IL POTENZIALE COMPLESSO

Nel piano $\mathbb{R}^2$ è definito il dominio D. In esso è dato un flusso $\underline{u}$ ideale, incomprimibile, stazionario e potenziale (e quindi irrotazionale). Siano:

- $\phi(x,y)$ potenziale $\Rightarrow \underline{u} = \nabla\phi$
- $\psi(x,y)$ funzione di corrente.

Poniamoci adesso nel piano complesso $\mathbb{C}$ e qui definiamo la funzione

$$W = \phi(x,y) + i\,\psi(x,y)$$

intendendo con $z = x + iy$ la funzione W viene chiamata POTENZIALE COMPLESSO.

TEOREMA

$W : D \to \mathbb{C}$ è analitica

Dim.

W è analitica se soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Infatti se $\underline{u} = u_1\underline{e}_x + u_2\underline{e}_y$

$$u_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \; ; \; u_2 = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \square$$

In sostanza quindi, il fatto che W sia analitica implica che W possa essere espressa soltanto in termini di z. Infatti

$$\begin{cases} z = x+iy \\ \bar{z} = x-iy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{z+\bar{z}}{2} \\ y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

$$W(x,y) = W\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2}\right) = W(z,\bar{z})$$

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + i\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{i}{}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)}_{=0} + \frac{i}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)}_{=0}$$

In particolare

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} + i\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)}_{=\frac{\partial \varphi}{\partial x}} - \frac{i}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)}_{-\frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

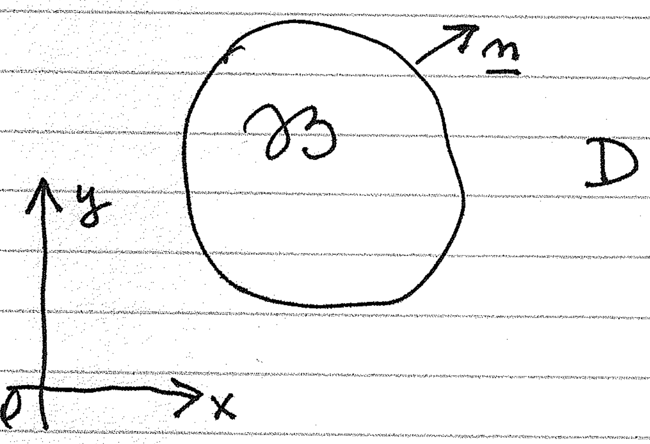
$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = u_1 - i u_2$$

Quindi, posto $V = u_1 + i u_2$, si ha

$$f(z) = \frac{dW}{dz} = u_1 - i u_2 = \overline{V}$$

viene detta VELOCITÀ COMPLESSA.

Consideriamo adesso un ostacolo $\mathcal{B}$ e sia $D = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}$. Sia $\underline{n}$ la normale esterna a $\mathcal{B}$ e sia $\partial\mathcal{B}$ sufficientemente regolare.



Le componenti della forza F rispetto al S.d.R $\{O,x,y\}$ che il fluido esercita sull'ostacolo $\mathcal{B}$ sono F_x, F_y. Abbiamo

$$\underline{F} = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y = \int_{\partial\mathcal{B}} p\,\underline{n}\,ds$$

TEOREMA (di BLASIUS)

Per un qualsiasi flusso ideale, incomprimibile, stazionario e potenziale esterno a $\partial\mathcal{B}$, la cui velocità complessa è

$$\mathcal{J} = u_1 - i\, u_2 = \overline{V}$$

risulta

$$\mathcal{P} = -\frac{i\rho}{2} \oint_{\partial\mathcal{B}} \overline{\mathcal{J}^2 dz}$$

dove $\mathcal{P} = F_x + i F_y$.

Dim.

La forza esercitata dal fluido su $\partial\mathcal{B}$ è

$$\underline{F} = -\oint_{\partial\mathcal{B}} p\, \underline{n}\, .dl$$

Si applica adesso il teorema di Bernulli

$$\nabla\left[\frac{\rho}{2}|\underline{u}|^2 + p\right] = 0 \implies p = -\frac{\rho}{2}|u|^2 + C$$

Quindi

$$\underline{F} = \frac{\rho}{2}\oint_{\partial\mathcal{B}} |\underline{u}|^2\, \underline{n}\, . dl - \underbrace{C \oint_{\partial\mathcal{B}} \underline{n}\, . dl}_{=0}$$

T. della divergenza

Si osserva adesso che

$$\underline{n}\, dl = dy\, \underline{e}_x - dx\, \underline{e}_y$$

per cui

$$\underline{F} = \frac{\rho}{2} \oint_{\partial B} |u|^2 \left(dy\, \underline{e}_x - dx\, \underline{e}_y\right)$$

e quindi

$$\begin{cases} F_x = \underline{F} \cdot \underline{e}_x = \dfrac{\rho}{2} \displaystyle\oint_{\partial B} |\underline{u}|^2\, dy \\ F_y = \underline{F} \cdot \underline{e}_y = -\dfrac{\rho}{2} \displaystyle\oint_{\partial B} |\underline{u}|^2\, dx \end{cases}$$

Si ricorda poi che il flusso $\underline{u}$ è normale a ∂B, cioè:

$$\underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \implies (u_1 \underline{e}_x + u_2 \underline{e}_y)(dy\, \underline{e}_x - dx\, \underline{e}_y) = 0$$

e quindi $u_1 dy - u_2 dx = 0$ ovvero, su ∂B,

$$u_1 dy = u_2 dx \qquad (*)$$

Calcoliamo adesso $\mathcal{F}^2$ essendo $\mathcal{F} = u_1 - i u_2$

$$\mathcal{F}^2 = u_1^2 - u_2^2 - 2 i u_1 u_2 = (u_1^2 - u_2^2) + i(-2u_1u_2)$$

$$\mathcal{F}^2 dz = \mathcal{F}^2 (dx + i\, dy) = \left[(u_1^2 - u_2^2) + i(-2u_1u_2)\right](dx + i\, dy)$$

Quindi

$$\overline{f}^2 dz = \left[(u_1^2 - u_2^2)\,dx + 2u_1 u_2\,dy\right] + i\left[(u_1^2 - u_2^2)\,dy - 2u_1 u_2\,dx\right]$$

Si sfrutta adesso $(*)$, cioè $u_1 dy = u_2 dx$

$$\overline{f}^2 dz = \left[(u_1^2 + u_2^2)\,dx\right] + i\left[-(u_1^2 + u_2^2)\,dy\right]$$
$$= |\underline{u}|^2 dx - i|\underline{u}|^2 dy$$

$$\overline{\overline{f}^2 dz} = |\underline{u}|^2 dx + i|\underline{u}|^2 dy$$

$$-i\,\overline{\overline{f}^2 dz} = |\underline{u}^2|\,dy - i|\underline{u}|^2 dx$$

In conclusione

$$-i\frac{\rho}{2}\oint_{\partial B} \overline{\overline{f}^2 dz} = \underbrace{\left(\frac{\rho}{2}\oint_{\partial B}|\underline{u}|^2 dy\right)}_{F_x} + i\underbrace{\left(-\frac{\rho}{2}\oint_{\partial B}|\underline{u}|^2 dx\right)}_{F_y}$$

per cui

$$F_x + iF_y = -i\frac{\rho}{2}\oint_{\partial B}\overline{\overline{f}^2 dz} \qquad \square$$

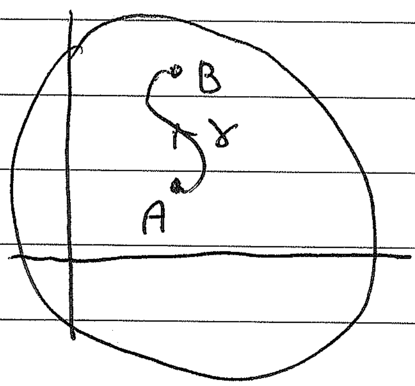
(A)

MOTO IRROTAZIONALE CICLICO E ACICLICO

Abbiamo visto che quando il dominio D dove si svolge il flusso $\underline{u}$ è SEMPLICEMENTE CONNESSO e $\underline{\omega} = \nabla \wedge \underline{u} \equiv 0$ in D (cioè il flusso è irrotazionale) allora esiste una ed una sola funzione scalare $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ (o se vogliamo una funzione ad un sol valore) tale che

$$\underline{u} = \nabla \phi$$

ovvero che, per ogni curva γ che connette due qualsiasi punti A e B di D,



$$\phi(B) - \phi(A) = \int_{\gamma_{AB}} \underline{u} \cdot d\ell$$

In altri termini, l'integrale lungo la curva γ che connette A e B non dipende dalla curva.

I flussi per i quali la funzione ϕ è unica (ovvero ad un sol valore) sono detti <u>ACICLICI</u>.

Abbiamo quindi questa
PROPOSIZIONE
D semplicemente connesso. Flusso irrotazionale ($\underline{\omega} = \nabla \wedge \underline{u} \equiv 0$ in D).
Il flusso $\underline{u}$ è aciclico.

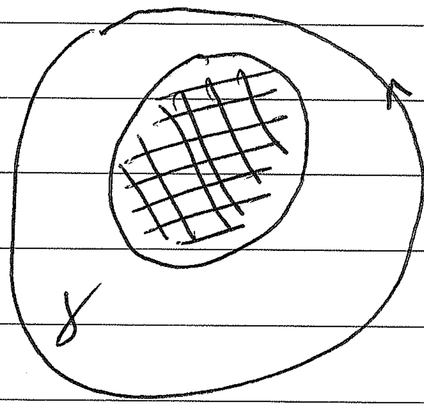
Quando la regione D non è semplicemente connessa ed il flusso è irrotazionale allora esiste la funzione ϕ per cui

$$\underline{u} = \nabla \phi$$

ma questa non è unica, o meglio, la funzione ϕ è una funzione a più valori. In questo caso il flusso, ancorché potenziale, si dice CICLICO.

Ovviamente anche se ϕ ha più di un valore in un dato punto $\underline{x}$ il $\nabla \phi = \underline{u}$ è unicamente definito. Di conseguenza questi valori possono differire soltanto per una quantità costante Γ, cioè tale che $\nabla \Gamma = 0$.
Quindi Γ non dipende dalle coordinate $\underline{x}$ del particolare punto.

Si può provare che Γ può essere identificata con la circolazione lungo curve che circondano l'ostacolo



$$\oint_\gamma \underline{u}\cdot d\underline{l} = \Gamma$$

Ogni curva che circonda l'ostacolo è caratterizzata dal medesimo Γ.

In sostanza flussi ciclici, sono flussi potenziali ma per i quali vale

$$\oint_\gamma \underline{u}\cdot d\underline{l} = \oint_\gamma \nabla\phi\cdot d\underline{l} \neq 0$$

Non deve quindi "scandalizzare" il fatto che $\oint_\gamma \nabla\phi\cdot d\underline{l} \neq 0$. In questo caso infatti la funzione ϕ è una funzione a più valori e quando il circuito si chiude la funzione ϕ non ha lo stesso valore che

D

avere nel punto di partenza.

Nel seguito avremo a che fare con flussi potenziali CICLICI. Non staremo tuttavia a ribadire ogni volta l'aggettivo ciclico. Parleremo sempre di flussi potenziali, sottintendendo che si tratta di flussi CICLICI.

TEOREMA (KUTTA-JOUKOWSKI).

E' dato un flusso ideale, stazionario, potenziale(*), incomprimibile piano nella regione esterna all'ostacolo $\mathcal{B}$. Si assume inoltre che

$$\lim_{|\underline{x}|\to\infty} \underline{u} = \underline{u}_\infty = u_{1\infty}\underline{e}_x + u_{2\infty}\underline{e}_y .$$

La forza agente su $\mathcal{B}$ è data da

$$\underline{F} = -\rho\Gamma|\underline{u}_\infty|\,\underline{N} \qquad (+)$$

dove Γ è la circolazione attorno a $\mathcal{B}$ ed $\underline{N}$ è un vettore unitario ortogonale a $\underline{u}_\infty$.

Dim

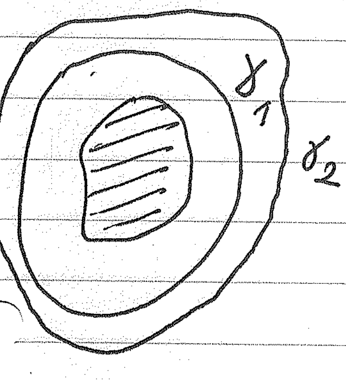
Prima di tutto osserviamo che (+) può essere riscritta notando che

$$\underline{N} = \frac{1}{|\underline{u}_\infty|}\left(-u_{2\infty}\underline{e}_x + u_{1\infty}\underline{e}_y\right),$$

per cui

$$\underline{F} = -\rho\Gamma\left(-u_{2\infty}\underline{e}_x + u_{1\infty}\underline{e}_y\right) \Rightarrow \begin{cases} F_x = \rho\Gamma u_{2\infty} \\ F_y = -\rho\Gamma u_{1\infty} \end{cases}$$

Osserviamo poi che Γ è univocamente definito,



$$\oint_{\gamma_1} \underline{u}\cdot d\underline{l} = \oint_{\gamma_2} \underline{u}\cdot d\underline{l} = \Gamma \qquad (\Delta)$$

Il flusso è irrotazionale e quindi la (Δ) è banale da provare.

(*) In questo caso abbiamo a che fare con un flusso potenziale CICLICO. Il dominio non è semplicemente connesso.

Applichiamo il teorema di Blasius

$$F_x + i F_y = -i \frac{\rho}{2} \oint_{\partial B} \overline{\mathcal{F}^2 dz}$$

dove $\mathcal{F} = u_1 - i u_2$ è la velocità complessa.

$\mathcal{F}$ è una funzione analitica e quindi espandibile in serie di Laurent al di fuori di B

$$\mathcal{F} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

Ovviamente $\lim_{|z| \to \infty} \mathcal{F} = a_0 \Rightarrow a_0 = u_{1\infty} - i u_{2\infty}$

Inoltre, applicando il teorema di Cauchy

$$\oint_\gamma \mathcal{F} \, dz = 2\pi i a_1$$

essendo γ una qualunque curva chiusa che circonda l'ostacolo B. Vediamo come collegare a_1 con la circolazione

$$\oint_\gamma (u_1 - i u_2)(dx + i dy) = \oint_\gamma u_1 dx + u_2 dy - i \left(\oint_\gamma u_2 dx - u_1 dy \right)$$

Quindi

$$\oint_\gamma u_1 dx + u_2 dy = \oint_\gamma \underline{u} \cdot \underline{dl} = \Gamma$$

$$\oint_\gamma u_2\,dx - u_1\,dy = \oint_\gamma \underline{u} \cdot \underline{n}\, dl =$$

$$= \int_\Omega \nabla \cdot \underline{u}\, ds = 0$$ essendo Ω il dominio rinchiuso dentro γ.

Quindi

$$2\pi i\, a_1 = \Gamma \implies a_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i}$$

Abbiamo quindi

$$\mathcal{F}^2 = a_0^2 + \frac{2a_0a_1}{z} + \frac{2a_0a_2 + a_1^2}{z^2} + \dots$$

Applichiamo adesso il teorema di Blausius

$$F_x + iF_y = -\frac{i\rho}{2} \oint_{\partial B} \mathcal{F}^2 dz =$$

$$= -\frac{i\rho}{2} \oint_{\partial B} \left(a_0^2 + \frac{2a_0a_1}{z} + \dots\right) dz =$$ applichiamo il teorema di Cauchy

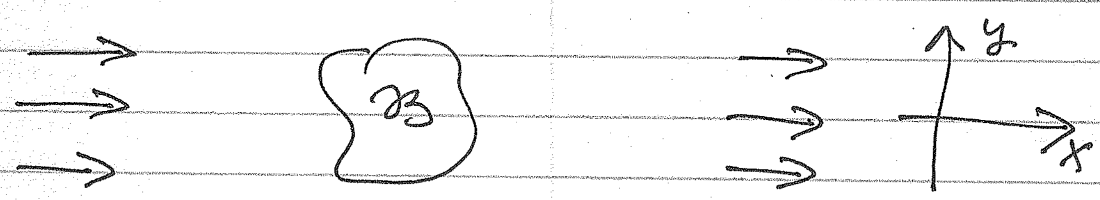
$$= -\frac{i\rho}{\cancel{2}}\, 2\pi i\,(2a_0a_1) = -i\rho\, \cancel{\pi i}\, \frac{\cancel{2}\Gamma}{\cancel{2\pi i}} (u_{1\infty} - i u_{2\infty}) =$$

$$= -i\rho\Gamma (u_{1\infty} + i u_{2\infty}) = \rho\Gamma (u_{2\infty} - i u_{1\infty})$$

Confrontando $\begin{cases} F_x = \rho\Gamma u_{2\infty} \\ F_y = -\rho\Gamma u_{1\infty} \end{cases}$ $\square$

PARADOSSO DI D'ALAMBERT

Il teorema di Kutta-Jukowski conduce immediatamente al paradosso di D'Alambert.
Consideriamo un flusso t.c. $\underline{u}_\infty = u_{1,\infty}\,\underline{e}_x$



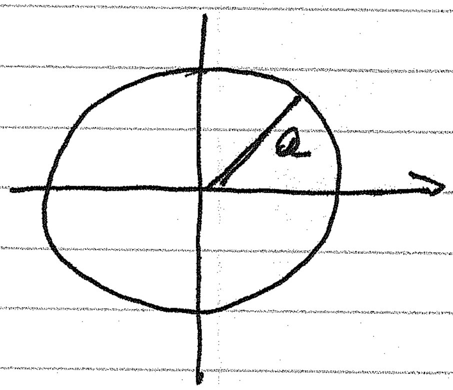
La forza orizzontale agente su $\mathcal{B}$ è nulla!!
Su $\mathcal{B}$ agisce solo una forza parallela ad y (detta lift) che è presente solo se $\Gamma \neq 0$.
Non solo ma tale forza è, a priori, indipendente dalla geometria del corpo.

Ma c'è di più.

Si può dimostrare lavorando in $\mathbb{R}^3$ e considerando corpi limitati che la forza totale agente su $\mathcal{B}$ è nulla.

ALCUNI ESEMPI

① Flusso IRROTAZIONALE attorno al disco di raggio a



$$\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < a \}$$

$$D = \mathbb{C} \setminus \Omega$$

Dobbiamo determinare il potenziale complesso definito su D. I requisiti sono:

1) $W = \varphi + i\psi$ deve essere analitica

2) Il flusso per $|z| = a$ deve essere tangente al disco. Siccome $\underline{u} = \nabla\varphi$ si deve avere

$$\nabla\varphi \Big|_{z=a} \cdot \underline{e}_r = 0$$

Ora $\nabla\varphi \cdot \nabla\psi = 0 \Rightarrow \nabla\psi\Big|_{z=a} \parallel \underline{e}_r$

Quindi $|z| = a$ è una curva di livello per ψ, cioè

$$\psi\Big|_{z=a} = \text{cost}.$$

Riscalando a 0 tale costante, ciò implica che W su $|z|=a$ deve essere reale

$$W\Big|_{|z|=a} = \varphi \Rightarrow \operatorname{Im} W\Big|_{|z|=a} = 0$$

Quindi se $S(z)$ è analitica in $\mathbb{C}$ è sufficiente scegliere

$$W(z) = S(z) + \overline{S\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)}$$

Infatti per $|z|=a \Rightarrow z\bar{z} = a^2$ si ha

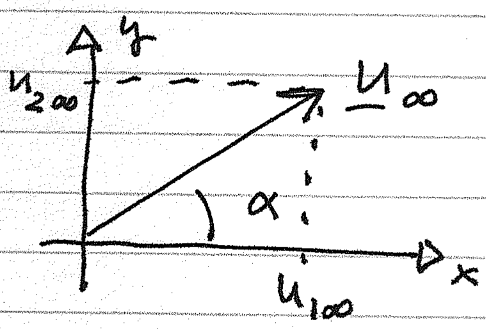
$$W\Big|_{|z|=a} = S(z) + \overline{S(z)}$$

e quindi $\operatorname{Im} W\Big|_{|z|=a} = 0$

(2) Flusso t.c. $\lim_{|z| \to \infty} \underline{u} = \underline{u}_\infty$

Se $\underline{u}_\infty = u_{1\infty} \underline{e}_x + u_{2\infty} \underline{e}_y$ abbiamo

$$\frac{dW}{dz} \xrightarrow[|z| \to \infty]{} u_{1\infty} - i u_{2\infty} = |\underline{u}_\infty| e^{-i\alpha}$$



Quindi $W \xrightarrow[|z| \to \infty]{} |\underline{u}_\infty| e^{-i\alpha} z$

Se prendiamo

$$S(z) = |\underline{u}_\infty| e^{-i\alpha} z$$

$$\overline{S\left(\frac{a^2}{\bar{z}}\right)} = \overline{|\underline{u}_\infty| e^{-i\alpha} \frac{a^2}{\bar{z}}} = |\underline{u}_\infty| e^{i\alpha} \frac{a^2}{z}$$

Da cui

$$W(z) = |\underline{u}_\infty| \left(e^{-i\alpha} z + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{z} \right)$$

Come caso specifico consideriamo $\alpha = 0$.

$\underline{u}_\infty = u_{1\infty} \underline{e}_x \Rightarrow \alpha = 0$

Se $u_{1\infty} > 0$ allora

$$W(z) = u_{1\infty}\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$

Passando a coordinate polari (r, θ) si ha $z = re^{i\theta}$
e quindi

$$\phi(r,\theta) = u_{1\infty}\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta$$

$$\psi(r,\theta) = u_{1\infty}\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta$$

da cui $\underline{u} = u_r \underline{e}_r + u_\theta \underline{e}_\theta$ e quindi

$$u_r(r,\theta) = u_{1\infty}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$u_\theta(r,\theta) = -u_{1\infty}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

E' banale verificare che $u_r\big|_{r=a} = 0$, mentre u_θ ha due punti di stagnazione $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

Se calcoliamo la circolazione attorno al disco

$$\Gamma = \int_{r=a} u_\theta \, ds = 2u_{1\infty} a \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta = 0$$

Quindi dal teorema di Kutta-Jukowski si deduce che la forza agente sul disco è nulla (paradosso di D'Alembert).

3 Flusso concentrico attorno all'origine e tale che $\lim_{|\underline{x}| \to \infty} \underline{u} = 0$.

Se consideriamo

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$$

dove $\ln z = \ln|z| + i \arg z$. Evidentemente non è una funzione ad un sol valore (cioè a lo stesso z si hanno infiniti valori di $\ln z$), però supponiamo di prendere $\arg z \in [0, 2\pi)$.

Passando a coordinate polari

$$W = \varphi + i \psi$$

si ha

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

Infatti

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln r e^{i\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi i}(\ln r + i\theta) =$$

$$= \underbrace{\frac{\Gamma}{2\pi}\theta}_{\phi} + i\underbrace{\left(-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r\right)}_{\psi}$$

Il flusso è irrotazionale perché la vorticità ω è tale che

$$\omega = -\Delta\psi = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = 0$$

La circolazione Γ non è nulla. Infatti:

$$\oint \underline{u} \cdot d\underline{l} = \int_0^{2\pi} u_\theta r \, d\theta$$

Ora si ha

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r}$$

$$\oint \underline{u} \cdot d\underline{l} = \Gamma$$

4) Sovrapposizione di flusso concentrico attorno al cilindro con flusso tale che

$$\lim_{|\underline{x}|\to\infty} |\underline{u}| = \underline{u}_\infty .$$

Illustriamo adesso un'altra soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \quad \text{in} \quad D = \mathbb{C} \setminus \Omega \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial \underline{n}}\Big|_{|\underline{x}|=a} = 0 \\ \lim\limits_{|\underline{x}|\to\infty} \nabla\varphi = \underline{u}_\infty \end{cases}$$

Col metodo del potenziale complesso abbiamo già trovato

$$W(z) = |\underline{u}_\infty| \left(e^{-i\alpha} z + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{z} \right) \quad (*)$$

Tuttavia un'altra soluzione è

$$W(z) = |\underline{u}_\infty| \left(e^{-i\alpha} z + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (**)$$

Il flusso (**) produce un flusso irrotazionale con circolazione e quindi produce una forza sul disco. Se $\alpha = 0$ (per semplicità)

$$W(z) = u_{1\infty}\left(z + \frac{a^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z$$

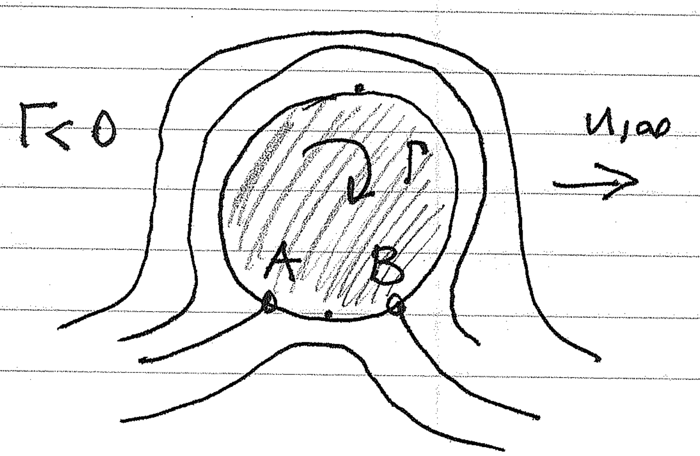
La velocità all'infinito è $\underline{u}_\infty = u_{1\infty}\,\underline{e}_x$, la circolazione è Γ (non nulla) e quindi il disco è soggetto ad una forza diretta lungo l'asse y la cui intensità è pari a $|\Gamma|\rho\, u_{1\infty}$.

La velocità sulla superficie del disco è

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\Big|_{r=a} = -2u_{1\infty}\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

Quindi se $|\Gamma| < 4\pi a\, u_{1\infty}$ si hanno due punti di stagnazione definiti da

$$\sin\theta = \frac{\Gamma}{4\pi a\, u_{1\infty}}\,; \quad \Gamma < 0$$



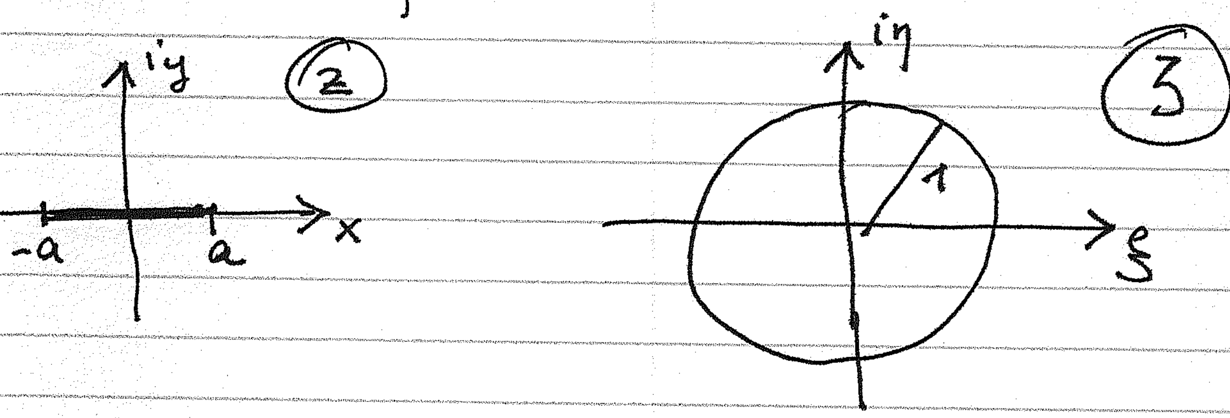
I punti di stagnazione sono A e B e qui la pressione è più alta e dunque genera una spinta verso l'alto.

FLUSSO ATTORNO ALLA LAMINA PIANA.

Consideriamo adesso il flusso esterno ad una lamina piana

$$\Omega = \{-a \le x \le a \, ; \, y = 0\}.$$

L'idea è quella di trasformare la lamina piana in un cerchio di raggio 1



La trasformazione è

$$z = \frac{a}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$$

$$\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}$$

Infatti considerando $\zeta = e^{i\theta}$; $\theta \in [0, 2\pi]$ si ha

$$z = \frac{a}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = a\cos\theta$$

per cui

$z = x + iy \Rightarrow \begin{cases} x = a\cos\vartheta & \vartheta \in (0, 2\pi] \\ y = 0 \end{cases}$

Si suppone inoltre che il flusso all'infinito sia dato

$$\lim_{|\underline{x}| \to \infty} \underline{u} = |\underline{u}_\infty| \cos a \, \underline{e}_x + |\underline{u}_\infty| \sin a \, \underline{e}_y$$

Per semplicità consideriamo $a = 2$ e quindi la mappa $z \longleftrightarrow \zeta$ diventa

$$z = \zeta + \frac{1}{\zeta} \iff \zeta = z + \sqrt{z^2 - 4}$$

Lavorando nel piano ζ dobbiamo trovare un potenziale complesso W tale che: W sia analitico, W produce una velocità radiale nulla sul cerchio di raggio 1 e che la corretta velocità per $|\zeta| \to \infty$.

Abbiamo due categorie di soluzioni (entrambe accettabili a priori).

1ª CATEGORIA (FLUSSO SENZA CIRCOLAZIONE)

$$W(\zeta) = |u_\infty| \left(e^{-i\alpha} \zeta + \frac{e^{i\alpha}}{\zeta} \right)$$

2ª CATEGORIA (FLUSSO CON CIRCOLAZIONE)

$$W(z) = |\underline{u}_\infty| \left(e^{-i\alpha} z + \frac{e^{i\alpha}}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$$

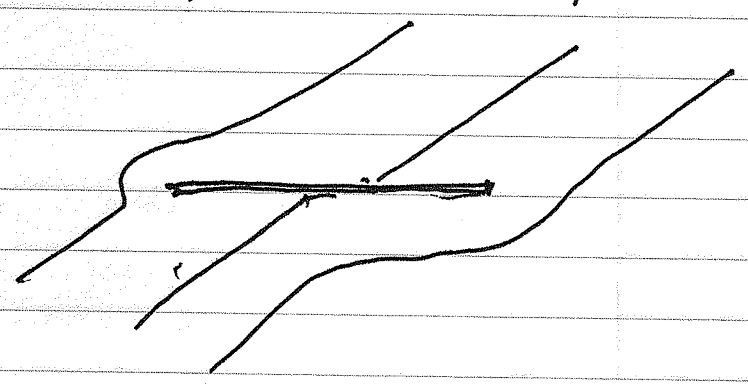
Sorgono adesso due problemi:

1) quale $W(z)$ si sceglie?

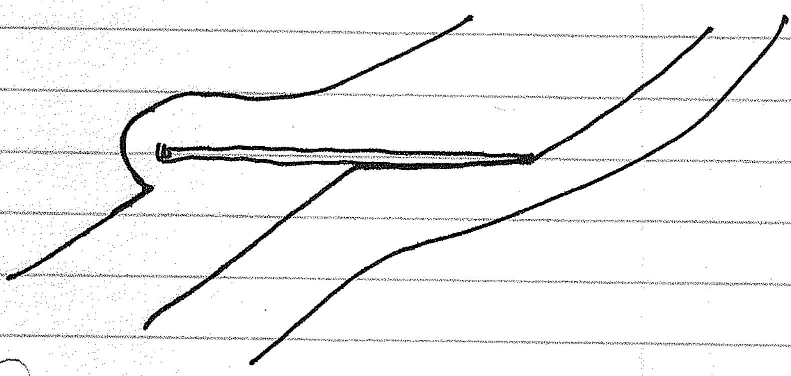
2) Supponendo di selezionare $W(z)$ nella seconda categoria quanto vale Γ? O meglio, come si sceglie Γ?

La scelta si fa in base ad una serie di argomentazioni di carattere fisico.

Primo se scegliessimo $W(z)$ nella prima categoria avremmo nel piano z delle linee di flusso di questo tipo



Mentre noi ci aspetteremo delle linee di questo tipo



Un "ricircolo" delle particelle attorno al bordo della lamina per poi distaccarsi dal lato superiore non è molto "fisico".

Ci si aspetta che le particelle si distacchino dalla lamina dal bordo della lamina.

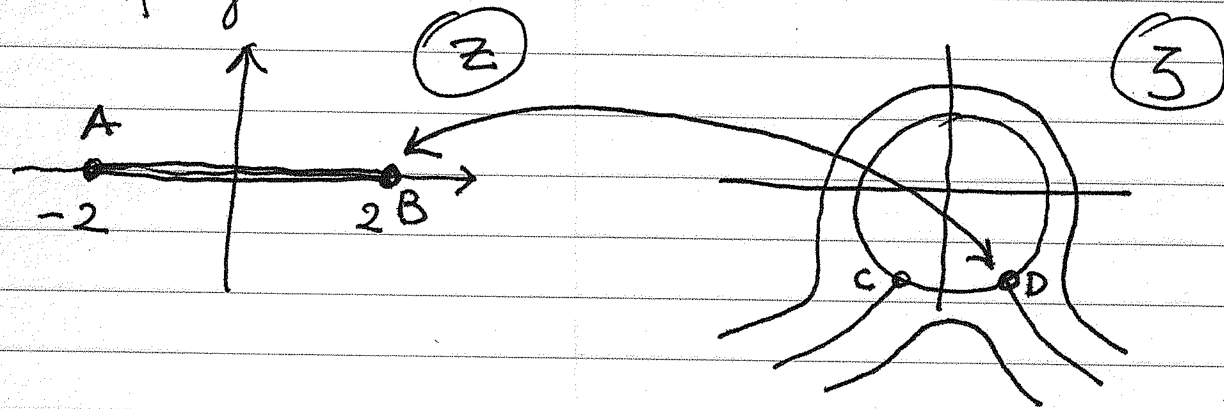
Ciò spinge a scegliere la $W(z)$ nella seconda categoria. Così facendo però dobbiamo selezionare Γ. Nella seconda categoria infatti i potenziali W sono infiniti tanti quanti sono i valori di Γ. Allora come selezioniamo il valore di Γ?

A tal proposito si utilizza il:

POSTULATO di KUTTA-JOUKOWSKI

Si seleziona Γ in maniera che

il punto di stagnazione coincide con l'immagine nel piano ζ del bordo di fuga della lamina?



$$z_B = 2$$

$$\zeta_D = e^{i\theta}$$

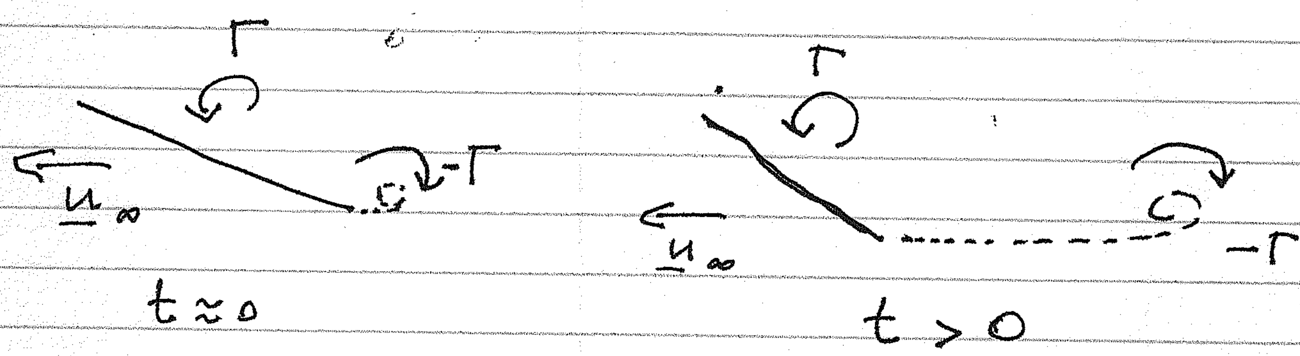
Da qui si ricava il valore di Γ

$$\Gamma = -4\pi\,|\underline{u}_\infty|\sin\alpha$$

Per concludere dobbiamo chiarire l'origine della circolazione. Infatti dobbiamo ipotizzare che la lamina, all'istante iniziale sia in quiete e poi cominci a muoversi sì che la sua velocità rispetto al fluido sia $-\underline{u}_\infty$.

Il teorema di Kelvin afferma che se la circolazione è nulla nella configurazione iniziale nulla rimane per tutti i tempi. Se così è come mai si considera un flusso con circolazione attorno alla lamina?

La risposta che usualmente viene data è la seguente. All'inizio, cioè nei primi istanti del movimento si crea un doppio vortice: uno positivo ed uno negativo ma aventi la stessa intensità

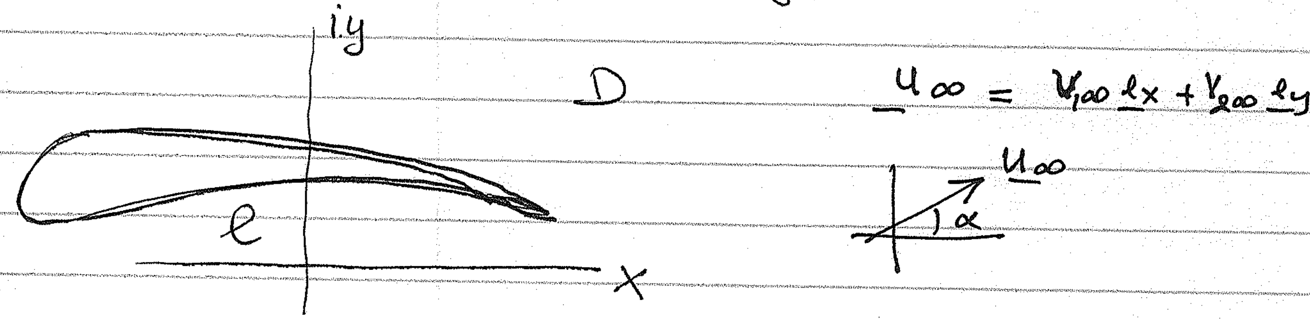


Quindi la vorticità iniziale è nulla non perchè non è presente vorticità ma per la presenza di due vortici che si bilanciano.

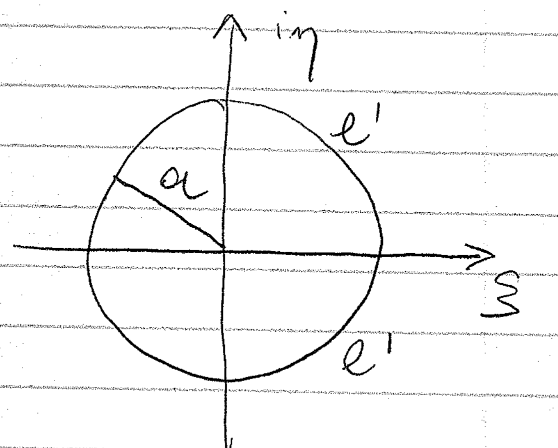
Man mano che il tempo passa la vorticità rimane concentrata in questo vortice puntiforme iniziale e attorno alla lamina

IL METODO DELLE TRASFORMAZIONI CONFORMI

Consideriamo la soluzione del problema del flusso esterno ad un contorno dato da una curva ℓ nel piano $z = x + iy$



Sia D la regione esterna ad ℓ. Introduciamo la variabile ausiliaria $\zeta = \xi + i\eta$ col il cerchio di raggio a il cui centro è nell'origine del piano ζ. Sia ℓ' il contorno del disco e D' la regione esterna



In accordo col teorema di Riemann sulle trasformazioni conformi esiste una funzione analitica invertibile

$z = f(\zeta)$ che mappa $D' \rightarrow D$ e $l' \rightarrow l$. Indichiamo con $\zeta = F(z)$ l'inversa di $f(\zeta)$. Inoltre il punto $|z| \rightarrow \infty$ è mappato nel punto $|\zeta| \rightarrow \infty$ e la direzione del contorno l' non è cambiata. Inoltre

$$\left.\frac{df}{d\zeta}\right|_{|\zeta| \rightarrow \infty} = \left.\frac{dz}{d\zeta}\right|_{|\zeta| \rightarrow \infty} = k$$

con k numero reale.

Nel piano z sia $v_\infty = v_{1\infty} + i\, v_{2\infty}$ la velocità del fluido lontano da l e sia $w(z)$ il potenziale complesso.

Nel piano ζ il potenziale complesso è

$$W(\zeta) = w(f(\zeta))$$

ed, analogamente, $w(z) = W(F(z))$.

Ovviamente

$$w(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

$$W(\zeta) = \Phi(\xi,\eta) + i\Psi(\xi,\eta)$$

La funzione ψ è costante su ℓ e quindi Ψ sarà costante ($=0$) sulla circonferenza ℓ'

$$\overline{V} = \frac{dW}{d\zeta} = \frac{dw(f(\zeta))}{d\zeta} = \frac{dw}{dz}\underbrace{\frac{dz}{d\zeta}}_{\frac{df}{d\zeta}}$$

$$\overline{V_1} = \frac{dw}{dz}$$

Quindi

$$\overline{V} = \frac{df}{d\zeta}\,\overline{V_1}$$

Se consideriamo $|\zeta| \to \infty$ (che corrisponde a $|z| \to \infty$) si ha $\left(\frac{df}{d\zeta} \xrightarrow[|\zeta|\to\infty]{} K\right)$

$$\overline{V_\infty} = K\,\overline{V_{1\infty}} \quad \text{con } K \text{ reale}$$

Quindi in D' bisogna determinare la soluzione del flusso esterno al cerchio di raggio a il cui andamento all'infinito è

$$\underline{U}_\infty = K V_{1\infty}\,\underline{e}_1 + K V_{2\infty}\,\underline{e}_2$$

Quindi se scriviamo $\overline{V_\infty} = |V_\infty|\, e^{-i\alpha}$

Il potenziale complesso nel piano ζ è

$$W(\zeta) = K|V_\infty| \left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{\zeta} e^{i\alpha} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta \qquad (\square)$$

per cui nel piano z

$$w(z) = K|V_\infty| \left[F(z) e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{F(z)} e^{i\alpha} \right] + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(F(z)) \qquad (\Delta)$$

dove lo ricordiamo

$$K = \lim_{|\zeta| \to \infty} \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{\lim_{|z| \to \infty} \frac{d\zeta}{dz}}$$

Nella formula (Δ) rimane da scegliere il valore di Γ. Sul perché si sceglie il potenziale ($\square$) e di conseguenza (Δ) abbiamo già ampiamente discusso nel caso della lamina piana. Tale caso presenta la peculiarità di avere un punto angoloso e, confrontando l'andamento delle linee di flusso relative ai potenziali delle due categorie si è scelto quello con la circolazione perché fisicamente si vuole che il punto di distacco corrisponda col bordo della lamina.

Si osserva che

$$\overline{V}_A = \left.\frac{dW(z)}{dz}\right|_A = \left.\frac{dW(\zeta)}{d\zeta}\right|_{A'} \left.\frac{d\zeta}{dz}\right|_A =$$

$$= \left.\frac{dW}{d\zeta}\right|_{A'} \frac{1}{\left.\frac{dz}{d\zeta}\right|_{A'}}$$

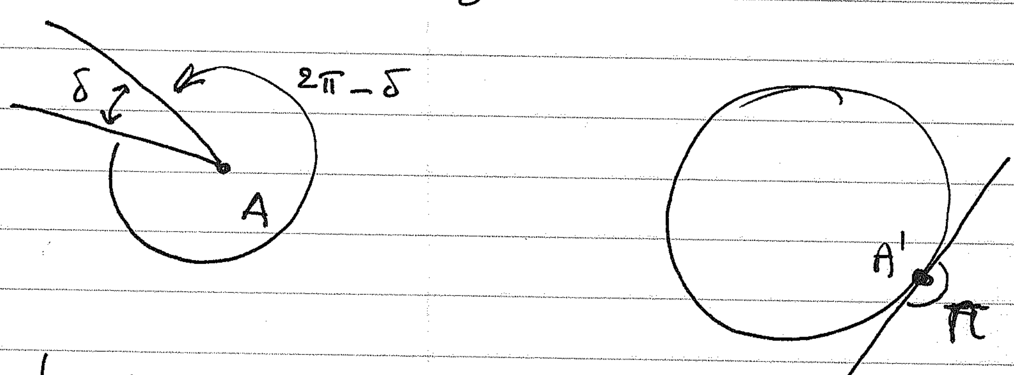
mentre

$$\overline{V}_{A'} = \left.\frac{dW(\zeta)}{d\zeta}\right|_{A'}$$

Quindi

$$\overline{V}_A = \overline{V}_{A'} \left.\frac{d\zeta}{dz}\right|_A = \overline{V}_{A'} \frac{1}{\left.\frac{dz}{d\zeta}\right|_{A'}}$$

Calcoliamo ora $\left.\frac{dz(\zeta)}{d\zeta}\right|_{A'}$.



Il punto A viene mappato in A' e dunque

l'angolo $(2\pi-\delta)$ in π. La trasformazione conforme è violata nel punto A (e in A'). In vicinanza di $\zeta_{A'}$ la $z(\zeta)$ deve avere questa espansione

$$z = z_A + M\left(\zeta-\zeta_A\right)^{\frac{2\pi-\delta}{\pi}}$$

Quindi

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{2\pi-\delta}{\pi} M\left(\zeta-\zeta_A\right)^{\frac{2\pi-\delta}{\pi}-1} = \frac{2\pi-\delta}{\pi} M\left(\zeta-\zeta_A\right)^{\frac{\pi-\delta}{\pi}}$$

per cui, siccome $\delta<\pi$,

$$\left.\frac{dz}{d\zeta}\right|_{A'} = \lim_{\zeta\to\zeta_A} \frac{2\pi-\delta}{\pi} M\left(\zeta-\zeta_A\right)^{1-\frac{\delta}{\pi}} = 0$$

Ma allora, siccome $\overline{V_A} = \overline{V_{A'}}\dfrac{1}{\left.\frac{dz}{d\zeta}\right|_{A'}}$ si ha che $\overline{V_A}\longrightarrow\infty$ se $\overline{V_{A'}}\neq 0$.

Quindi il postulato di Kutta-Jaukowski implica che $\overline{V_A}\to 0$. Determinare Γ in modo che $\overline{V_{A'}}=0$ cioè A' sia punto di stagnazione, comporta in automatico il fatto che $\overline{V_A}$ sia finita.

Ritornando alla (II) di pag. 76 si richiede dunque

$$\left.\frac{dW}{dz}\right|_{z_{A'}} = 0 \quad \text{e quindi}$$

$$\frac{dW}{dz} = K|V_\infty|\left(e^{-i\alpha} - \frac{a^2}{z^2}e^{i\alpha}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z}$$

Ora $z_{A'} = a\, e^{i\theta_{A'}}$ (A' sta sul cerchio di raggio a) per cui

$$\left.\frac{dW}{dz}\right|_{z_{A'}} = K|V_\infty|\left(e^{-i\alpha} - e^{i(\alpha - 2\theta_{A'})}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi a i}e^{-i\theta_{A'}}$$

$$\left.\frac{dW}{dz}\right|_{z_{A'}} = 0 \Rightarrow \Gamma = 2\pi i a K|V_\infty|\left[e^{i(\alpha - \theta_{A'})} - e^{-i(\alpha - \theta_{A'})}\right]$$

ovvero

$$\Gamma = 4\pi K a |V_\infty| \sin(\theta_{A'} - \alpha).$$

Si osservi però che:

- Se il profilo ha più punti angolosi
- Se il profilo non ha punti angolosi

la procedura di Kutta-Joukowski non può essere impiegata. Infatti, nel caso della lamina piana ci sono due punti angolosi e la procedura di Kutta-Joukowski ci ha consentito di porre il punto di fuga in corrispondenza del bordo di fuga. Evidentemente la singolarità corrispondente allo spigolo dovente non si rimuove. In tal caso la velocità (nel piano z) diventa infinita e quindi ciò corrisponde (in base al teorema di Bernoulli) ad un azzeramento della pressione, ovvero un distacco.

Si nota infine che $\Gamma = 0$ se $\vartheta_{A'} = \alpha$.
Applicando il teorema di Kutta-Joukowski possiamo calcolare la forza di lift

$$|F| = \rho \, |\underline{u}_\infty| \, |\Gamma| =$$

$$= \rho \, 4 \pi k a \, |\underline{u}_\infty|^2 \, |\sin(\vartheta_{A'} - \alpha)|$$