rho_0 U_0 \Rightarrow U_1 = \frac{\rho_0}{\rho_1} U_0$$

e dunque

$$U_1 < U_0 < 0$$

Consideriamo adesso

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma p \tau}$$

$$\frac{\partial c}{\partial \rho} = \frac{\partial c}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \rho} = -\tau^2 \frac{\partial c}{\partial \tau}$$

Mostriamo che c è monotona crescente con ρ_0

Ora nella formula che definisce

$$c = \sqrt{\gamma p \tau}$$

p non è indipendente da τ. Infatti essendo a pavallo dello shock p, τ sono legati dal vincolo dato dalla funzione di Hugoniot

$$H(p,\tau) = (\tau - \Gamma\tau_0)p - (\tau_0 - \Gamma\tau)p_0 = 0$$

Quindi $\qquad \Gamma = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\gamma}{2\sqrt{c}}\left[p + \tau\frac{\partial p}{\partial \tau}\right]$$

Per calcolare $\frac{\partial p}{\partial \tau}$ si fa ricorso alla funzione di Hugoniot, cioè

$$H_p \frac{\partial p}{\partial \tau} + H_\tau = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \tau} = -\frac{H_\tau}{H_p}$$

$$\left.\begin{aligned} H_\tau &= p + \Gamma p_0 \\ H_p &= \tau - \Gamma\tau_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \tau} = -\left(\frac{p + \Gamma p_0}{\tau - \Gamma\tau_0}\right)$$

Quindi

$$\frac{\partial c}{\partial \rho} = -\tau^2 \frac{\partial c}{\partial \tau} = \tau^2 \frac{p + \Gamma p_0}{\tau - \Gamma \tau_0} =$$

$$= \frac{1}{\rho^2} \frac{p + \Gamma p_0}{\frac{1}{\rho} - \frac{\Gamma}{\rho_0}} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{p + \Gamma p_0}{\rho_0 - \Gamma \rho}$$

Ora $\Gamma = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} < 1$ ancorché è positivo.

Quindi se $\rho < \rho_0$ allora

$$0 < \rho_0 - \rho < \rho_0 - \Gamma \rho$$

Quindi se $\rho < \rho_0 \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial \rho} > 0$

Alla luce di questo fatto calcoliamo la tendenza delle caratteristiche C_+ a monte e a valle dello shock

Lato 0 a monte dello schok $\quad u_0 + c(\rho_0)$

Lato 1 a valle dello shock $\quad u_1 + c(\rho_1)$.

Se $\rho_1 < \rho_0 \Rightarrow c(\rho_1) < c(\rho_0)$

Inoltre abbiamo $u_1 < u_0 < 0$. Quindi

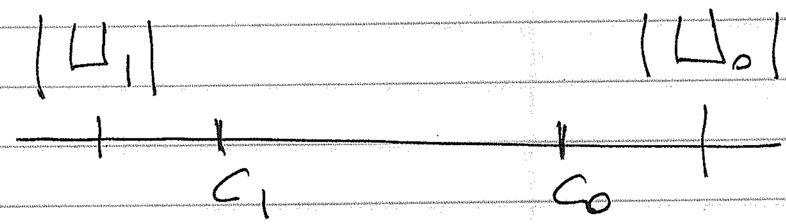
$$u_1 + c(\rho_1) < u_0 + c(\rho_0)$$

Applichiamo adesso la relazione di Prandtl: se $|u_0| > c(\rho_0)$ allora $|u_1| < c(\rho_1)$ o viceversa.

Inoltre $c_1 < c_0$ $\quad c_1 = c(\rho_1)$ e $c_0 = c(\rho_0)$

Abbiamo quindi due possibilità.

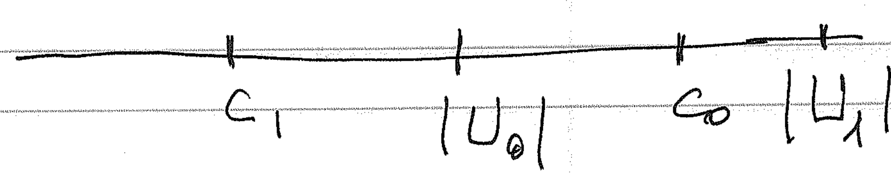
- $|u_0| > c_0$ e $|u_1| < c_1$



Ma $u_1 < u_0 < 0 \Rightarrow |u_1| > |u_0|$

Quindi tale possibilità non può realizzarsi

- $|u_0| < c_0$ e $|u_1| > c_1$



Quindi la sola possibilità compatibile con $c_1 < c_0$ è:

$$|u_0| < c_0 \quad e \quad |u_1| > c_1$$

con $u_1 < u_0 < 0$ e $c_1 < c_0$.

Tornando alla pendenza delle caratteristiche C_+ abbiamo

$$\underset{<0}{u_1} + \underset{>0}{c(\rho_1)} \quad \text{con } |u_1| > c_1$$

$$\Rightarrow u_1 + c(\rho_1) < 0$$

$$\underset{<0}{u_0} + \underset{>0}{c(\rho_0)} \quad \text{con } |u_0| < c_0$$

$$\Rightarrow u_0 + c(\rho_0) > 0$$

Quindi se lo shock non fosse compressivo l'andamento delle caratteristiche sarebbe quello mostrato nella figura di pag. 54.

In tal caso le caratteristiche violano il principio dell'entropia.

Mostriamo invece che se lo shock è compressivo il principio dell'entropia è soddisfatto.

Infatti se $\rho_1 > \rho_0$ allora $c_1 > c_0$.

Quindi l'unica configurazione compatibile con la relazione di Prandtl e con $|U_0| > |U_1|$ è la seguente

$$c_0 \qquad |U_1| \qquad |U_0| \qquad c_1$$

Ricordiamo che dalla relazione di Rankine Hugoniot

$$\rho_0 U_0 = \rho_1 U_1 \qquad U_0 = \frac{\rho_1}{\rho_0} U_1$$

e cioè

$$U_0 < U_1 < 0$$

ovvero $|U_0| > |U_1|$

Allora se lo shock è compressivo (cioè $\rho_1 > \rho_0$) deve essere

$$|U_0| > c_0 \quad e \quad |U_1| < c_1$$

Vediamo adesso le tendenze delle caratteristiche C_+

Lato 0 $\quad U_0 + c_0 \quad c_0 = c(\rho_0)$

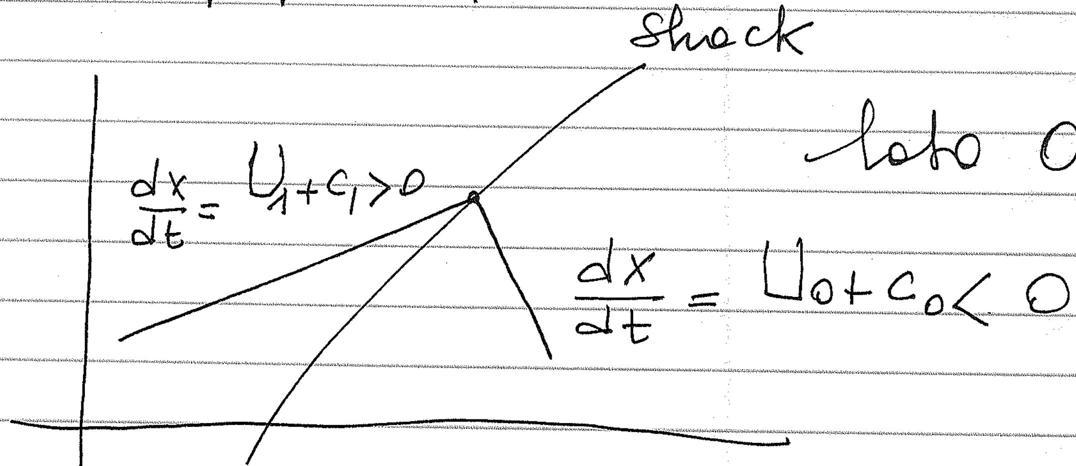
Lato 1 $\quad U_1 + c_1 \quad c_1 = c(\rho_1)$

lato 0: $(\underbrace{U_0}_{<0} + \underbrace{c_0}_{>0}) < 0$

con $|U_0| > c_0$

lato 1: $(\underbrace{U_1}_{<0} + \underbrace{c_1}_{>0}) > 0$

con $|U_1| < c_1$



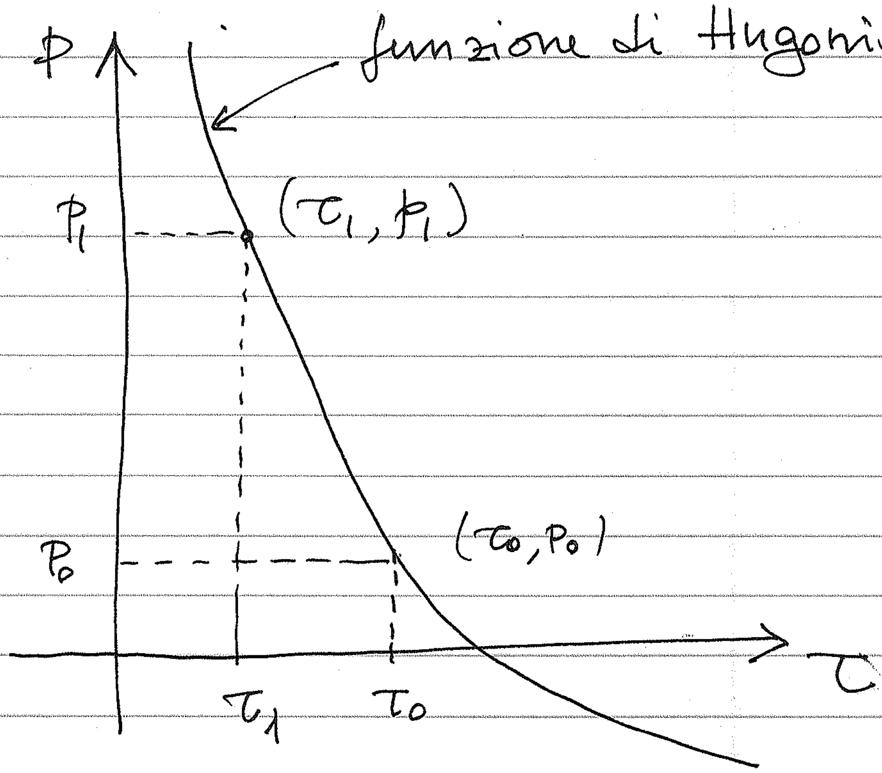
Il principio dell'entropia è soddisfatto.

Possiamo quindi concludere: lo shock soddisfa il principio dell'entropia se e solo se è compressivo cioè:

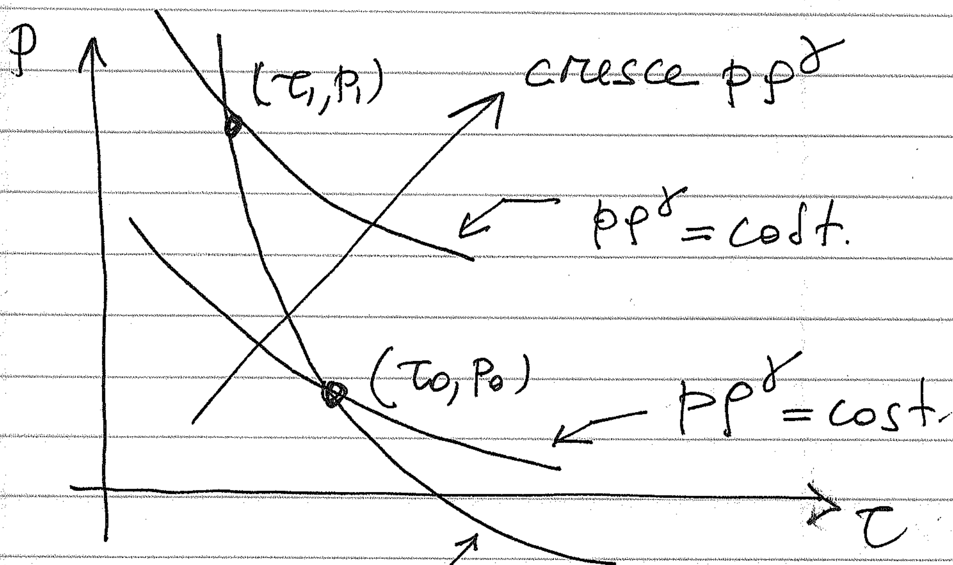
$$p_1 > p_0 \quad e \quad \rho_1 > \rho_0 \quad \text{ovvero } \tau_1 < \tau_0$$

Tornando adesso al grafico di pag. 41, dato (p_0, τ_0), ovvero pressione e volume specifico a monte dello shock, sappiamo dove piazzare (p_1, τ_1), ovvero pressione e volume specifico a valle dello shock:

$$p_1 > p_0 \quad e \quad \tau_1 < \tau_0$$



Se adesso tracciamo le curve isoentropiche $p\rho^\gamma = \text{cost}$ per (p_0, τ_0) e (p_1, τ_1) abbiamo



Funzione di Hugoniot.

Ma allora nello shock compressivo, che soddisfa il principio dell'entropia, abbiamo che l'entropia a valle dello shock è MAGGIORE di quella a monte cioè:

$$S_1 > S_0$$

Abbiamo quindi provato la seguente catena di implicazioni

$$S_1 > S_0 \iff \text{shock compressivo} \iff \text{principio di aumento dell'entropia.}$$