ONDE DI SHOCK.

Abbiamo visto che un'equazione iperbolica del primo ordine (oppure un sistema di equazioni iperboliche) può generare soluzioni discontinue. Vediamo come si affronta il problema.

Siano $u_1 \dots u_n$ n variabili dipendenti (incognite) $u_i = u_i(\underline{x}, t)$ $i = 1 \dots n$.

Siano

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} P_1(u_1 \dots u_n, \underline{x}, t) \\ \vdots \\ P_n(u_1 \dots u_n, \underline{x}, t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{Q}_i = \begin{pmatrix} Q_{1i}(u_1 \dots u_n, \underline{x}, t) \\ \vdots \\ Q_{ni}(u_1 \dots u_n, \underline{x}, t) \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3$$

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} R_1(u_1 \dots u_n, \underline{x}, t) \\ \vdots \\ R_n(u_1 \dots u_n, \underline{x}, t) \end{pmatrix}$$

DEF.

Un sistema di leggi di conservazione è un sistema di n. equazioni alle derivate parziali del primo ordine scritto nella forma

$$\frac{\partial \underline{P}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \underline{Q}_i}{\partial x_i} = \underline{R} \qquad (*)$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\begin{pmatrix} Q_{1i} \\ \vdots \\ Q_{ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_N \end{pmatrix}$$

La teoria che verrà sviluppata si applica quasi esclusivamente ai sistemi di leggi di conservazione del tipo (*).

SOLUZIONI DEBOLI

Consideriamo la semplice equazione di conservazione della massa scritta in 1D, ovvero

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0 \qquad (+)$$

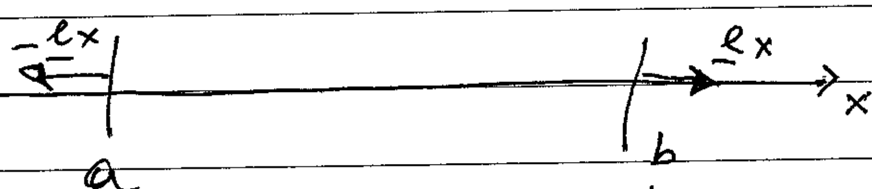
Supponiamo che la velocità di propagazione u sia esprimibile in termini di ρ, ovvero $u = u(\rho)$. Introduciamo pertanto

$$f(\rho) = \rho\, u(\rho)$$

L'eq. si riscrive come

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial x} = 0$$

Come sappiamo la (+) è la forma locale del più generale principio di conservazione della massa. Se prendiamo un intervallo $[a, b]$ sull'asse x



$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\text{Massa contenuta} \\ \text{in } [a,b]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Flusso attraverso} \\ x=a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Flusso} \\ \text{attraverso} \\ x=b\end{pmatrix}$$

Ora il flusso (massa che fluisce nell'unità di tempo) si calcola come

$$\underline{J} \cdot \underline{n} = -\rho\, \underline{u} \cdot \underline{n}$$

normale esterna

Se entrambi i flussi sono positivi ($\underline{u} \,//\, \underline{n}$) allora si ha una diminuzione della massa totale contenuta in $[a,b]$.

Flusso attraverso $x=a$ $= -\rho u\big|_{x=a} \underline{e}_x \cdot (-\underline{e}_x)$

$$= \rho u\big|_{x=a} = f(\rho)\big|_{x=a}$$

Flusso attraverso $x=b$ $= -\rho u\big|_{x=b} \underline{e}_x \cdot (\underline{e}_x)$

$$= -\rho u\big|_{x=b} = -f(\rho)\big|_{x=b}$$

Abbiamo quindi questa versione integrale dell'equazione di conservazione della massa

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^b \rho \, dx\right) = -\left(f(\rho)\big|_{x=b} - f(\rho)\big|_{x=a}\right)$$

Se adesso supponiamo che ρ presenti una discontinuità in $x = s(t)$

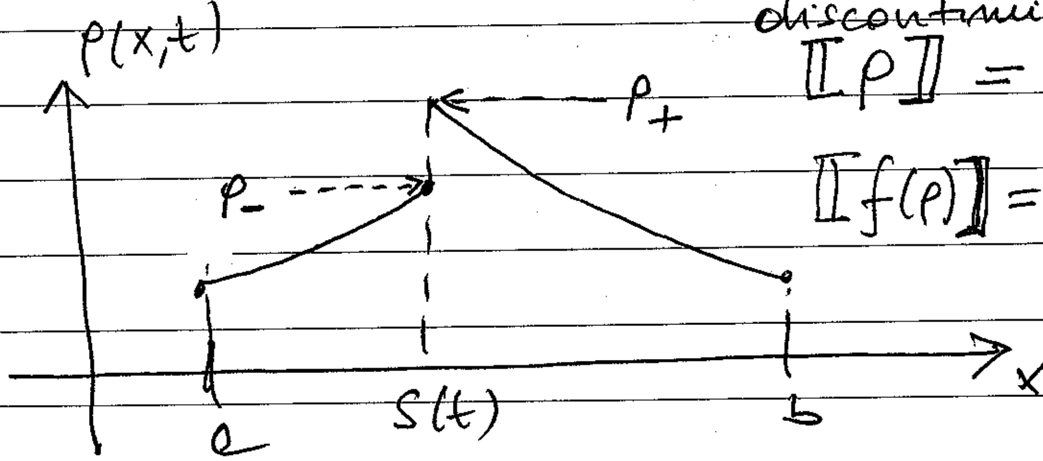
potremo scrivere

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^{s(t)} \rho\,dx + \int_{s(t)}^{b} \rho\,dX\right) = -f(\rho)\Big|_a^b$$

si denota con $[\![\cdot]\!]$ il salto attraverso la discontinuità

$$[\![\rho]\!] = \rho_+ - \rho_-$$

$$[\![f(\rho)]\!] = f(\rho_+) - f(\rho_-)$$



$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^{s(t)} \rho\,dx + \int_{s(t)}^{b} \rho\,dx\right) =$$

$$= \int_a^{s(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx + \rho\Big|_{s-}\dot{s} + \int_{s(t)}^{b} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx - \rho\Big|_{s+}\dot{s}$$

Se adesso supponiamo che ρ sia liscia e derivabile per $x \in [a, s(t))$ e $x \in (s(t), b]$ e facciamo il limite per $a \to s-$ e $b \to s+$ si ottiene

$$\rho_-\,\dot{s} - \rho_+\,\dot{s} = -[f(\rho_+) - f(\rho_-)]$$

ovvero

$$(\rho_+ - \rho_-)\dot{s} = (f(\rho_+) - f(\rho_-))$$

$$[\![\rho]\!]\,\dot{s} = [\![f(\rho)]\!] \quad (\Delta)$$

detta CONDIZIONE di SALTO.
Evidentemente nel derivare la (Δ) si è implicitamente assunto che $s(t)$ sia derivabile e che sulle discontinuità non siano localizzate sorgenti/pozzi di massa.

OSSERVAZIONE

Se attraverso $s(t)$ ρ non presenta alcuna discontinuità cioè $[\![\rho]\!] \to 0$, allora

$$\dot{s} = \lim_{\rho^\pm \to \rho} \frac{f(\rho_+) - f(\rho_-)}{\rho_+ - \rho_-} = f'(\rho)$$

Se calcoliamo le caratteristiche dell'equazione

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} + f'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

otteniamo

$$\begin{cases} \tau = t \\ \dfrac{dx}{d\tau} = f'(\rho) \\ \dfrac{d\rho}{d\tau} = 0 \end{cases} \implies$$

In questo caso lo shock (che non c'è) coincide con la caratteristica.

Quindi, nel caso le ρ sia continue, le caratteristiche che possono trasportare discontinuità nelle derivate di ρ (shock deboli, cioè discontinuità nella pendenza di ρ) $\square$

Vediamo un altro modo per giungere alla condizione (Δ). Lavoriamo però con una legge di conservazione in 1D, cioè con

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad (\nabla)$$

Se nel piano (x,t) introduciamo il vettore

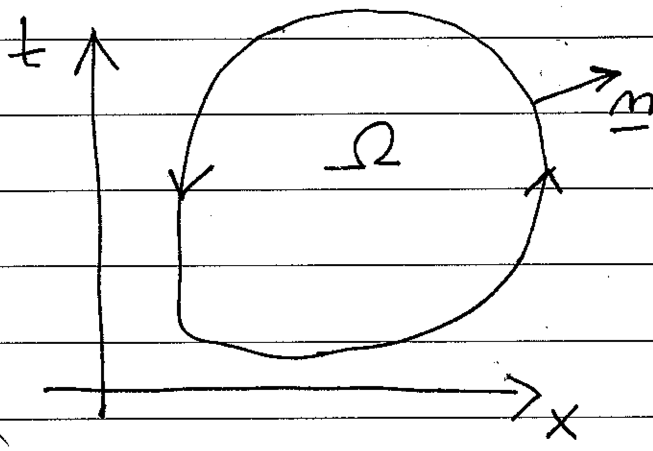
$$\underline{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$$

la (∇) può riscriversi come

$$\nabla \cdot \underline{E} = 0$$

intendendo $\nabla \cdot (\;) = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$.

Se adesso sempre nel piano (x,t) consideriamo un dominio Ω come in figura e si applica il teorema della divergenza abbiamo



$$\int_S \nabla \cdot \underline{E} \, ds = \int_{\partial\Omega} \underline{E} \cdot \underline{n} \, dl$$

Se il bordo $\partial\Omega$ è parametrizzato come

$$\begin{cases} x = x(q) \\ t = t(q) \end{cases}$$

la normale esterna è

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + t'^2}} \left(t'(q) \underline{e}_x - x'(q) \underline{e}_t \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x'^2 + t'^2}} \begin{pmatrix} t'(q) \\ -x'(q) \end{pmatrix}$$

mentre

$$dl = \sqrt{x'^2 + t'^2} \, dq$$

Quindi $\underline{E} \cdot \underline{n}\, ds$ si traduce in questa forma differenziale

$$\underline{E} \cdot \underline{n}\, dl = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{x'^2 + t'^2}} \begin{pmatrix} t'(\rho) \\ -x'(\rho) \end{pmatrix} \sqrt{x'^2 + t'^2}\, d\rho$$

$$= Q\, t'(\rho) - P\, x'(\rho)\, d\rho$$

ovvero

$$\int_{\partial\Omega} \underline{E} \cdot \underline{n}\, dl = \oint_{\partial\Omega} \underset{\substack{\uparrow \\ E_x}}{Q}\, dt - \underset{\substack{\uparrow \\ E_t}}{P}\, dx$$

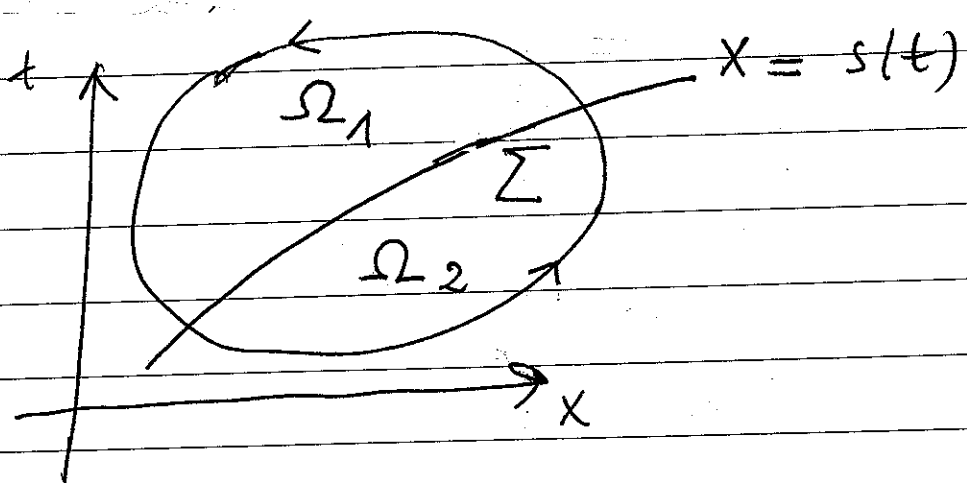
Quindi la versione 2D del teorema della divergenza è:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{E}\, ds = \oint_{\partial\Omega} E_x\, dt - E_t\, dx$$

Ora se $\underline{E}$ è derivabile ovunque in Ω (sì che $\nabla \cdot \underline{E}$ è ovunque definita in E) allora

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{E}\, ds = 0 \implies \oint_{\partial\Omega} E_x\, dt - E_t\, dx = 0$$

Il viceversa tuttavia non è vero perchè $\underline{E}$ potrebbe non essere derivabile ovunque in Ω. Supponiamo infatti che in Ω sia presente una discontinuità lungo la curva Σ data da $x = s(t)$

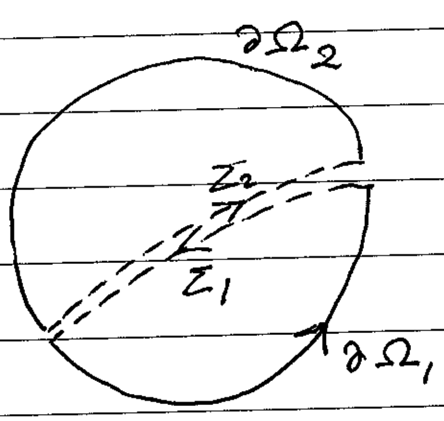


Supponiamo che $\underline{E}$ sia continuo e derivabile in Ω_1 e Ω_2 e che

$$0 = \oint_{\partial\Omega} E_x\,dt - E_t\,dx$$

$$\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \partial\Omega_2$$

essendo Σ_1 e Σ_2 le due "facce" della discontinuità Σ.



$$\oint_{\partial\Omega} E_x\,dt - E_t\,dx = \int_{\partial\Omega_1 \cup \Sigma_1} E_x\,dt - E_t\,dx \; +$$

$$+ \int_{\partial\Omega_2 \cup \Sigma_2} E_x\,dt - E_t\,dx$$

Volendo si può applicare il teorema della divergenza ai due integrali e concludere

$$0 = \oint_{\partial\Omega} E_x\,dt - E_t\,dx \implies \int_{\Omega_1} \nabla\cdot\underline{E}\,ds + \int_{\Omega_2} \nabla\cdot\underline{E}\,ds = 0$$

In particolare se consideriamo Ω arbitrario anche tagliato in due dalla curva di discontinuità Σ, abbiamo

$$0 = \oint_{\partial\Omega} E_x\,dt - E_t\,dx \implies \begin{array}{l} \nabla\cdot\underline{E} = 0 \quad \text{in } \Omega_1 \\ \nabla\cdot\underline{E} = 0 \quad \text{in } \Omega_2 \end{array}$$

ma <u>non</u> abbiamo

$$0 \oint_{\partial\Omega} E_x\,dt - E_t\,dx \implies \nabla\cdot\underline{E} \text{ in } \Omega.$$

Tuttavia abbiamo anche un'altra conseguenza. Infatti

$$\partial\Omega = \begin{cases} \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \\ (\partial\Omega_1 \cup \Sigma_1) \cup (\partial\Omega_2 \cup \Sigma_2) \end{cases}$$

$$\oint_{\partial\Omega} E_x dt - E_t dx = \begin{cases} \oint_{\partial\Omega_1} E_x dt - E_t dx + \oint_{\partial\Omega_2} E_x dt - E_t dx \\ \oint_{\partial\Omega_1} (\dots) + \int_{\Sigma_1} (\dots) + \int_{\partial\Omega_2} (\dots) + \int_{\Sigma_2} (\dots) \end{cases}$$

Da cui, confrontando, deve essere

$$\int_{\Sigma_1} E_x dt - E_t dx + \int_{\Sigma_2} E_x dt - E_t dx = 0$$

Siccome $\Sigma_2 = -\Sigma_1$, se denotiamo

con $E_{x,1} = E_x \big|_{\Sigma_1}$; $E_{x,2} = E_x \big|_{\Sigma_2}$

$E_{t,1} = E_t \big|_{\Sigma_1}$ e $E_{t,2} = E_t \big|_{\Sigma_2}$

abbiamo

$$\int_{\Sigma_1} (E_{x,1} - E_{x,2})\,dt - (E_{t,1} - E_{t,2})\,dx = 0$$

Ora la discontinuità Σ_1 è descritta da $x = s(t)$, con $t \in I \subset \mathbb{R}$ intervallo, per cui

$$\int_{\Sigma_1} (\cdots) = \int_I \left([\![E_x]\!] - [\![E_t]\!] \dot{s} \right) dt$$

Di conseguenza, data l'arbitrarietà dell'intervallo I,

$$[\![E_x]\!] = \dot{s}\, [\![E_t]\!]$$

dove $[\![\cdots]\!] = (\cdots)\big|_{\Sigma_1} - (\cdots)\big|_{\Sigma_2}$.

Ricordando che $E_x = Q$ e $E_t = P$ abbiamo quindi ritrovato le condizione di salto

$$\dot{s}\, [\![P]\!] = [\![Q]\!]$$

Se infatti $P = \rho$ e $Q = f(\rho)$ si ottiene nuovamente $\dot{s}\,[\![\rho]\!] = [\![f(\rho)]\!]$.

Volendo ricapitolare al posto della legge di conservazione in forma differenziale

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad \text{in } \Omega \qquad (\circ)$$

abbiamo introdotto una formulazione integrale

$$\oint_\gamma P\,dx - Q\,dt = 0 \qquad (\square)$$

$\forall\, \gamma$ curva chiusa regolare contenuta in Ω.

La formulazione $(\square)$ ha il pregio di definire soluzioni anche quando queste non sono continue. La dove le soluzioni sono continue e differenziabili $(\square)$ e $(\circ)$ sono equivalenti.

Introduciamo quindi il concetto di SOLUZIONE DEBOLE $u(x,t)$ come la funzione che soddisfa la forma $(\square)$. Più in particolare, una soluzione debole della legge di conservazione sarà una funzione C^1 a tratti e che soddisfa la condizione

$$\dot{s}\,[\![P]\!] = [\![Q]\!]$$

in corrispondenza delle discontinuità.

QUESTIONI DI UNICITÀ

Si comincia osservando che la formulazione debole di una legge di conservazione non è unica. Infatti se partiamo da

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial x} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + f'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

Queste si può anche scrivere come

$$\rho\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho f'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho^2}{2}\right) + \frac{\partial F(\rho)}{\partial x} = 0 \quad (*)$$

dove $F(\rho)$ è tale che $F'(\rho) = \rho f'(\rho)$

Quindi la $(*)$ dà luogo alla seguente formulazione debole

$$\oint \frac{\rho^2}{2}\,dx - F(\rho)\,dt = 0$$

ed alla condizione di salto

$$\frac{1}{2}[\![\rho^2]\!]\,\dot{s} = [\![F(\rho)]\!]$$

Nettamente diverse dalla

$$\oint \rho\, dx - f(\rho)\, dt = 0$$

e dalla $\quad [\![\rho]\!] \dot{s} = [\![f(\rho)]\!]$.

Quindi la stessa equazione differenziale dà luogo a più formulazioni integrali ognuna delle quali genera proprie relazioni di salto. Allora quale scegliere?
Ci deve guidare la fisica. La formulazione integrale corretta è quella che corrisponde alla legge di conservazione fisica da cui si parte.

Vediamo adesso un altro problema legato all'unicità della soluzione. Consideriamo il seguente problema

$$(P) \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2}\rho^2\right) = 0 & \begin{array}{l} x > 0 \\ t > 0 \end{array} \\ \rho(x,0) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Questo equivale a $f(\rho) = \dfrac{\rho^2}{2}$, ovvero se $f(\rho) = \rho u$ stiamo considerando $u \propto \rho$.

Il problema (P) è noto anche come il problema del semaforo nei modelli di traffico.

Troviamo le caratteristiche

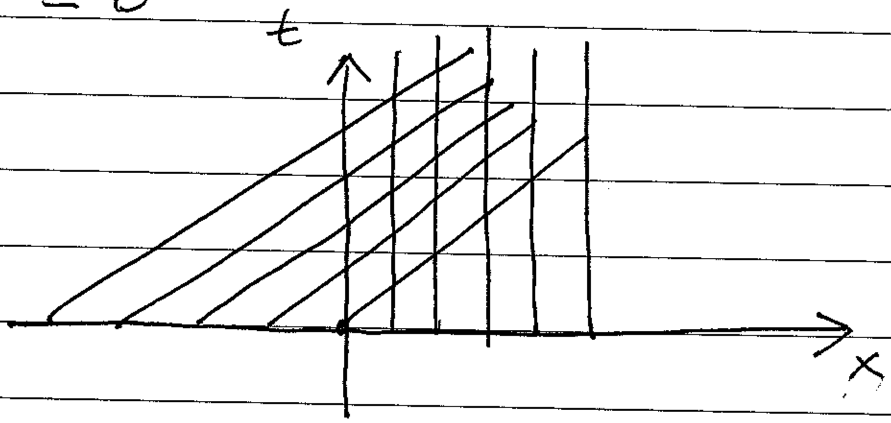
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \rho \\ \dfrac{d\rho}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \rho \text{ costante lungo le caratteristiche}$$

In $x<0$ $\rho = 1$, quindi le caratteristiche che emergono da $x<0$ sono

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 \\ \rho = 1 \end{cases} \Rightarrow x = x_0 + t \quad \text{con } x_0 < 0$$

In $x>0$ $\rho = 0$ e quindi le caratteristiche che emergono da $x>0$ sono

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ \rho = 0 \end{cases} \Rightarrow x = x_0 \quad \text{con } x_0 > 0.$$



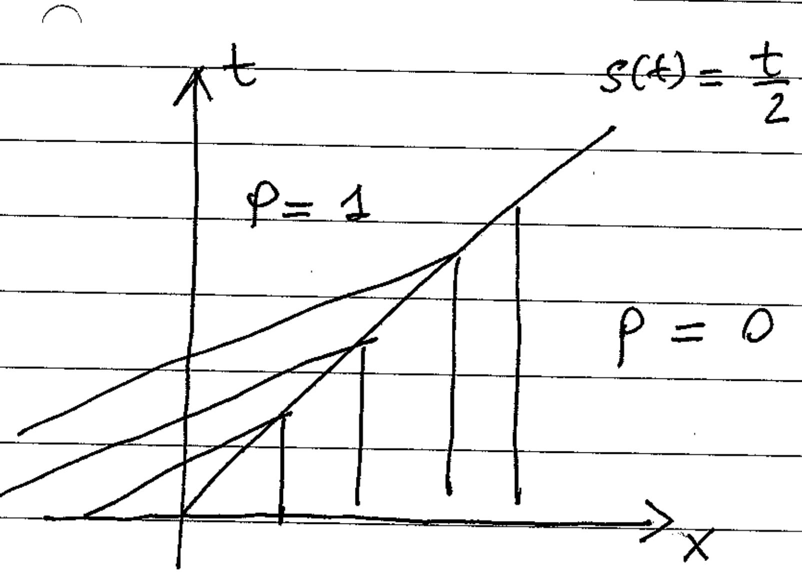
Fin da $t=0$ avviene l'incrocio delle caratteristiche e quindi la formazione di uno shock che scriveremo come $x = s(t)$ con $s(0)=0$. Scriviamo la condizione di salto

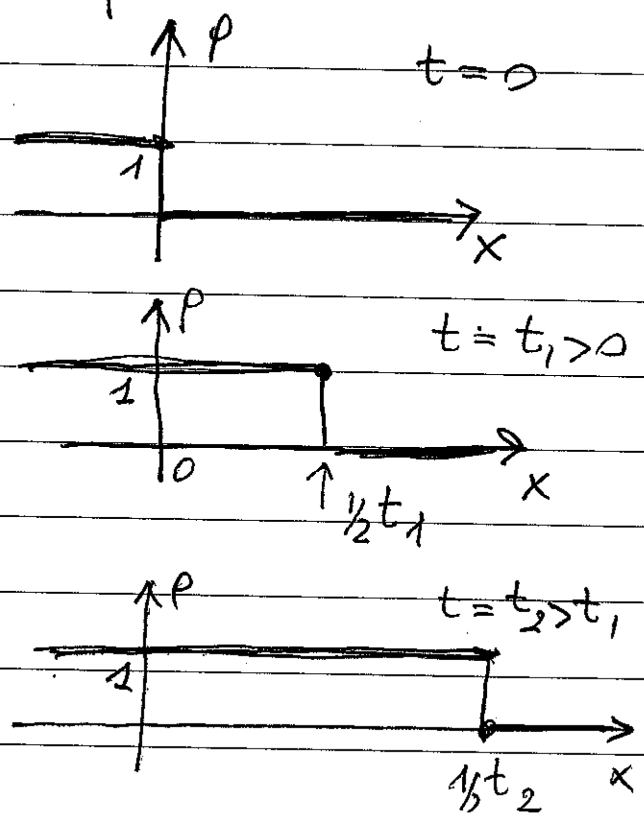
$$[\![\rho]\!]\,\dot{s} = [\![\tfrac{1}{2}\rho^2]\!]$$

$$(\underbrace{\rho_+}_{0} - \underbrace{\rho_-}_{1})\,\dot{s} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\rho_+^2}_{0} - \underbrace{\rho_-^2}_{1}\right)$$

$$\begin{cases} \dot{s} = \dfrac{1}{2} \\ s(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow s(t) = \frac{t}{2}$$

La situazione è dunque questa





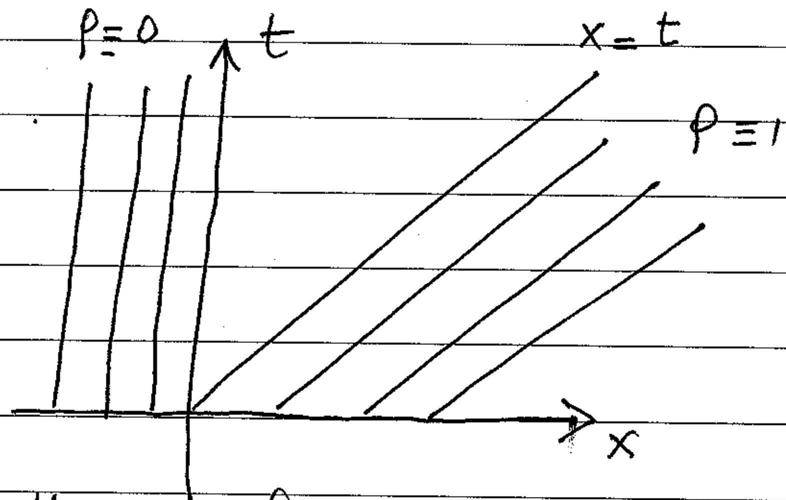
Consideriamo adesso lo stesso problema ma con differente condizione iniziale

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho^2}{2}\right) = 0 \\ \rho(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Il panorama delle caratteristiche adesso è il seguente:

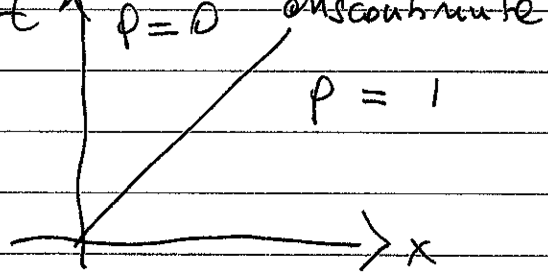
$x = x_0$ se $x_0 < 0$

$x = x_0 + t$ se $x_0 > 0$



Le caratteristiche non riempiono tutto il piano (x,t).

Assumendo la presenza di una discontinuità localizzata nella regione "triangolare"

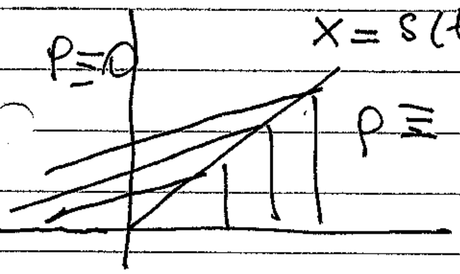


abbiamo

$$(\underbrace{\rho_+}_{=1} - \underbrace{\rho_-}_{=0})\,\dot{s} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\rho_+^2}_{1} - \underbrace{\rho_-^2}_{0}\right)$$

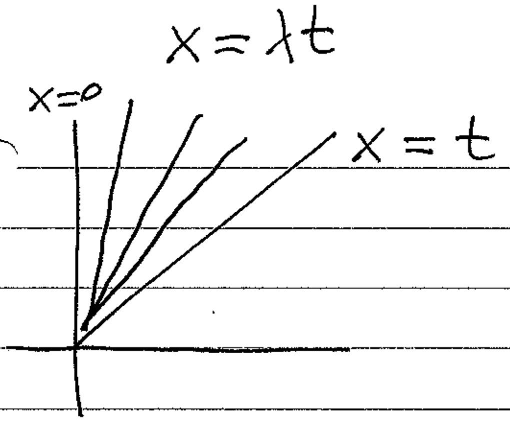
$$\begin{cases} \dot{s} = 1/2 \\ s(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \quad s(t) = t/2$$

Quindi una soluzione è la seguente



$$\rho = \begin{cases} 1 & x > 0,\ 0 < t < 2x \\ 0 & \{x < 0,\ t > 0\} \cup \{x > 0,\ t > 2x\} \end{cases}$$

Tuttavia questa non è unica. Altre soluzioni sono possibili.
Infatti considerando un'onda di espansione nella regione triangolare (come fatto nel caso dell'espansione di Prandtl-Meyer o del moto impulsivo del pistone) consideriamo un fascio di caratteristiche che fuoriesce dall'origine.



$$\lambda \in [0,1]$$

Lungo ciascuna caratteristica la ρ è costante

$$\rho\Big|_{x=\lambda t} = \text{cost.}$$

Fissata la caratteristica λ abbiamo

$$\rho\Big|_{x=\lambda t} = \rho\left(x\,;\,\frac{x}{\lambda}\right) = \text{cost.}$$

$$\frac{d\left(\rho\big|_{x=\lambda t}\right)}{dx} = \frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\frac{1}{\lambda} = 0$$

Del resto $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\,\dfrac{\partial\rho}{\partial x} = 0$, per cui

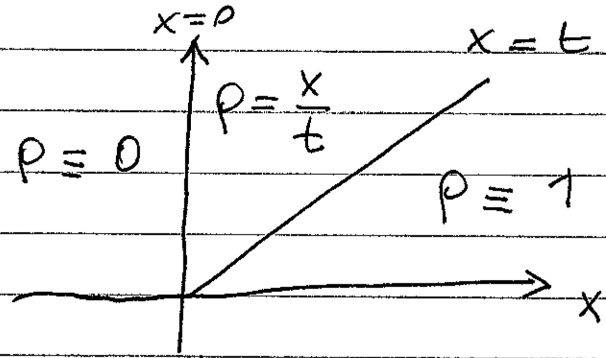
$$0 = \frac{\partial\rho}{\partial x} - \frac{\rho}{\lambda}\,\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{\partial\rho}{\partial x}\left(1 - \frac{\rho}{\lambda}\right)$$

$$\rho\Big|_{x=\lambda} = \lambda$$

Ritornando ad esprimere ρ in termini di (x,t) si ha

$$\rho(x,t) = \frac{x}{t}$$

Una soluzione del problema è la seguente



$$\rho = \begin{cases} 0 & x<0,\ t>0 \\ \dfrac{x}{t} & 0<x<t,\ t>0 \\ 1 & x>t,\ t>0 \end{cases}$$

Quindi il problema

$$\begin{cases} \rho_t + \rho\rho_x = 0 \\ \rho\big|_{t=0} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases} \end{cases}$$

ammette (se consideriamo soluzioni deboli, cioè soluzioni che possono presentare una discontinuità) due distinte soluzioni. Quale scegliere?

Questo problema può essere risolto in 3 distinti modi.

1) Si ricorre a specifici argomenti fisici che consentono di individuare la soluzione corretta
2) Si ricorre a principi termodinamici
3) Si ricorre al principio di causalità che in sostanza, asserisce che il futuro non può influenzare il passato.

In particolare, come vedremo, i metodi 2) e 3) coincidono.

Prima di illustrare la procedura che consente di selezionare la soluzione vediamo come questa possa essere derivata anche da considerazioni fisiche.
Stiamo studiando l'equazione

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0 \qquad \text{con } u = u(\rho) \text{ sì che } \rho u = f(\rho). \quad \underline{\underline{\text{N.B.}}} \ f(\rho) = \frac{\rho^2}{2}$$

Supponiamo di introdurre dei termini viscosi (cosa che ha più senso dal punto di vista fisico) e quindi consideriamo l'equazione

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{(\rho u)}_{f(\rho)} = \varepsilon \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

con $\varepsilon << 1$. Il termine in più $\varepsilon \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ è quello che, in qualche modo, tiene conto della viscosità.
Abbiamo quindi questa equazione

$$\rho_t + (f(\rho))_x = \varepsilon \rho_{xx} \qquad (\Delta)$$

e facciamo l'ipotesi (già scritta $\varepsilon > 0$ ma "piccolo").

Ora vogliamo cercare una soluzione di (Δ) di questo tipo:

- $\lim_{x \to +\infty} \rho = \rho_2$; $\lim_{x \to -\infty} \rho = \rho_1$
- ρ sia del tipo onda viaggiante
$$\rho(x,t) = \rho(x - Vt) \qquad (+)$$
~~sì da "mimare" l'andamento delle soluzione dell'equazione del primo ordine~~
~~$\rho_t + (f(\rho))_x = 0$~~

Sostituendo (+) in (1) abbiamo

$$\rho_t = \frac{\partial \rho(x-vt)}{\partial t} = -v\rho'$$

$$\rho_x = \rho' \qquad \rho_{xx} = \rho''$$

Quindi

$$-V\rho' + f'(\rho)\rho' = \varepsilon\rho''$$

Siccome $f(\rho) = \frac{1}{2}\rho^2$ abbiamo

$$\varepsilon\rho'' = -V\rho' + \rho\rho' = \left(-V\rho + \frac{\rho^2}{2}\right)'$$

Possiamo quindi integrare

$$\varepsilon\rho' = -V\rho + \frac{1}{2}\rho^2 + C$$

Ovviamente V e C sono incognite. Le determiniamo imponendo

$$\rho \xrightarrow[x\to+\infty]{} \rho_1 \; ; \; \rho \xrightarrow[x\to-\infty]{} \rho_2 \; ; \; \rho' \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$$

$$-V\rho_2 + \frac{1}{2}\rho_2^2 + C = 0$$

$$-V\rho_1 + \frac{1}{2}\rho_1^2 + C = 0$$

Da cui ricaviamo

$$V = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) \; ; \; C = \rho_1\left(V - \frac{\rho_1}{2}\right) = \frac{\rho_1\rho_2}{2}$$

OSSERVAZIONE

Se consideriamo l'equazione del primo ordine $\rho_t + \rho\rho_x = 0$ con una discontinuità (shock) tipo salto, allora la relazione di salto $[\![\rho]\!]\dot{s} = \frac{1}{2}[\![f(\rho)]\!]$ dà luogo a

$$(\rho_1 - \rho_2)\dot{s} = \frac{1}{2}(\rho_1^2 - \rho_2^2) \Rightarrow \dot{s} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$$

ovvero la stessa velocità di propagazione $\square$

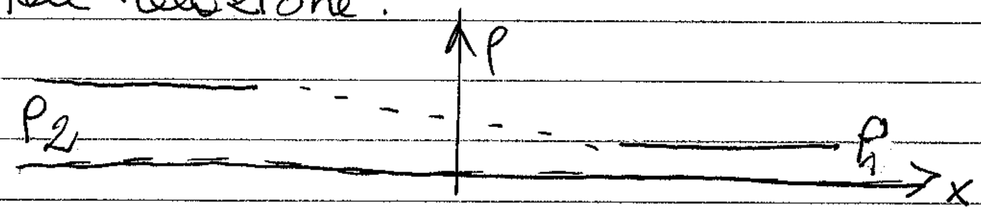
Sostituendo i valori di C e V appena trovati

$$\varepsilon\rho' = \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{2}\rho(\rho_1 + \rho_2) + \frac{\rho_1\rho_2}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)$$

Quindi

$$\varepsilon\rho' = \frac{1}{2}(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2).$$

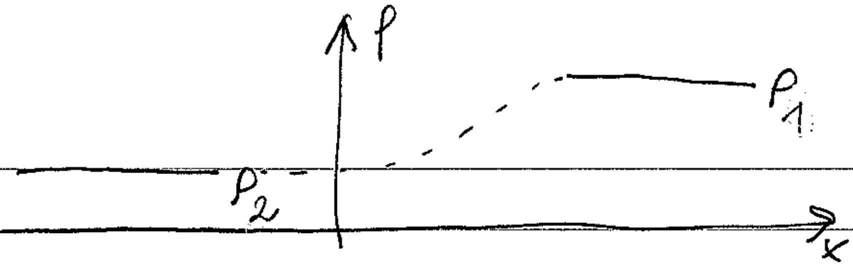
Vediamo quali situazioni sono compatibili con tale relazione.



$\rho_2 > \rho_1$

$$\varepsilon\rho' = \frac{1}{2}\underbrace{(\rho - \rho_1)}_{>0}\underbrace{(\rho - \rho_2)}_{<0} < 0 \qquad \text{O.K.}$$

La funzione è decrescente come ci si aspetta.



$\rho_1 > \rho_2$

$$\varepsilon \rho' = \frac{1}{2} \underbrace{(\rho - \rho_1)}_{<0} \underbrace{(\rho - \rho_2)}_{>0} < 0$$

No!! $\rho' < 0$ mentre noi vogliamo $\rho' > 0$.

La condizione da richiedere è dunque

$$\rho_2 \geq \rho_1$$

Vediamo come si giunge alla stessa conclusione sfruttando però il principio di causalità.

Consideriamo un'equazione del primo ordine nell'incognita w, cioè

$$w_t + c(w) w_x = 0 \qquad (*)$$

con $c(w)$ monotona crescente $c'(w) > 0$. Supponiamo che si generi una discontinuità per cui vale la relazione di salto

$$[\![w]\!] \dot{s} = [\![c(w)]\!] \Leftrightarrow \dot{s} = \frac{c(w_+) - c(w_-)}{w_+ - w_-}$$

Data la monotonia della $c(w)$ avremo che $\dot{s} > 0$.

Consideriamo le caratteristiche dell'equazione $(*)$

$$\frac{dx}{dt} = c(w) \Longrightarrow x = c(w) t + x_0$$

$$\frac{du}{d\tau} = 0 \Longrightarrow u = \text{costante lungo le caratteristiche}$$

$$t = \frac{x - x_0}{c(u)}$$

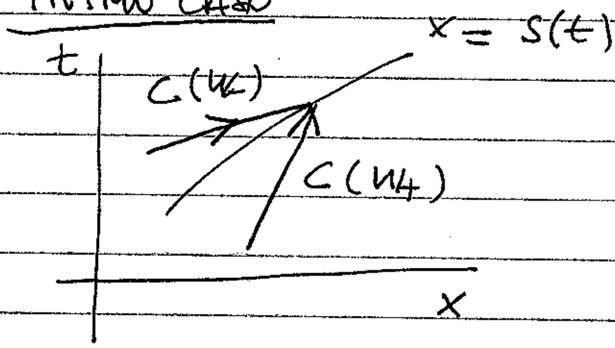
Quindi la pendenza delle rette viste come $t = \ldots$ è $\frac{1}{c(u)}$

$$x = c(u)\, t + x_0$$

La pendenza delle rette caratteristiche viste come $x = \ldots$ è $c(u)$.

Si possono avere due casi

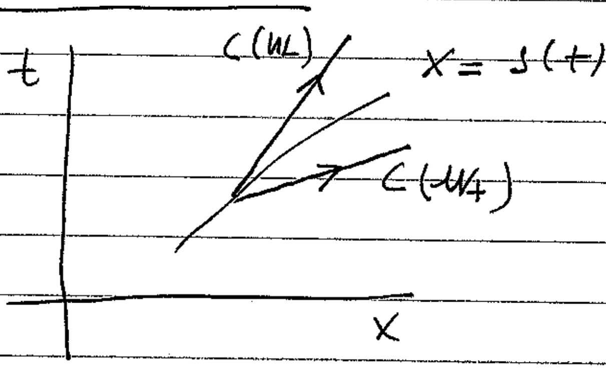
PRIMO CASO



$$c(u_-) > c(u_+)$$

In questo caso i dati trasportati dalle caratteristiche (che vengono presi dai dati iniziali) determinano la evoluzione della shock.

SECONDO CASO



$$c(u_-) < c(u_+)$$

Adesso è la discontinuità a "generare" il dato che viene trasportato dalle caratteristiche.

In questo secondo caso la discontinuità anziché essere determinata dai dati li determina. Ciò chiaramente contraddice il principio di causalità: la discontinuità è generata dall'incrocio di caratteristiche e non è una curva che porta i dati del problema.

La condizione che soddisfa il principio di causalità è dunque

$$c(u_-) > c(u_+)$$

che, dato il fatto che $c'(u) > 0$, implica

$$u_- > u_+ .$$

Nell'equazione

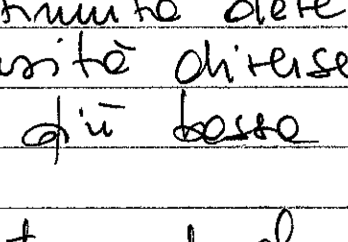
$$\rho_t + \rho \rho_x = 0$$

abbiamo $c(\rho) = \rho$ e quindi la condizione $c(u_-) > c(u_+)$ si traduce in $\rho_- > \rho_+$. La discontinuità deve quindi separare due zone a densità diverse: più alta quella dietro lo shock, più bassa quella davanti.

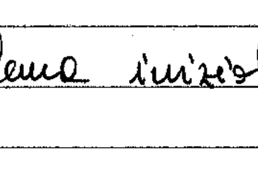
Quindi tornando al nostro problema iniziale

$$\begin{cases} \rho_t + \left(\frac{\rho^2}{2}\right)_x = 0 \\ \rho|_{t=0} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases} \end{cases}$$

la soluzione corretta è quella dell'espansione



La soluzione con lo shock



non è accettabile perché viola la condizione $u_- > u_+$.

La condizione $e(w_-) > e(w_+)$ viene anche detta condizione dell'entropia.

CONDIZIONI DI SALTO DI RANKINE-HUGONIOT

Consideriamo un flusso 1D non stazionario e non isoentropico (né tanto meno omoentropico). Come vedremo la presenza di possibili shock produrrà una variazione di entropia.

Il sistema di equazioni è il cosiddetto sistema di Riemann

$$(R)\begin{cases} \rho_t + m_x = 0 \\ m_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + p\right)_x = 0 \\ e_t + \left((e+p)\frac{m}{\rho}\right)_x = 0 \end{cases}$$

dove

$$m = \rho u$$

$$e = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho \varepsilon = \frac{1}{2} m u + \rho \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}$$

Come detto non sfruttiamo la condizione $p = A\rho^\gamma$ che caratterizza i flussi isoentropici

Se adesso supponiamo la presenza di una discontinuità tipo salto possiamo scrivere le relative condizioni che sono dette CONDIZIONI DI RANKINE HUGONIOT.

(A)

OSSERVAZIONE

Prima di procedere con le condizioni di Rankine-Hugoniot mostriamo che il sistema (R) è iperbolico. Riscriviamo (R) in termini di (ρ, u, ε) e otteniamo

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0 \\ u_t + u u_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0 \\ \varepsilon_t + u\,\varepsilon_x + \frac{p}{\rho} u_x = 0 \end{cases}$$

La relazione fra p e ε, ρ è data da

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \qquad (*)$$

Inoltre ricordiamo la definizione di velocità del suono (data per processi isoentropici o omoentropici)

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$$

In questo caso, applicando la $(*)$ si ha

$$c^2 = \frac{\gamma}{\rho}(\gamma-1)\rho\varepsilon = \gamma(\gamma-1)\varepsilon$$

Sempre applicando la $(*)$

$$p_x = (\gamma-1)\rho_x\varepsilon + (\gamma-1)\rho\varepsilon_x$$

$$\frac{1}{\rho}p_x = (\gamma-1)\frac{\rho_x}{\rho}\varepsilon + (\gamma-1)\varepsilon_x = \frac{\overbrace{\gamma(\gamma-1)\varepsilon}^{c^2}}{\gamma}\frac{\rho_x}{\rho} +$$

$$+ (\gamma-1)\varepsilon_x = \frac{c^2}{\gamma}\frac{\rho_x}{\rho} + (\gamma-1)\varepsilon_x$$

$$\begin{cases} \dot s [\![\rho]\!] = [\![m]\!] \\ \dot s [\![m]\!] = [\![\frac{m^2}{\rho} + p]\!] \\ \dot s [\![e]\!] = [\![(e+p)u]\!] \end{cases}$$

Siccome $m = \rho u$ la prima si può riscrivere

$$\dot s [\![\rho]\!] = [\![\rho u]\!] \Rightarrow [\![\rho(u-\dot s)]\!] = 0$$

La seconda può essere scritta come

$$[\![\rho u \dot s]\!] = [\![\rho u^2 + p]\!]$$

$$[\![p + \rho u^2 - \rho u \dot s]\!] + \underbrace{\dot s^2 [\![\rho]\!] - \dot s [\![\rho u]\!]}_{\dot s(\underbrace{\dot s[\![\rho]\!] - [\![\rho u]\!]}_{=0})} = 0$$

$$[\![p + \rho(u^2 - 2u\dot s + \dot s^2)]\!] = 0$$

$$[\![p + \rho(u-\dot s)^2]\!] = 0$$

Per quanto riguarda la terza condizione, se la riscriviamo esplicitamente si ottiene

$$[\![\frac{1}{2} \rho u^2 \dot s + \frac{\dot s p}{\gamma-1}]\!] = [\![\frac{1}{2} \rho u^3 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p u]\!]$$

$$[\![\frac{\rho u^2}{2}(u-\dot{s}) + \frac{p}{\gamma-1}(\gamma u - \dot{s})]\!] = 0$$

$$[\![\frac{\rho u^2}{2}(u-\dot{s}) + \frac{p}{\gamma-1}\left(\gamma(u-\dot{s}) + (\gamma-1)\dot{s}\right)]\!] = 0$$

$$[\![\frac{u^2}{2}\rho(u-\dot{s}) + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\left(\rho(u-\dot{s})\right) + p\dot{s}]\!] = 0$$

adesso si sfrutta il fatto che $[\![p]\!] = -[\![\rho(u-\dot{s})^2]\!]$ per cui

$$[\![\rho(u-\dot{s})\frac{u^2}{2} + \rho(u-\dot{s})\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} - \dot{s}\rho(u-\dot{s})^2]\!] = 0$$

Quindi si può mettere in evidenza $\rho(u-\dot{s})$ e semplificare dal momento che $[\![\rho(u-\dot{s})]\!] = 0$. Si rimane dunque con

$$[\![\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} - \dot{s}(u-\dot{s})]\!] = 0$$

$$[\![\frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} - \dot{s}u]\!] + [\![\dot{s}^2]\!] = 0$$

Evidentemente $[\![\dot{s}]\!] = 0$ e così anche $[\![\frac{\dot{s}}{2}]\!] = 0$, si ha quindi

$$[\![\frac{u^2}{2} - \dot{s}u + \frac{\dot{s}^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}]\!] = 0$$

ovvero

$$[\![\frac{1}{2}(u-\dot{s})^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}]\!] = 0.$$

Le tre condizioni di Rankine-Hugoniot possono essere così riscritte.

$$\begin{cases} [\![\rho (u - \dot{s})]\!] = 0 \\ [\![p + \rho (u - \dot{s})^2]\!] = 0 \\ [\![\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (u - \dot{s})^2]\!] = 0 \end{cases}$$

Tale scrittura mette in evidenza la velocità rispetto allo shock, ovvero $(u - \dot{s})$

Se adesso introduciamo la velocità del fluido rispetto allo shock,

$$U = u - \dot{s}$$

le condizioni di Rankine-Hugoniot si riscrivono come

$$\begin{cases} [\![\rho U]\!] = 0 \\ [\![p + \rho U^2]\!] = 0 \\ [\![\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} U^2]\!] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\![\gamma \varepsilon + \frac{1}{2} U^2]\!] = 0 \end{cases}$$

Diremo poi che lo shock è una DISCONTINUITÀ DI CONTATTO se $U = 0$; ovvero se la superficie di discontinuità è una superficie materiale per il fluido. In altri termini shock e fluido si muovono con le stesse velocità.

Se invece $U \neq 0$ allora lo shock si muove rispetto al fluido: istante per istante non è formata dalle stesse particelle.

SCHOCK PER SISTEMI DI LEGGI DI CONSERVAZIONE

Supponiamo di avere un sistema di n leggi di conservazione, vale a dire

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} f_1(u_1 \dots u_n) \\ \vdots \\ f_n(u_1 \dots u_n) \end{pmatrix} = 0$$

che scriveremo in forma compatta come

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{f}(\underline{u})}{\partial x} = 0 \qquad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \underline{f}(\underline{u}) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Il sistema si dice iperbolico nel senso della definizione se la matrice Jacobiana

$$A(\underline{u}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

ammette n autovalori $\lambda_1 \dots \lambda_n$ positivi. Si definiscono così n famiglie di caratteristiche

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \lambda_i & i = 1 \dots n \\ x_i\big|_{t=0} = x_0 \end{cases}$$

B

Una curva nel piano (x,t) del tipo $x = \xi(t)$ è detta shock se su di essa si intersecano le caratteristiche di una data famiglia ed inoltre:

a) attraverso tale curva valgono le condizioni di salto

$$\dot{s}\,[\![u_i]\!] = [\![f_i]\!], \quad i = 1 \dots n;$$

b) su tale curva si intersecano le caratteristiche di una data famiglia;

c) Da ogni punto della curva di shock si possono tracciare le due caratteristiche fino alla retta $t=0$ che è la retta dei dati iniziali.

L'applicazione sarà il sistema di leggi di conservazione di Riemann. Infatti, come vedremo, in questo caso il flusso non è né omoentropico né isoentropico. Attraverso lo shock l'entropia subisce un incremento. Non possiamo quindi considerare l'equazione $\frac{dS}{dt} = 0$. Introdurremo quindi il sistema di leggi di conservazione di Riemann.

FUNZIONE DI HUGONIOT E NON CONSERVAZIONE DELL'ENTROPIA ATTRAVERSO LO SHOCK.

In questa sezione lavoreremo sempre con le velocità relative rispetto allo shock

$$U_i = u_i - \dot{s} \qquad i = 1, 2.$$

Riscriviamo le condizioni di salto per il sistema delle tre leggi di conservazione di Riemann

$$(1) \quad [\![\rho U]\!] = 0$$

$$(2) \quad [\![\rho U^2 + p]\!] = 0$$

$$(3) \quad [\![U e + p U]\!] = 0$$

dove, lo ricordiamo, $e = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho \varepsilon$ essendo ε l'energia interna del gas data da
$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} p \tau \quad \text{con } \tau = 1/\rho$$

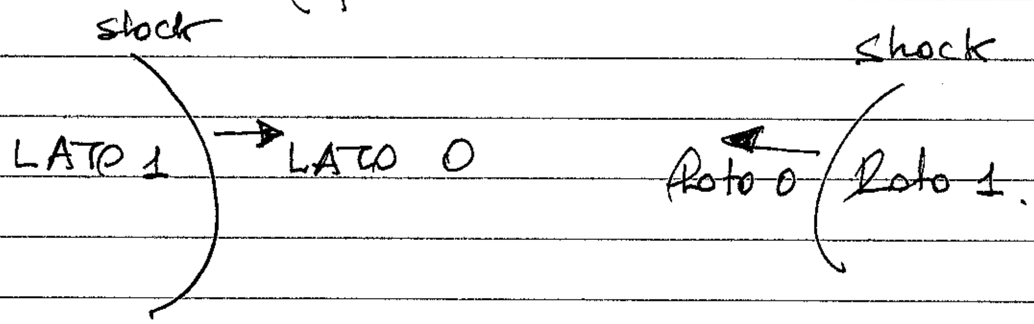
Abbiamo quindi visto che la (3) può scriversi come

$$(3.\text{bis}) \quad [\![\gamma \varepsilon + \frac{1}{2} U^2]\!] = 0$$

Sfruttiamo anche la (1) per concludere che la quantità $N = \rho U$ è conservata attraverso lo shock.

Per le discontinuità di contatto, $U_i = 0$, e quindi $N = 0$.

Consideriamo adesso uno shock che non sia una discontinuità di contatto e quindi consideriamo $N \neq 0$. In questo caso lo shock non è "solidale" con il fluido. Le particelle del fluido attraversano lo shock, ovvero lo shock si muove attraverso il fluido.
Possiamo quindi distinguere i due "lati" dello shock. Chiameremo lato 0 quello costituito dalle particelle a monte dello shock ovvero dalle particelle che non hanno ancora attraversato lo shock (oppure che non sono state ancora investite dallo shock). Il lato 1 è quello costituito dalle particelle che hanno attraversato lo shock (particelle a valle dello shock)



Se lavoriamo con le quantità $\tau = 1/\rho$, la (1) implica

$$\begin{cases} U_0 = N\tau_0 \\ U_1 = N\tau_1 \end{cases} \qquad \left(\text{si ricordi che } \rho_0 U_0 = N = \rho_1 U_1\right)$$

Dalle (2), che riscriviamo come

$$\underbrace{\rho_0 U_0}_{N} U_0 + p_0 = \underbrace{\rho_1 U_1}_{N} U_1 + p_1$$

$$N U_0 + p_0 = N U_1 + p_1$$

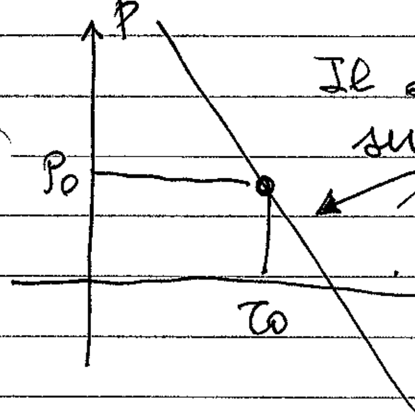
otteniamo

$$N = -\frac{p_0 - p_1}{U_0 - U_1}$$

Sfruttando le $\begin{cases} U_0 = N\tau_0 \\ U_1 = N\tau_1 \end{cases}$ si ha

$$N^2 = -\frac{p_0 - p_1}{\tau_0 - \tau_1} \qquad (\Delta)$$

Quindi nel piano (τ, p) i punti (τ_0, p_0) (a monte dello shock) e (τ_1, p_1) (a valle dello shock) sono collegati da una retta la cui pendenza è $-N^2$



Il punto (τ_1, p_1) può stare soltanto su questa retta. Per adesso non sappiamo se prima o dopo (τ_0, p_0) sappiamo soltanto che vale:

$$p_0 - p_1 = -N^2(\tau_0 - \tau_1)$$

Per sapere dove è localizzato il punto (τ_1, p_1) possiamo ancora sfruttare la relazione (3. bis) (salto dell'energia) che dovremo scrivere in funzione di τ e p soltanto.

Si parte dalla (3. bis) che scriviamo come

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \frac{1}{2}\left(U_0^2 - U_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(U_0 - U_1\right)\left(U_0 + U_1\right)$$

Adesso si applica:

$$\left.\begin{array}{l} U_0 = \dfrac{\tau_0}{N} \\ U_1 = \dfrac{\tau_1}{N} \end{array}\right\} \Rightarrow U_0 + U_1 = \frac{1}{N}\left(\tau_0 + \tau_1\right)$$

$$N U_0 + p_0 = N U_1 + p_1 \Rightarrow U_0 - U_1 = \left(p_1 - p_0\right) N$$

Quindi

$$\frac{1}{2}\left(U_0^2 - U_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(p_1 - p_0\right) N \cdot \frac{1}{N}\left(\tau_0 + \tau_1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(p_1 - p_0\right)\left(\tau_0 + \tau_1\right).$$

La (3. bis) equivale a

$$\gamma\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_0\right) = \frac{1}{2}\left(p_1 - p_0\right)\left(\tau_0 + \tau_1\right).$$

A questo punto si applica la relazione

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} p \tau$$

per cui abbiamo

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(p_1\tau_1 - p_0\tau_0\right) - \frac{1}{2}\left(p_1 - p_0\right)\left(\tau_0 + \tau_1\right) = 0$$

$$\frac{1}{\gamma-1}\left(p_1\tau_1 - p_0\tau_0\right) - \frac{1}{2}\left(p_1\tau_0 + p_1\tau_1 - p_0\tau_0 - p_0\tau_1\right) = 0$$

$$\Big[\underbrace{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{1}{2}\right)}_{=\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}} p_1\tau_1 - \frac{1}{2}p_1\tau_0\Big] - \Big[\underbrace{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{1}{2}\right)}_{=\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}} p_0\tau_0 - \frac{1}{2}p_0\tau_1\Big] = 0$$

Quindi assumendo $\gamma > 1$ si introduce [illegible]

$$\Gamma^2 = \frac{\gamma-1}{1+\gamma} > 0$$

e si ha

$$\left(\tau_1 - \Gamma\tau_0\right)p_1 - \left(\tau_0 - \Gamma\tau_1\right)p_0 = 0$$

Quindi, fissati (τ_0, p_0) si suole introdurre la funzione

$$H(\tau, p) = \left(\tau - \Gamma\tau_0\right)p - \left(\tau_0 - \Gamma\tau\right)p_0$$

Pertanto, dato (τ_0, p_0) il punto (τ_1, p_1) "collegato" a (τ_0, p_0) dalle condizioni di salto è dato da

$$H(\tau_1, p_1) = 0.$$

In particolare, la funzione H è detta FUNZIONE DI HUGONIOT e l'equazione $H(\tau_1, p_1)=0$ EQUAZIONE DI HUGONIOT.

Abbiamo quindi che i due stati

- (τ_0, p_0) a monte dello shock
- (τ_1, p_1) a valle dello shock

sono collegati fra loro da queste due relazioni

$$\begin{cases} p_0 - p_1 = -N^2(\tau_0 - \tau_1) \\ H(\tau_1, p_1) = 0 \end{cases}$$

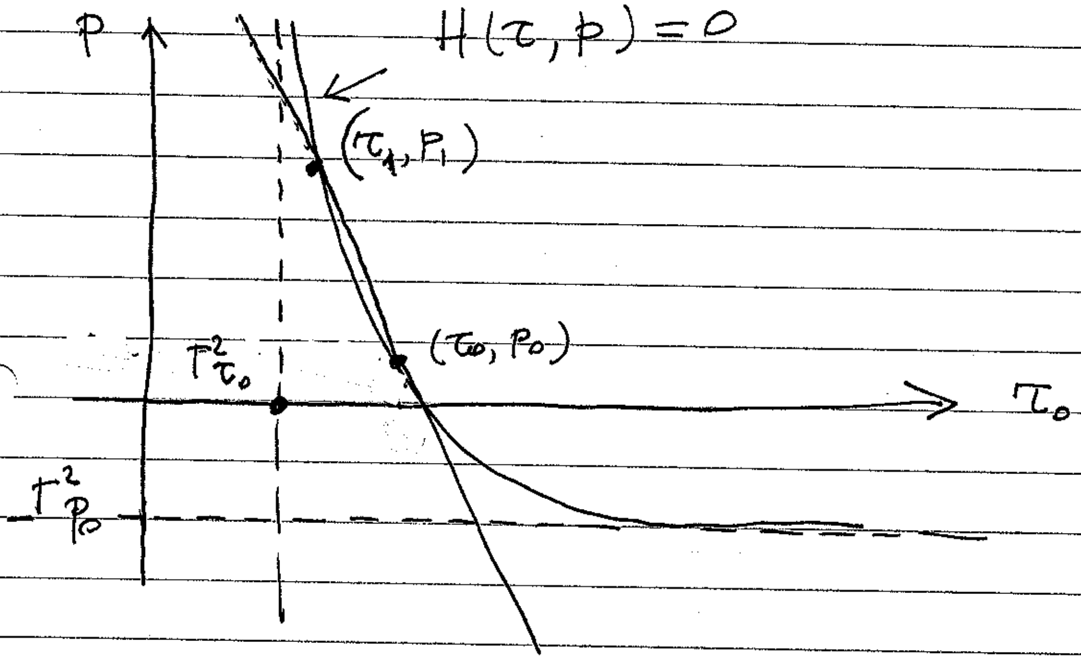
Dato (τ_0, p_0), la curva $H(\tau, p)=0$ può scriversi come

$$p = \frac{(\tau_0 - \Gamma^2 \tau)\, p_0}{\tau - \Gamma^2 \tau_0} = \frac{\left(\frac{\tau_0}{\tau} - \Gamma^2\right) p_0}{1 - \Gamma^2 \frac{\tau_0}{\tau}}$$

che è rappresentata da un'iperbole $(\tau > 0)$ i cui asintoti sono:

- asintoto orizzontale $p = -p_0 \Gamma^2$
- asintoto verticale $\tau = \Gamma^2 \tau_0$

Quindi, al variare di N^2, i punti (τ_0, p_0) e (τ_1, p_1) sono dati dall'intersezione fra il ramo d'iperbole e la retta



Questo risultato è IMPORTANTISSIMO perchè ci mostra che l'entropia <u>NON</u> si conserva attraverso lo shock.

Se infatti l'entropia si conservasse avremmo

$$\frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}} = \frac{p_1}{\rho_1^{\gamma}} \iff p_0 \tau_0^{\gamma} = p_1 \tau_1^{\gamma}$$

Ma la funzione di Hugoniot non coincide con l'iperbole $p\tau^{\gamma} = cost.$

In generale se avessimo assunto $p\tau^{\gamma} = cost.$ attraverso lo shock la condizione di salto sull'energia non sarebbe stata verificata.