

Introduzione alla teoria dello strato limite

Soluzioni analitiche delle equazioni stazionarie dei fluidi sono note da oltre un secolo per due situazioni tipiche. Una di queste è quella di un fluido viscoso (newtoniano) con basso numero di Reynolds (si veda il capitolo 9) in una geometria che rende nullo il termine inerziale (non-lineare) e il bilancio di forze avviene fra la forza di pressione e le forze viscosi. Il secondo tipo di soluzione è quella di un fluido ideale attorno a corpi di varia forma (purché relativamente semplice) in cui il bilancio di forze è fra quella d'inerzia e la forza di pressione. In questo secondo caso l'equazione del moto è non-lineare ma il campo di velocità può essere determinato risolvendo l'equazione (lineare) di Laplace¹. Queste soluzioni irrotazionali predicono forze di pressione su ogni corpo “disegnato” dalle linee di flusso che si accordano sorprendentemente bene con i dati sperimentali disponibili per il moto di fluidi con viscosità relativamente piccola. Tuttavia sappiamo (si rammenti il paradosso di d'Alembert espresso dal teorema 8.5 e la formula (8.71)) che queste soluzioni predicono resistenza nulla al bordo degli ostacoli e valgono nell'ipotesi che la velocità tangenziale al bordo degli ostacoli possa anche essere non nulla. Queste circostanze sono invece in netto contrasto con le osservazioni sperimentali.

Nel 1905 Ludwig Prandtl, un ingegnere, ipotizzò per primo che, per piccoli valori della viscosità, le forze viscosi potessero essere trascurate ovunque tranne che in prossimità della frontiera (rigida) del corpo dove invece la condizione da soddisfare è quella di non-slittamento (velocità tangenziale nulla). Se la viscosità tende a zero, lo spessore di questo “strato limite” (in cui il fluido segue le leggi dei fluidi viscosi) deve tendere a zero. D'altra parte Prandtl riteneva corretta l'idea che, per piccoli valori della viscosità, gli effetti stessi della viscosità dovessero essere trascurabili. Allo stesso tempo l'ipotesi di velocità tangenziale nulla alla frontiera di ostacoli fissi, per ν piccola quanto si vuole purché non nulla, permetteva di dare conto della forza resistente (*drag*). Prandtl mostrò anche come queste ipotesi permettessero di semplificare le equazioni del moto (rispetto a quelle di

¹ Si veda il capitolo 8 ed in particolare l'equivalenza fra il problema di Eulero e quello di Neumann a pagina 199.

Navier-Stokes) nello strato limite. Dopo Prandtl il concetto di “strato limite” è stato ampiamente generalizzato e le tecniche matematiche coinvolte sono a loro volta state formalizzate estendendole ad altre branche della modellistica fisico-matematica. La teoria dello strato limite è una pietra miliare nella storia della fisica matematica ed è il motivo per cui ora ce ne occuperemo mettendone in evidenza gli aspetti principali.

Le idee di Prandtl si basano su una opportuna procedura di *scaling* delle grandezze fisiche e su un uso accorto delle scale di lunghezza per imporre un “raccordo” (*matching*) alla frontiera dello strato sottile fra la soluzione interna (Newtoniana) e la soluzione esterna (ideale). Una trattazione analitica è possibile solo per geometrie semplici come ad esempio una lamina piana (soluzione di Blasius). Molto più frequentemente è indispensabile la trattazione numerica.

11.1 Equazioni di Prandtl per lo strato limite stazionario

In questa sezione si considera un flusso stazionario bidimensionale di un fluido Newtoniano incompressibile². Si denota con³

$$\mathbf{v}^*(x^*, y^*) = u^*(x^*, y^*) \mathbf{e}_x + v^*(x^*, y^*) \mathbf{e}_y, \quad (11.1)$$

il campo di velocità euleriano, e con ϱ , μ , rispettivamente la densità (costante) e la viscosità (anch'essa costante) del fluido. Il sistema di equazioni che governa il flusso è il seguente⁴

$$\begin{cases} \varrho \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right), \\ \varrho \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \mu \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right), \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \end{cases} \quad (11.2)$$

dove p^* è la pressione del fluido.

² Si ricorda (vedere a pagina 224) che anche l'aria atmosferica può essere considerata incompressibile se la velocità tipica è molto minore della velocità del suono (cioè se il numero di Mach M è < 0.3).

³ Al contrario di quanto fatto nel capitolo 7 relativamente allo studio delle onde d'acqua lineari, qui l'apice “*” denota grandezze con dimensioni. L'assenza dello “*” denota invece grandezze adimensionali.

⁴ Nella teoria dello strato limite l'unica forza esterna presente è la gravità ma il suo ruolo è irrilevante in questa tipologia di fenomeno. Pertanto il suo potenziale viene di fatto inglobato nel termine di pressione.

11.1.1 Un esempio: esistenza di una doppia scala di lunghezza

Supponiamo di adesso di aver a che fare con un flusso diretto sostanzialmente lungo l'asse x , e caratterizzato da una velocità U . Per fissare le idee si può pensare al flusso d'aria intorno ad un'automobile che si muove lungo un rettilineo alla velocità di 80 Km/h (pari a circa 2×10^3 cm/s). Se in queste condizioni si sporge fuori dal finestrino un braccio si percepisce nettamente la “forza viscosa” dell'aria che tende a spostarlo verso la parte posteriore dell'auto. Facciamo, riferendoci appunto a tale caso specifico, una stima grossolana dell'ordine di grandezza del termine inerziale e di quelli viscosi nell'equazione (11.2)₁. Se si denota con L , la scala di lunghezza caratteristica è (nel caso del braccio⁵ $L \approx 10$ cm), tenendo presente la viscosità cinematica ν dell'aria in condizioni ordinarie è approssimativamente pari a 0.015 cm²/s, abbiamo⁶

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \sim 10^6,$$

Questo indurrebbe a pensare che i termini viscosi sono molto più piccoli dei termini inerziali e che quindi l'effetto della viscosità è trascurabile. Ma allora come si spiega la “forza dell'aria” sul braccio? Se il fluido è sostanzialmente ideale, perché lo stesso fluido esercita una forza viscosa? Questo paradosso emerge ancor più chiaramente se, nel sistema (11.2), consideriamo variabili adimensionali. Si definiscono le seguenti variabili adimensionali

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{L}, \quad u = \frac{u^*}{U}, \quad v = \frac{v^*}{U}, \quad p = \frac{p^*}{\Pi}, \quad (11.3)$$

dove Π è una pressione caratteristica che dobbiamo ancora fissare. Procedendo come nel capitolo 9 possiamo adimensionalizzare il sistema (11.2) e si ottiene

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \left(\frac{\Pi}{\rho U^2} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\nu}{UL} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \left(\frac{\Pi}{\rho U^2} \right) \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\nu}{UL} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (11.4)$$

Nei fenomeni legati all'aerodinamica la forza d'inerzia e quella di pressione sono dello stesso ordine di grandezza. È quindi naturale assumere

$$\Pi = \rho U^2, \quad (11.5)$$

(usualmente detta “scala di pressione aerodinamica”). Riscriveremo dunque il sistema (11.4) come segue

⁵ Si ricordi che stiamo considerando un flusso piano. Quindi quello che interessa è il diametro dell'ostacolo, ossia il diametro del braccio.

⁶ Siccome il flusso è praticamente unidirezionale è ragionevole trascurare la componente trasversale, ovvero quella diretta lungo l'asse y .

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{Re}^{-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{Re}^{-1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (11.6)$$

E proprio quest'ultima versione mette ancor più in evidenza il paradosso: se $\text{Re} \sim 10^5$, appare chiaro che i termini di (11.6) che sono moltiplicati per Re^{-1} possono essere legittimamente trascurati. Così facendo il sistema (11.6) si riconduce al sistema di Eulero che descrive il moto di un fluido non viscoso. Per tale modello, la formula di Blasius (vedere a pagina 217) ci fornisce il “drag” viscoso che però risulta nullo. Quindi, tornando all'esempio del braccio esposto al flusso d'aria, il “drag” viscoso agente su di esso dovrebbe essere trascurabile, mentre l'unico effetto percepibile dovrebbe essere un'eventuale portanza (che potrebbe spingere il braccio verso l'alto o verso il basso). Ma allora, ancora una volta, perché il braccio è trascinato indietro dall'aria? Prima di rispondere a questa domanda soffermiamoci ancora un po' sulla definizione di “numero di Reynolds”. Se $\text{Re} \ll 1$ gli effetti viscosi sono dominanti, non lo sono più se $\text{Re} \gg 1$. Bisogna però osservare che la stima del numero di Reynolds si opera selezionando una lunghezza caratteristica, una velocità caratteristica e parametri fisici del fluido: densità e viscosità. Quindi ci chiediamo: siamo proprio sicuri che la lunghezza L è quella giusta? Sul fatto che il flusso attorno al braccio possa essere considerato bidimensionale non sembrano esserci dubbi, come non ci sono dubbi sul fatto che U , è la sua velocità caratteristica. Allora l'unica possibilità che ci resta è quella di ipotizzare l'esistenza di una scala di lunghezza “nascosta” da qualche parte nel sistema, cioè che per questo problema esista una *doppia scala* di lunghezza caratteristica

11.1.2 Esempio: lamina piana sottile

Consideriamo una lamina di spessore trascurabile e lunghezza L . La direzione x^* è orientata lungo la lamina, mentre la direzione y^* è perpendicolare alla stessa. L'origine del sistema di riferimento è posta nel punto O che coincide col bordo d'attacco del flusso (v. figura 11.1). Per simmetria considereremo solo il semipiano $y^* \geq 0$. Si considerano poi condizioni stazionarie per cui il campo di velocità (bidimensionale) è dato dalla (11.1). Le condizioni che si impongono sulla lamina sono:

$$\begin{cases} u^*(x^*, 0) = 0, & \text{aderenza,} \\ v^*(x^*, 0) = 0, & \text{impermeabilità/non - distacco.} \end{cases} \quad (11.7)$$

Infine, a “grande distanza” dalla lamina possiamo supporre che il campo di velocità non risente della presenza della lamina. La scala longitudinale è sicuramente L , ma cosa dire riguardo alla scala trasversale? Ma, prima di tutto, cosa vuol dire scala caratteristica di lunghezza in questo contesto? Con tale termine si intende quella distanza lungo la quale la velocità subisce variazioni relative significative. Allora se la scala longitudinale è L , poniamo che quella verticale (o meglio trasversale) sia δ . Il valore δ tuttavia non è a priori noto (anche se ci aspettiamo comunque che $\delta \leq L$). Quindi,

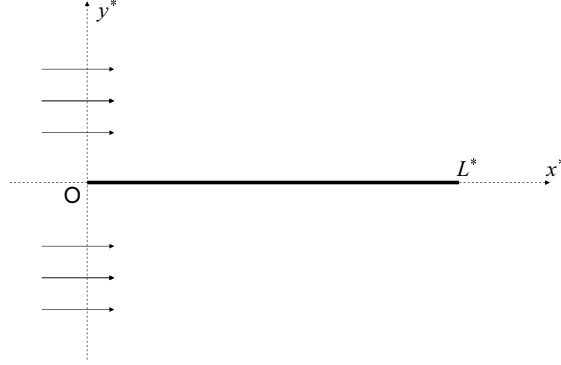


Figura 11.1. Flusso attorno ad una lamina sottile di lunghezza L .

per definizione di scala di lunghezza, la velocità trasversale v^* subisce, nello spazio δ , una variazione relativa non trascurabile. Introduciamo quindi questa doppia scalatura

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{\delta}. \quad (11.8)$$

Adesso, cosa possiamo dire in merito alla scale di velocità? Certamente la scala longitudinale è U , ma quella trasversale? Sapendo che U è la scala di velocità longitudinale possiamo introdurre la relativa scala di tempo

$$T = \frac{L}{U}.$$

Quindi, nel tempo T le particelle del fluido percorrono una distanza longitudinale dell'ordine di L . Ci aspettiamo pertanto che nello stesso tempo T le particelle percorrano una distanza trasversale dell'ordine δ . Per cui, se denotiamo con V la scala trasversale di velocità, avremo

$$V = \frac{\delta}{T} = \frac{\delta}{L} U.$$

Si definisce così

$$u = \frac{u^*}{U}, \quad v = \frac{v^*}{V} = \frac{L}{\delta} \frac{v^*}{U}. \quad (11.9)$$

Vediamo adesso come si può stimare δ . Consideriamo il sistema (11.2), e introduciamo in esso le variabili adimensionali (11.8), (11.9), non definendo ancora la scala Π per la pressione. Otteniamo

$$\begin{cases} \frac{U^2}{L} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \left(\frac{\Pi}{\rho L} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu U}{\delta^2} \left(\frac{\delta^2}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{U^2 \delta}{L^2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \left(\frac{\Pi}{\rho \delta} \right) \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\nu U \delta}{L^3} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\nu U}{\delta L} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (11.10)$$

Il confronto fra termini inerziali e termini viscosi ci permette ora di valutare δ . Infatti, ricordando la definizione di Re ,

$$\frac{\text{termini inerziali}}{\text{termini viscosi}} = \frac{U^2/L}{\nu U/\delta^2} = \frac{U\delta^2}{\nu L} = \text{Re} \frac{\delta^2}{L^2}.$$

Quindi se vogliamo che i due termini siano confrontabili dobbiamo richiedere

$$\text{Re} \frac{\delta^2}{L^2} = 1, \quad \Leftrightarrow \quad \delta = \frac{L}{\text{Re}^{1/2}}. \quad (11.11)$$

In particolare, se $L \sim 10$ cm, e $\text{Re} = 10^6$, (come ad esempio nel caso considerato nella sezione precedente) si trova che δ , è dell'ordine del decimo di mm. Dal punto di vista fisico questo vuol dire che i fenomeni viscosi si manifestano in un sottilissimo strato adiacente alla lamina (da qui il nome di strato limite).

Quindi, considerando δ dato dalla (11.11), con $\text{Re} \gg 1$, e considerando poi Π dato da (11.5), il sistema (11.10) acquista la forma

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{1}{\text{Re}} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

che, a sua volta, trascurando i termini dell'ordine di $1/\text{Re}$, e, a maggior ragione, quelli dell'ordine di $1/\text{Re}^2$, si può così semplificare

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (11.12)$$

Le (11.12) sono note come *equazioni di Prandtl per lo strato limite (stazionario)*.

Ora, lontano dalla lastra, $y \sim L$, possiamo considerare lo “scaling” (11.3), che però adesso, proprio per enfatizzare i differenti domini di applicazione (vedere figura 11.2), denoteremo come segue:

$$\hat{x} = \frac{x^*}{L}, \quad \hat{y} = \frac{y^*}{L}, \quad \hat{u} = \frac{u^*}{U}, \quad \hat{v} = \frac{v^*}{U}, \quad \hat{p} = \frac{p^*}{\rho U^2}. \quad (11.13)$$

Qui, tralasciando i termini di ordine $1/\text{Re}$, il sistema (11.2) si riduce al seguente



Figura 11.2. Rappresentazione schematica dei domini di validità degli “scalings” proposti. Lo “scaling” (11.8), (11.9), (11.11) sarà corretto solo nel dominio dello strato limite, mentre lo “scaling” (11.13) sarà valido nel dominio lontano. Le dimensioni dei domini non sono in scala.

$$\begin{cases} \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}}, \\ \hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}}, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = 0, \end{cases} \quad (11.14)$$

cioè il sistema di equazioni di Eulero stazionario, che descrive appunto un flusso non viscoso.

Una volta scritte la forma adimensionale delle equazioni di Prandtl il passaggio alla equivalente forma dimensionale è immediato: infatti inserendo i fattori di scala nella prima delle (11.12) si ha

$$\varrho \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}, \quad (11.15)$$

Nel seguito faremo riferimento anche stesse equazioni scritte in termini della funzione di corrente ψ (il moto è bidimensionale) la cui forma adimensionale è

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (11.16)$$

e la cui forma dimensionale è ovvia. Si rammenti poi che l’uso di ψ rende automaticamente soddisfatta l’equazione di continuità.

11.2 Condizioni di raccordo fra problema “interno” e problema “esterno”

Si denota con $\bar{U}(\hat{x}, \hat{y})$, $\bar{V}(\hat{x}, \hat{y})$, e $\bar{P}(\hat{x}, \hat{y})$, la soluzione del sistema (11.14) accoppiato con le seguenti condizioni al contorno del tutto generali⁷

$$\begin{cases} \lim_{(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) \rightarrow \infty} (\hat{u} \mathbf{e}_x + \hat{v} \mathbf{e}_y) = U_\infty(\hat{x}, \hat{y}) \mathbf{e}_x + V_\infty(\hat{x}, \hat{y}) \mathbf{e}_y, \\ \hat{v}(\hat{x}, 0) = 0, \quad 0 \leq \hat{x} \leq 1, \end{cases} \quad (11.17)$$

con U_∞ , V_∞ , funzioni date (si considera comunque sempre il caso in cui il campo $U_\infty \mathbf{e}_x + V_\infty \mathbf{e}_y$, è irrotazionale). La scelta dell'intervallo $0 < x < 1$ presuppone un'estensione limitata dell'ostacolo piano in direzione x e quindi di una scala di lunghezza caratteristica in direzione orizzontale. Nel seguito considereremo esempi in cui tale estensione è infinita nella direzione delle x positive e quindi il problema è privo di una scala orizzontale caratteristica.

Il sistema (11.12), per poter essere risolto, ha bisogno di specifiche condizioni al contorno. Sorge quindi un nuovo problema: come si definiscono tali condizioni? Infatti, sempre riferendoci alla figura 11.2, il dominio “lontano” ed il dominio dello strato limite non sono fisicamente separati da una ben definita superficie geometrica e nemmeno materiale (il fluido è lo stesso in entrambi i domini). Si assiste piuttosto ad una sorta di “immersione” dell'uno nell'altro. Il problema del *raccordo* può essere sviluppato in modo rigoroso⁸ col cosiddetto metodo delle “espansioni asintotiche raccordate”.

11.2.1 Un problema “modello”

Il modo più semplice di presentare il metodo delle espansioni asintotiche raccordate è stato proposto originalmente da Friedrichs e ripreso da van Dyke nel testo già citato. Consideriamo il problema

$$\varepsilon \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{du}{dy} = a, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \quad (11.18)$$

dove a è una costante nota e ε un parametro che può tendere a zero. Variabili e parametri sono supposti tutti adimensionali per comodità. La soluzione del problema differenziale si ottiene facilmente:

$$u(y; \varepsilon) = \frac{1-a}{1-e^{-1/\varepsilon}} \left(1 - e^{y/\varepsilon}\right) + ay \quad (11.19)$$

e il cui grafico è mostrato nella figura 11.3 Dal grafico si nota che la soluzione u ha un andamento

⁷ Si ricordi che per il flusso non viscoso, descritto dalle equazioni di Eulero, non si impone la condizione di aderenza alle superfici (condizione di “non-slip”), come si usa fare nel caso dei flussi viscosi, ma soltanto la condizione di impermeabilità (velocità normale alla superficie nulla).

⁸ Esiste molta letteratura in proposito; un testo fondamentale è Van Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, (1975).

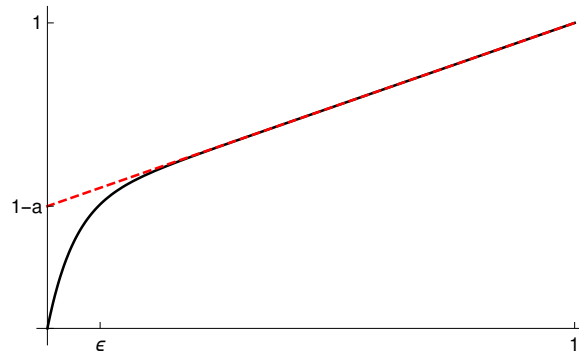


Figura 11.3. Soluzione esatta del problema modello per $\varepsilon = 0.05$ e $a = 0.6$. In tratteggio la soluzione del problema per $\varepsilon = 0$.

molto simile a quello della retta $\tilde{u}(y) = 1 - a + ay$ (che è la soluzione dell'equazione data priva però della derivata seconda e soddisfacente unicamente la condizione al contorno in $y = 1$) *tranne che in un intorno di ampiezza $\approx \varepsilon$ vicino all'origine dove u deve adeguarsi rapidamente alla prima condizione al contorno del problema originario*. Questa zona prossima ad $y = 0$ è caratterizzata dal fatto che il termine con la derivata seconda risulta dello stesso ordine di grandezza degli altri termini dell'equazione e viene chiamata “zona interna”, mentre nella restante parte del dominio, detta “zona esterna”, il termine di derivata seconda è trascurabile (vedere la figura 11.4). Un

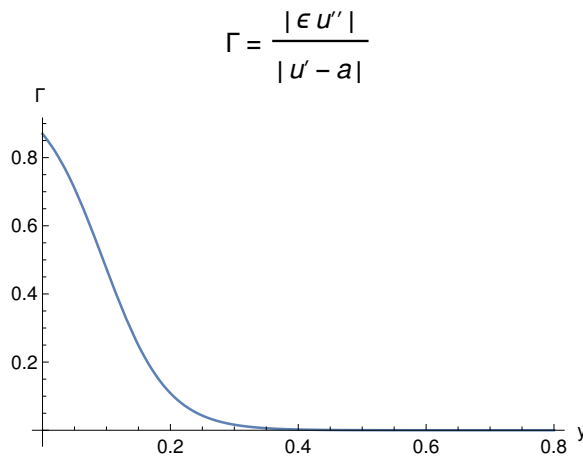


Figura 11.4. Confronto fra $|\varepsilon u''|$ e $|u' - a|$ nel dominio $(0, 1)$.

problema di questo tipo è detto “di perturbazione singolare”: il piccolo parametro ε moltiplica la derivata di ordine più elevato con la conseguenza che non è possibile eliminare questo termine per realizzare un'approssimazione accettabile del problema originario da utilizzarsi con $\varepsilon \ll 1$. Infatti l'eliminazione della derivata di ordine massimo *modifica radicalmente il problema* dato che non è

più possibile imporre la seconda condizione al contorno. I problemi di perturbazione singolare sono caratterizzati dalla presenza di “strati limite”, cioè regioni molto “sottili” in cui la soluzione ha variazioni estremamente rapide, caratteristica che andrebbe persa ponendo semplicemente $\varepsilon = 0$ nel problema modello.

Per risolvere il problema occorre tenere correttamente in conto il ruolo del piccolo parametro nella soluzione del problema completo. La procedura per fare ciò è nota col nome di metodo delle “espansioni asintotiche raccordate” e consiste nello scrivere le espansioni in serie rispetto ad ε della soluzione nelle due zone e nell’imporre che tali sviluppi si raccordino nella zona di interfaccia.

Problema esterno

Sempre con riferimento al problema modello (11.18), per $\varepsilon = 0$ l’equazione diventa di primo ordine e non è quindi più possibile soddisfare *entrambe* le condizioni al contorno. Data la forma della soluzione la condizione in $y = 0$ va abbandonata e si rimane col problema “esterno”

$$\frac{d u^{(e)}}{d y} = a, \quad u^{(e)}(1) = 1, \quad (11.20)$$

la cui soluzione è

$$u^{(e)}(y) = 1 - a + ay,$$

che rappresenta una buona approssimazione del problema originario tranne che nello stato limite $(0, \varepsilon)$ nel quale $y = O(\varepsilon)$. Come preannunciato $u^{(e)}$ non soddisfa la condizione $u^{(e)}(0) = 0$ tranne nel caso particolare in cui $a = 1$.

Problema interno

Introduciamo una coordinata “dilatata” adatta a descrivere il problema nella regione $(0, \varepsilon)$ ponendo

$$y_i = \frac{y}{\varepsilon}, \quad u^{(i)}(y_i; \varepsilon) = u(\varepsilon y_i; \varepsilon).$$

Si vede subito che il problema (11.18) si riscrive nella forma

$$\frac{d^2 u^{(i)}}{d y_i^2} + \frac{d u^{(i)}}{d y_i} = \varepsilon a, \quad u^{(i)}(0; \varepsilon) = 0, \quad u^{(i)}\left(\frac{1}{\varepsilon}; \varepsilon\right) = 1, \quad (11.21)$$

la cui soluzione non è altro che la versione trasformata della soluzione del problema originario, ovvero

$$u^{(i)}(y_i; \varepsilon) = \frac{1 - a}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \left(1 - e^{-\hat{y}}\right) + \varepsilon a y_i.$$

L’idea guida del metodo è quello di trovare un’equazione *più semplice* della (11.21) che, nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$, approssimi l’equazione esatta quando $\tilde{y} = O(1)$, cioè quando $y = O(\varepsilon)$. Consideriamo allora l’espansione in serie

$$u^{(i)}(y_i; \varepsilon) \sim u_0^{(i)}(y_i) + \varepsilon \hat{u}_1(y_i) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 u_2^{(i)}(y_i) + \dots, \quad (11.22)$$

dove i fattori delle potenze di ε sono funzioni incognite da determinare. Sostituendo nella (11.21) e ordinando secondo le potenze crescenti di ε si ha

$$\frac{d^2 u_0^{(i)}}{d y_i^2} + \frac{d u_0^{(i)}}{d y_i} + \left(\frac{d^2 u_1^{(i)}}{d y_i^2} + \frac{d u_1^{(i)}}{d y_i} - a \right) \varepsilon + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 u_2^{(i)}}{d y_i^2} + \frac{d u_2^{(i)}}{d y_i} \right) \varepsilon^2 + \dots = 0 \quad (11.23)$$

che risulterà soddisfatta per ogni ε se e solo se si annullano tutti i coefficienti dell'espansione. Consideriamo il termine all'ordine zero: dovrà essere

$$\frac{d^2 u_0^{(i)}}{d y_i^2} + \frac{d u_0^{(i)}}{d y_i} = 0$$

che differisce dalla (11.21) per l'assenza del termine noto. Questa equazione è del secondo ordine e ha quindi bisogno di due condizioni al contorno. Tuttavia mentre la condizione in $\hat{y} = 0$ non cambia e rimane $u_0^{(i)}(0) = 0$, la condizione al contorno “esterna” $u^{(i)}(1/\varepsilon; \varepsilon) = 1$ va cambiata. Infatti in caso contrario la soluzione sarebbe

$$u_0^{(i)}(y_i) = \frac{1 - e^{-y_i}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \rightarrow 1 - e^{-y_i} \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Ma questa soluzione non converge a quella del problema esatto (11.21) per $\varepsilon \rightarrow 0$ a causa della assenza del fattore moltiplicativo $(1 - a)$.

Condizione di raccordo

Si noti che l'impossibilità per la soluzione “interna” $u_0^{(i)}$ di soddisfare la condizione al contorno “esterna” $u^{(i)}(1/\varepsilon; \varepsilon) = 1$ è analoga all'impossibilità per la soluzione “esterna” $u^{(e)}$ di verificare la condizione “interna” $u^{(e)}(0) = 0$. La corretta condizione per i due problemi è espressa dalla richiesta che le due soluzioni si raccordino con continuità in una zona intermedia appartenente al dominio di validità di entrambe⁹. A tale scopo introduciamo una nuova coordinata dilatata, indicata con ζ e definita ponendo

$$\zeta = \frac{y}{s(\varepsilon)}$$

dove $s(\varepsilon)$ va scelta in modo che valgano simultaneamente le due condizioni

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{s(\varepsilon)} = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s(\varepsilon)}{1} = 0, \quad (11.24)$$

cioè $s(\varepsilon)$ è “grande” rispetto ad ε e “piccola” rispetto ad 1 per $\varepsilon \rightarrow 0$. Qualsiasi funzione del tipo $s(\varepsilon) = \varepsilon^\beta$ con $\beta \in (0, 1)$ soddisfa entrambe le richieste. La condizione di raccordo all'interfaccia (fra i due domini) consiste nell'imporre che, per $\varepsilon \rightarrow 0$, la differenza fra la soluzione esterna e quella interna si annulli nella zona intermedia. Quindi, per ζ_β fissato, la differenza deve tendere a zero

⁹ L'esistenza di una zona di raccordo di questo tipo è assicurata da un teorema dovuto a Kaplun.

come $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots$ per tutti gli ordini inclusi nell'espansione delle due soluzioni. In termini rigorosi si chiede

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \zeta_\beta = \text{cost.}}} \frac{u^{(i)}(y_i \varepsilon^{-1}; \varepsilon) - u^{(e)}(y)}{\varepsilon^i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Sostituendo $y = \varepsilon^\beta \zeta_\beta$ in modo da soddisfare esplicitamente la condizione $\zeta_\beta = \text{cost.}$, la condizione di raccordo si scrive nella forma

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u^{(i)}(\varepsilon^{\beta-1} \zeta_\beta; \varepsilon) - u^{(e)}(\varepsilon^\beta \zeta_\beta)}{\varepsilon^i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Nel caso specifico del problema modello, per $i = 0$ sostituendo l'espansione di $u^{(i)}(y_i; \varepsilon)$ la condizione di raccordo fra le due soluzioni assume la forma

$$u_0^{(i)}(\infty) = u^{(e)}(0) = 1 - a,$$

dato che i termini di ordine superiore in ε vanno a zero e si è tenuto conto della forma della soluzione $u^{(e)}$. In definitiva il problema interno, all'ordine zero in ε è dato da

$$\frac{d^2 u_0^{(i)}}{d y_i^2} + \frac{d u_0^{(i)}}{d y_i} = 0, \quad u_0^{(i)}(0) = 0, \quad u_0^{(i)}(\infty) = 1 - a$$

e la cui soluzione è

$$u_0^{(i)}(y_i) = (1 - a)(1 - e^{y_i}).$$

Soluzione raccordata di ordine 0

Definiamo

$$u(y; \varepsilon) \sim \begin{cases} u^{(e)}(y) = 1 - a + ay, & \text{con } y > 0 \text{ fissato} \\ u_0^{(i)}(y/\varepsilon) = (1 - a)(1 - e^{y/\varepsilon}) & \text{con } y/\varepsilon > 0 \text{ fissato} \end{cases}$$

L'impostazione che abbiamo dato al problema richiederebbe ora di “sommare” la soluzione esterna e quella interna; ciò tuttavia porta ad un risultato scorretto perché le due espressioni non si raccordano in senso puntuale nella zona di transizione. Il disaccordo nasce dal fatto che nella somma la parte comune alle due soluzioni viene contata due volte. Questa parte comune è il termine costante $(1 - a)$. Pertanto la soluzione *raccordata* all'ordine zero è

$$u_o^{\text{racc}}(y) = u_0^{(i)}(y/\varepsilon) + u^{(e)}(y) - (1 - a) = (1 - a)(1 - e^{y/\varepsilon}) + ay, \quad \text{per } 0 \leq y \leq 1.$$

La figura 11.5 mostra le due soluzioni esterna e interna e la soluzione raccordata. Si noti che la soluzione raccordata di ordine zero differisce da quella esatta del problema originario solo per quantità che si annullano esponenzialmente al tendere di ε a zero.

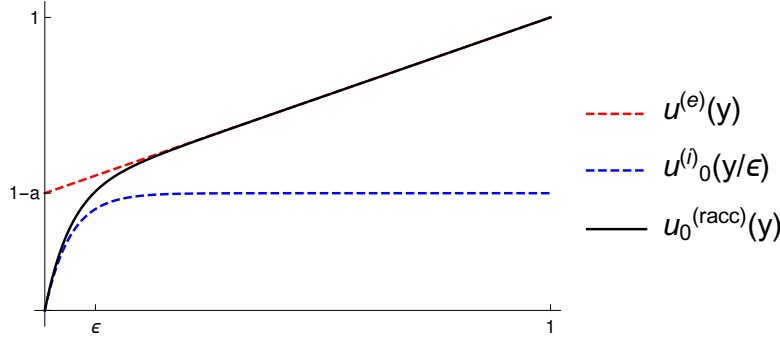


Figura 11.5. Costruzione della soluzione raccordata di ordine zero del problema modello.

Soluzione raccordata di ordine superiore

Dopo aver determinato la soluzione di ordine zero si dovrebbero considerare almeno l'approssimazione di ordine 1. Tralasciando per brevità i conti, ci limitiamo a riportarla:

$$u_1^{(\text{racc})}(y) = u_0^{(i)}(y/\varepsilon) + u^{(e)}(y) - (1 - a) = (1 - a) \left(1 - e^{y/\varepsilon} \right) + ay, \quad \text{per } 0 \leq y \leq 1.$$

da cui si vede che non differisce dall'approssimante di ordine zero. È poi possibile verificare che tutti i problemi di ordine maggiore o uguale a 2 hanno soluzione identicamente nulla. In questo particolare problema quindi il metodo delle espansioni asintotiche raccordate converge con solo due termini ad una soluzione approssimata che differisce da quella esatta solo per quantità che si annullano esponenzialmente per ε che tende a zero.

11.3 Condizioni di raccordo per le equazioni di Prandtl

Sfruttando le idee viste nel problema modello possiamo facilmente impostare le condizioni di raccordo necessarie alla trattazione delle equazioni di Prandtl. Si comincia con l'osservare che la teoria sviluppata sarà fisicamente accettabile se la soluzione di (11.12) tende a quella di (11.14) man mano che y (che corrisponde alla variabile “interna” del problema modello) si avvicina al bordo superiore dello strato limite, ovvero man mano che y diventa sempre più “grande”. Allo stesso modo la soluzione di (11.14) deve tendere a quella di (11.12) man mano che ci si avvicina alla lastra, ovvero man mano che \hat{y} (che corrisponde alla variabile “esterna” del problema modello) tende a zero. In definitiva, guardando al problema dal punto di vista fisico, deve esistere una qualche regione dove i due regimi (quello viscoso descritto dal sistema (11.12) e quello non viscoso descritto da (11.14)) si confondono uno con l'altro. Dobbiamo quindi (come nel problema modello) caratterizzare matematicamente questa *regione di sovrapposizione*. Il ruolo di piccolo parametro ε è ora svolto da $1/\sqrt{\text{Re}}$. Si osserva poi che le formule (11.8)₂, (11.13)₂ ed ancora la (11.11) comportano

$$yL\text{Re}^{-1/2} = y\delta = y^* = \hat{y}L,$$

da cui discende

$$\frac{y}{\text{Re}^{1/2}} = \hat{y}. \quad (11.25)$$

Quindi se $\hat{y} = \mathcal{O}(1)$, abbiamo $y \sim \text{Re}^{1/2} \gg 1$, ovvero molto grande. D'altra parte se $y = \mathcal{O}(1)$, si ha $\hat{y} \sim \text{Re}^{-1/2} \ll 1$, ovvero molto piccolo. Il raccordo deve pertanto avvenire in una zona che riscalata con la (11.13)₂ corrisponde ad \hat{y} molto piccoli, mentre riscalata con la (11.8)₂ corrisponde ad y molto grandi. Se denotiamo con ζ la nuova variabile “dilatata”, possiamo procedere come nel problema modello: si introduce una generica funzione $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, tale che

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) = +\infty, \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{F(s)}{s^{1/2}} = 0,$$

e si assume

$$\zeta = F(\text{Re})\hat{y}, \quad \text{oppure, ricordando la (11.25),} \quad \zeta = y \frac{F(\text{Re})}{\text{Re}^{1/2}}.$$

Quindi, siccome $\hat{y} = \frac{\zeta}{F(\text{Re})}$, si ha che per ζ fissato e finito, se $\text{Re} \rightarrow +\infty$ (che in pratica vuol

dire $\text{Re} \gg 1$), allora \hat{y} tende a zero. D'altra parte, poiché $y = \frac{\zeta}{\text{Re}^{-1/2}F(\text{Re})}$, sempre per ζ fissato

e finito, se $\text{Re} \rightarrow +\infty$ si ha $y \rightarrow \infty$ (che al solito va inteso come $y \gg 1$). La scala intermedia è dunque composta da quei valori di ζ che, se $\text{Re} \gg 1$, si avvicinano al “bordo superiore” dello strato limite (e che pertanto corrispondono a y “grandi”) e che allo stesso tempo si avvicinano alla lamina (dal momento che corrispondono a \hat{y} “piccoli”). La scala ζ è proprio la scala della regione di raccordo fra i due domini. Riferendoci per esempio alla velocità longitudinale, il matching tra le due approssimazioni verrà effettuato imponendo

$$\lim_{\text{Re} \rightarrow \infty} u \left(x, \frac{\zeta}{\text{Re}^{-1/2}F(\text{Re})} \right) = \lim_{\text{Re} \rightarrow \infty} \hat{u} \left(\hat{x}, \frac{\zeta}{F(\text{Re})} \right), \quad (11.26)$$

per ogni fissato ζ . La suddetta condizione si usa anche scrivere come $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = \hat{u}(x, 0)$, dove \hat{u} è soluzione di (11.14), (11.17) (e si è posto $x = \hat{x}$ dato che la scala orizzontale è L per entrambe le variabili).

Vediamo una prima conseguenza della (11.26). L'equazione (11.12)₂ comporta automaticamente

$$p = p(x),$$

ovvero la pressione è indipendente da y in tutto lo strato limite. Applicando la (11.26) si ottiene pertanto

$$p(x) = \lim_{\text{Re} \rightarrow \infty} \hat{p} \left(x, \frac{\zeta}{F(\text{Re})} \right) = \hat{p}(x, 0), \quad \forall x \geq 0, \quad \text{e per ogni } \zeta \neq 0 \text{ fissato.}$$

dove, lo ricordiamo ancora, \hat{p} è soluzione di (11.14), (11.17). Avremo dunque,

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}(x, 0),$$

ovvero, sfruttando la (11.14)₁,

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} = -\hat{u}(x, 0) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(x, 0), \quad (11.27)$$

siccome, in virtù di (11.17), $\hat{v}(x, 0) = 0$. Di conseguenza potremo riscrivere (11.12) come

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \hat{u}(x, 0) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(x, 0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Per quanto riguarda poi le condizioni al contorno, applicando sempre la (11.26) scriveremo

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = \hat{u}(x, 0),$$

mentre la (11.7) comporta $u(x, 0) = 0$, e $v(x, 0) = 0$. Il flusso nello strato limite è quindi descritto dal seguente sistema di equazioni (detto anche problema di Prandtl per lo strato limite stazionario)

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \hat{u}(x, 0) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(x, 0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & x \in \mathcal{I}, \quad 0 < y < +\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, & x \in \mathcal{I}, \quad 0 < y < +\infty \\ u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, & x \in \mathcal{I}, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = \hat{u}(x, 0), & x \in \mathcal{I}, \\ u(0, y) = u_o(y), & y > 0, \end{cases} \quad (11.28)$$

dove $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^+$ può essere sia limitato che illimitato e $u_o(y)$ deve necessariamente coincidere con $\hat{u}(0, y)$ (soluzione del flusso non viscoso (11.14), (11.17) sul bordo d'attacco). È utile disporre anche della versione dimensionale del sistema (11.28): con facili passaggi si trova

$$\begin{cases} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \hat{u}^*(x^*, 0) \frac{\partial \hat{u}^*}{\partial x^*}(x^*, 0) + \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}, & x^* \in \mathcal{I}^*, \quad 0 < y^* < +\infty, \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, & x^* \in \mathcal{I}^*, \quad 0 < y^* < +\infty \\ u^*(x^*, 0) = 0, \quad v^*(x^*, 0) = 0, & x^* \in \mathcal{I}^*, \\ \lim_{y^* \rightarrow \infty} u^*(x^*, y^*) = \hat{u}^*(x^*, 0), & x^* \in \mathcal{I}^*, \\ u^*(0, y^*) = u_o^*(y^*), & y^* > 0. \end{cases} \quad (11.29)$$

11.4 Lastra semi-infinita con gradiente di pressione nullo (problema di Blasius)

Consideriamo adesso il semplice caso in cui il flusso imperturbato esterno sia parallelo ad una lamina semi-infinita, cioè le condizioni (11.17) sono

$$\begin{cases} \lim_{(x^2+y^2) \rightarrow \infty} (\hat{u} \mathbf{e}_x + \hat{v} \mathbf{e}_y) = \mathbf{e}_x, \\ \hat{v}(x, 0) = 0, \quad x \geq 0. \end{cases}$$

In tal caso la soluzione di (11.14) è

$$\hat{u}(x, \hat{y}) = 1, \quad \hat{v}(x, \hat{y}) = 0, \quad \hat{p}(x, \hat{y}) = \text{costante},$$

da cui si deduce che nello strato limite il gradiente di pressione (parallelo alla lamina) generato dalla corrente non viscosa è identicamente nullo. Il sistema (11.28) si riscrive quindi in questa forma

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & x > 0, \quad 0 < y < +\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, & x > 0, \quad 0 < y < +\infty \\ u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, & x > 0, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 1, & x > 0, \\ u(0, y) = 1, & y > 0. \end{cases} \quad (11.30)$$

👁 OSSERVAZIONE 11.1. – *Notiamo che, essendo il problema bi-dimensionale, il sistema (11.30) può equivalentemente riscriversi in termini della funzione di corrente $\psi(x, y)$, ponendo*

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (11.31)$$

Sostituendo nel sistema (11.30) si ottiene¹⁰

$$\begin{cases} \psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} = \psi_{yyy}, & x > 0, \quad y > 0, \\ \psi_y(x, 0) = 0, \quad \psi_x(x, 0) = 0, & x > 0, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \psi_y = 1, & x > 0, \\ \psi_y(0, y) = 1, & y > 0. \end{cases} \quad (11.32)$$

¹⁰ Per semplicità di notazione i pedici “ x ” e “ y ” indicano rispettivamente le derivate parziali rispetto a x ed a y .

Si noti che l'equazione (11.30)₂ è, in tal caso, automaticamente soddisfatta.

👁 OSSERVAZIONE 11.2. – Il problema (11.30) è singolare nel bordo d'attacco del flusso, cioè $x = 0$. Infatti $u(x, 0) = 0$ per ogni $x > 0$ mentre $u(0, y) = 1 (= U_\infty)$ e quindi nell'origine $(0, 0)$ la soluzione è a priori discontinua. Questo difetto è conseguenza della eccessiva idealizzazione del problema: una lamina reale ha uno spessore piccolissimo, ma che nella scala dello strato limite non è affatto trascurabile. Nel punto d'attacco della corrente ($x = 0$), con angolo d'incidenza nullo (flusso esterno parallelo alla lamina), in una lamina reale si osserverebbe un punto di ristagno (cioè $\hat{u}(0, 0) = 0$) ciò che è incompatibile con la condizione $u(0, y) = 1 (= U_\infty)$. Un possibile modo di eliminare la singolarità è di scegliere una opportuna riscalatura dello strato limite in un intorno del punto d'attacco della corrente, tale che il raccordo fra \hat{u} e u avvenga in $(x, y) = (0, \xi)$ con ξ piccolissimo ma non nullo. Questo problema non verrà però ulteriormente investigato.

Ricerca di una soluzione autosimile

Poiché la lamina è *semi-infinita* manca (come nel primo problema di Stokes¹¹) una scala spaziale caratteristica. Cerchiamo allora una soluzione che dipende da una opportuna combinazione delle variabili x e y . Poniamo

$$\eta(x, y) = \frac{y}{g(x)}$$

con $g(x)$ da determinare in modo che il problema (11.30) si trasformi in un problema per η . Poniamo allora

$$u(x, y) = h(\eta(x, y)) = h\left(\frac{y}{g(x)}\right)$$

dove h è adimensionale. Se esiste una soluzione di questo tipo, il profilo della velocità orizzontale alla distanza $x > 0$ dal bordo d'attacco sarà semplicemente una versione dilatata (o compressa) in direzione y della velocità a qualsiasi altra distanza, dato che, variando x si altera unicamente la riscalatura di y ma la dipendenza di u da $y/g(x)$ rimane invariata. Si potrebbe ipotizzare la forma di g lasciandosi guidare dallo studio del primo problema di Stokes ma è preferibile far emergere tale forma dal procedimento di calcolo. Osserviamo a tal fine che

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{g'(x)}{g(x)}\eta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{g(x)}.$$

Per l'equazione di continuità,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -h'(x)\frac{\partial \eta}{\partial x} = h'(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\eta$$

che, integrata su $(0, y)$ fornisce

$$v(x, y) = \frac{g'(x)}{g(x)} \int_0^y \eta(x, s) h'(\eta(x, s)) \, ds + \underbrace{v(0, y)}_{=0}.$$

¹¹ Vedi a pagina 244.

Cambiamo variabile nell'integrale ponendo $s = g(x)\eta$ di modo che

$$v(x, y) = g'(x) \int_0^{y/g(x)} \eta h'(\eta) d\eta = g'(x) \int_0^\eta \tilde{\eta} h'(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} + \underbrace{v(0, y)}_{=0}.$$

Integrando per parti si ha

$$v(x, y) = g'(x) \left[\eta h(\eta) - \int_0^\eta h'(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \right].$$

Poniamo poi

$$f(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\eta h(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta},$$

ciò che permette di esprimere u e v mediante f invece che mediante h :

$$v(x, y) = g'(x) [\eta f'(\eta) - f(\eta)], \quad u(x, y) = f'(\eta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{g'(x)}{g(x)} \eta f''(\eta), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{g(x)} f''(\eta), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{g^2(x)} f'''(\eta).$$

Sostituendo infine nell'equazione di Prandtl, si ha

$$-\frac{1}{g^2(x)} f''' + f' \left[-\frac{g'(x)}{g(x)} \eta f'' \right] + g'(x) [\eta f' - f] \frac{1}{g(x)} f'' = 0.$$

Semplificando si trova

$$f''' + [g(x)g'(x)]ff'' = 0, \quad (11.33)$$

dove $g(x)$ è *incognita* al pari di f . Tenendo presente che g dipende solo da x ed f dipende solo da η , affinché la (11.33) abbia soluzioni, è necessario che

$$g(x)g'(x) = \text{costante}. \quad (11.34)$$

Chiamiamo α il valore (arbitrario) di questa costante: integrando la (11.34) si ha

$$g_\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(x; \alpha) = \sqrt{2\alpha x + C}.$$

Come scegliere la costante d'integrazione C ? Ricordiamo che il problema della lamina ha una singolarità *a priori* nel bordo d'attacco $(0, 0)$. Affinché il cambiamento di scala indotto dalla trasformazione $\eta = y/g(x)$ diventi degenere, per ogni $y > 0$, proprio in $x = 0$, è necessario¹² imporre la condizione $g_\alpha(0) = 0$, cioè $C = 0$.

$$f''' + \alpha f f'' = 0, \quad (11.35)$$

La costante α è solitamente posta uguale a 1 oppure 1/2 per comodità di calcolo, senza che ciò comporti alcuna perdita di generalità. Infatti, se si prendesse qualunque valore $\alpha > 0$, si avrebbe una diversa variabile di similarità $\eta_\alpha(x, y) = y/g_\alpha(x)$, con $\eta_\alpha = \eta/\sqrt{2\alpha}$ e anche una diversa variabile incognita similare $f_\alpha(\eta_\alpha)$, ma la *velocità* rimarrebbe comunque uguale, in quanto le condizioni

¹² Se si prende $C = g_\alpha(0) \neq 0$, $\eta = 0$ se e solo se $y = 0$.

al contorno asintotiche $f'(\infty) = 1 = f'_\alpha(\infty)$ implicano $f(\eta) = f_\alpha(\eta/\sqrt{2\alpha}) \cdot \sqrt{2\alpha}$ da cui segue $f'(\eta) = f'_\alpha(\eta_\alpha)$.

Pertanto

$$g(x) = \sqrt{x}, \quad \eta(x, y) = y/\sqrt{x} \quad (11.36)$$

👁 OSSERVAZIONE 11.3. – È utile ricavare la forma dimensionale della (11.36). Ricordiamo che nel caso della lastra semi-infinita non disponiamo di una scala naturale in direzione orizzontale. Possiamo assumere un qualsiasi valore finito di x^* al posto del parametro L e conseguentemente $\text{Re}(x^*) = Ux^*/\nu$ (detto numero di Reynolds locale). In tal modo la scala verticale risulta essere $\delta(x^*) = x^*/\sqrt{\text{Re}(x^*)}$. Allora

$$\delta(x^*) = x^* \sqrt{\frac{\nu}{Ux^*}} = \sqrt{\frac{\nu x^*}{U}},$$

per cui

$$\eta(x, y) = \frac{y^*/\delta(x^*)}{\sqrt{x^*}} = y^* \sqrt{\frac{U}{\nu x^*}}, \quad (11.37)$$

o, equivalentemente,

$$\eta(x, y) = \frac{y^*}{x^*} \sqrt{\text{Re}(x^*)}. \quad (11.38)$$

Il fattore $\sqrt{x^*}$ al denominatore ha l'effetto di dilatare la scala dell'asse y^* , per un fissato x^* in modo proporzionale a $1/\sqrt{x^*}$, per cui lo strato limite ha un andamento parabolico con asse $y^* = 0$ e vertice in $x^* = 0$. Una misura convenzionale (ma soggettiva e arbitraria) dello spessore dello strato limite è basata sul valore del rapporto u^*/U : si pone $u^*/U = \xi$ con ξ valore prossimo ad 1 (ad esempio 0.95 oppure 0.99) e si osserva che, essendo $\xi = u^*/U = f'(\eta) > 0$, esiste un unico η_ξ per il quale $f'(\eta_\xi) = \xi$. Questo consente di identificare, al variare di $x^* > 0$, il valore $y^* = \delta(x^*)$ in cui $u^* = \xi U$ tramite la relazione

$$\delta_\xi(x^*) = x^* \frac{\eta_\xi}{\sqrt{\text{Re}(x^*)}}. \quad (11.39)$$

cioè lo spessore dello strato secondo la definizione adottata. Nel seguito vederemo definizioni alternative per lo spessore dello strato limite di natura oggettiva e univoca a differenza di quella rappresentata dalla (11.39).

Soluzione del problema di Blasius

Completiamo ora la (11.35) con le condizioni al contorno: poiché $u(x, 0) = 0$ equivale a $f'(0) = 0$, $v(x, 0) = 0$ equivale a $\eta f'(0) - f(0) = 0$ cioè a $f(0) = 0$ e infine $u(x, \infty) = 1$ equivale a $f'(\infty) = 1$, si ottiene il seguente problema (detto di Blasius)

$$\begin{cases} f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0, & \eta \geq 0, \\ f(0) = f'(0) = 0, & f'(\infty) = 1, \end{cases} \quad (11.40)$$

la cui soluzione non è tuttavia esprimibile in forma chiusa.

La figura 11.6 mostra sia la forma dello strato limite che l'andamento delle linee di flusso della soluzione di Blasius ottenute con procedura numerica. La tabella che segue fornisce alcuni valori significativi della funzione f e delle sue derivate.

Tabella 11.1. Valori tabulati di f , f' ed f'' .

η	f	f'	f''
0	0	0	0.332
1	0.16	0.32	0.32
3	1.39	0.82	0.16
5	3.28	0.99	0.015

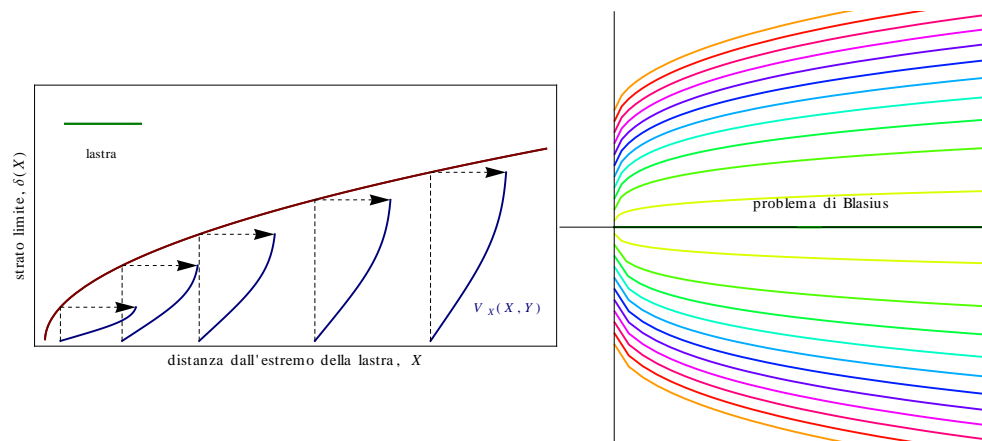


Figura 11.6. La soluzione di Blasius per la lastra piana.

11.5 Calcolo dello sforzo di taglio su una lamina di lunghezza finita

Consideriamo una lamina di lunghezza *finita* L e di profondità B , pure finita, in direzione ortogonale al piano x, y . Vogliamo calcolare lo sforzo sulla lamina dovuta alla corrente viscosa. Possiamo utilizzare la soluzione di Blasius (valida per la lamina semi-infinita) sapendo però che il risultato fornirà solo una valutazione approssimata del valore reale, sicuramente impreciso in prossimità del

bordo di uscita della corrente. Vogliamo calcolare la forza esercitata dal fluido sulla lamina a causa dell'attrito viscoso. Possiamo utilizzare la (9.117) vista a pagina 252 del capitolo 9: nel caso attuale, in variabili dimensionali,

$$\boldsymbol{\sigma}_{\partial\Omega} = -\mu \mathbf{e}_y \times (\operatorname{rot} \mathbf{u}^*)|_{y^*=0} = -\mu \mathbf{e}_y \times \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \Big|_{y^*=0} \mathbf{e}_z = \mu \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \Big|_{y^*=0} \mathbf{e}_x. \quad (11.41)$$

Pertanto, utilizzando la soluzione di Blasius

$$\boldsymbol{\sigma}_w = \mu U \left(\frac{\partial f(\eta)}{\partial y^*} \right) \Big|_{y^*=0} \mathbf{e}_x = \mu U f''(0) \sqrt{\frac{U}{\nu x^*}} \mathbf{e}_x. \quad (11.42)$$

Dunque $\boldsymbol{\sigma}_w$ è orientato come \mathbf{e}_x e ha intensità

$$\sigma_w = \mu f''(0) U \sqrt{\frac{U}{\nu x^*}} \left(= f''(0) \frac{\varrho U^2}{\sqrt{\operatorname{Re}(x^*)}} \right). \quad (11.43)$$

Lo sforzo totale (detto “resistenza” o *drag*) sulla lamina sulla faccia superiore¹³ si ottiene integrando la (11.43):

$$D \stackrel{\text{def}}{=} B \int_0^L \sigma_w \, dx^* = 2f''(0) B \varrho \sqrt{\nu U^3 L} \left(= 2f''(0) \frac{\varrho U^2 B L}{\sqrt{\operatorname{Re}(L)}} \right). \quad (11.44)$$

La resistenza D è quindi proporzionale a \sqrt{L} e a $\sqrt{\nu}$. Si noti che σ_w è singolare in $x^* = 0$ ma la singolarità è integrabile, cioè la resistenza è finita. Questa circostanza è dovuta (come già accennato in precedenza) ad una non corretta scalatura nei pressi del bordo d'attacco. Tale aspetto non verrà però approfondito.

Si può poi definire il *coefficiente adimensionale di attrito* per unità di area della lamina

$$C_f = \frac{D/(BL)}{(1/2)\varrho U^2} = \frac{4f''(0)}{\sqrt{\operatorname{Re}(L)}}. \quad (11.45)$$

Utilizzando i valori tabulati di f otteniamo allora

$$C_f \approx \frac{1.328}{\sqrt{\operatorname{Re}(L)}}$$

Possiamo anche calcolare lo spessore convenzionale $\delta_{0.99}$ dello strato limite al bordo di uscita della corrente utilizzando la (11.39):

$$\delta_\xi(L) \approx L \frac{5}{\sqrt{\operatorname{Re}(L)}}.$$

¹³ Per la simmetria rispetto all'asse y , se si considera anche la faccia inferiore ovviamente lo sforzo raddoppia.

▲ ESEMPIO 11.1. – Per una lastra di lunghezza finita $L = 1$ m e larghezza $B = 0.5$ m, investita da una corrente d'aria (a temperatura e pressione ordinarie) con velocità uniforme $U = 5 \text{ ms}^{-1}$ parallelamente al piano della lastra e diretto nel verso della lunghezza, si ha $\nu \approx 1.6 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ si ha

$$\delta_{0.99}(L) \approx 8.33 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad D \approx 10^{-2} \text{ N}.$$

Nelle stesse ipotesi ma con una velocità nettamente superiore, da esempio 80 ms^{-1} (approssimativamente la velocità di un aereo al decollo) si trova

$$\delta_{0.99}(L) \approx 0.6 \text{ m}, \quad D \approx 114 \text{ N}.$$

👁 OSSERVAZIONE 11.4. – L'accordo fra teoria ed esperienza è molto buono sia riguardo al profilo della velocità sia riguardo all'attrito (sforzo di parete). Questo accordo vale comunque per valori elevati di Re ma non arbitrariamente tali. Esiste infatti un valore critico superiore Re_c per il quale lo strato limite diventa instabile e inizia la transizione verso un regime turbolento. Tale valore critico dipende da molti fattori quali la “rugosità” della superficie, la distribuzione di pressione esterna (cioè il fattore $\hat{u}(x, 0)\partial_x \hat{u}(x, 0)$ nell'equazione di Prandtl) ed eventuali perturbazioni nella corrente non viscosa. Nel caso della lastra piana Re_c risulta compreso fra 5×10^5 e 3×10^6 . Se ora calcoliamo $Re(L)$ con i valori forniti nell'esempio si trova $Re(L) = 3.42 \times 10^5$, appena inferiore al valore critico. La stabilità dei moti fluidi in relazione a opportuni parametri come il numero di Reynolds costituisce un capitolo a parte nello studio della fluidodinamica che verrà sviluppato in seguito (capitolo 13).

11.6 Esistenza di soluzioni similari: caso generale

La soluzione autosimile di Blasius presuppone l'assenza di un gradiente di pressione dovuto alla corrente non viscosa. Viene quindi naturale chiedersi se sono ancora possibili soluzioni autosimili se $\hat{u}(x, 0)\partial_x \hat{u}(x, 0) \neq 0$. Per studiare questo problema conviene utilizzare la funzione di corrente ψ . Riscriviamo allora il sistema (11.32) tenendo conto del gradiente di pressione “esterno” e utilizzando la versione dimensionale¹⁴

$$\begin{cases} \psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} - \nu \psi_{yyy} = \hat{u}(x, 0)\partial_x \hat{u}(x, 0), & x > 0, \quad y > 0, \\ \psi_y(x, 0) = 0, \quad \psi_x(x, 0) = 0, & x > 0, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \psi_y = 1, & x > 0, \\ \psi_y(0, y) = 1, & y > 0. \end{cases} \quad (11.46)$$

¹⁴ In questo capitolo tutte le variabili sono dimensionali ma per semplicità di notazione abbiamo soppresso l'apice “*” nelle notazioni.

Rispetto al problema considerato da Blasius c'è una differenza sostanziale: $\hat{u}(x, 0)$ è incognita e andrà determinata come parte del problema. La variabile (adimensionale) di similarità, se esiste, sarà del tipo

$$\eta(x, y) = \frac{y}{G(x)},$$

con $G(x)$ da determinare. Come nel problema di Blasius, $G(x)$ potrà essere interpretata come spessore locale dello strato limite. Poiché stiamo supponendo che ψ sia dimensionale, possiamo porre

$$\psi(x, y) = U(x)G(x)f\left(\frac{y}{G(x)}\right)$$

dove $U(x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{u}(x, 0)$. Procedendo come nel caso del problema di Blasius, la sostituzione di ψ nella prima delle (11.46) fornisce

$$f''' + \frac{G(x)(U(x)G(x))'}{\nu} f f'' + \frac{G^2(x)U'(x)}{\nu} [1 - (f')^2] = 0.$$

Soluzioni autosimili sono possibili se e solo se i due coefficienti del secondo e terzo termine sono indipendenti da x (e quindi sono costanti). Consideriamo allora il sistema

$$\begin{cases} G(UG)' = \alpha\nu, \\ G^2U' = \beta\nu, \end{cases} \quad (11.47)$$

con α, β costanti arbitrarie. Soddisfatte le (11.47) si ottiene l'equazione di Falkner-Skan

$$f''' + \alpha f f'' + \beta [1 - (f')^2] = 0. \quad (11.48)$$

🔍 OSSERVAZIONE 11.5. – *Nonostante la presenza dei due parametri adimensionali α e β si può mostrare che il campo di velocità dipende solo dal rapporto β/α (con $\alpha \neq 0$) esattamente come la soluzione di Blasius non dipende dall'analogo parametro α nella (11.35). Infatti ponendo $G = \sqrt{\alpha}\tilde{G}$ (con $\alpha > 0$) il sistema (11.47) si riscrive*

$$\begin{cases} \tilde{G}' = \frac{1 - (\beta/\alpha)}{\tilde{G}U} \nu, \\ U' = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{\nu}{\tilde{G}^2}. \end{cases} \quad (11.49)$$

Dal sistema (11.49) si deduce la relazione

$$(\alpha - \beta) \frac{dU}{U} = \beta \frac{dG}{G}$$

per cui (posto a priori G e U positivi)

$$(\alpha - \beta) \ln U = \beta \ln G + C$$

(che vale anche nel caso $\alpha = 0$). La costante di integrazione C può essere fissata assegnando U e G in x_0 , anche se, non conoscendo tali valori non abbiamo aggiunto alcuna informazione utile al problema. Possiamo comunque scrivere

$$\left(\frac{U}{U_0}\right)^{\alpha-\beta} = \left(\frac{G}{G_0}\right)^{\beta} \quad (11.50)$$

che può essere ora utilizzata per risolvere separatamente le due equazioni differenziali del sistema (11.47). Vediamo un paio di casi particolari e il caso generale.

(a) $\beta = 0, \alpha = \frac{1}{2}$

In questo caso l'equazione di Falkner-Skan è identica all'equazione di Blasius e valgono le medesime conclusioni.

(b) $\alpha = \beta$

In questo caso $G' = 0$ per cui $\delta(x) = G(x) = \bar{\delta}$ (costante) e $U' = \alpha\nu\bar{\delta}^{-2} = A$ (costante). Pertanto, nell'ipotesi $U(0) = 0$, $U(x) = Ax$ e, per l'equazione di continuità e la condizione al contorno, $V(x) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{v}(x, y) = -Ay$. La soluzione f è mostrata nella figura 11.8. La corrente non viscosa investe

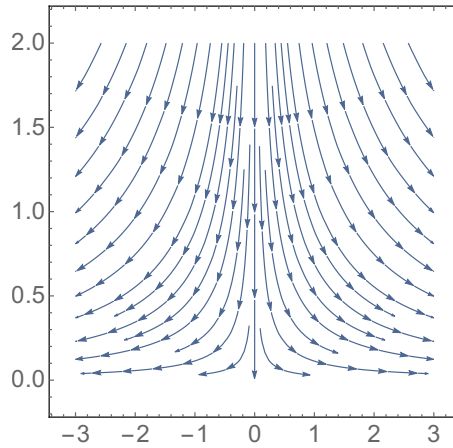


Figura 11.7. Andamento della corrente non viscosa nel caso $\alpha = \beta$: le linee di flusso del moto potenziale sono iperboli equilateri e l'origine è un punto di stagnazione.

ortogonalmente il piano $y = 0$ (idealizzazione di una lamina infinita in tutte le direzioni); il raccordo fra la soluzione “esterna” (U, V) e quella “interna” avviene alla frontiera dello strato che ha spessore costante.

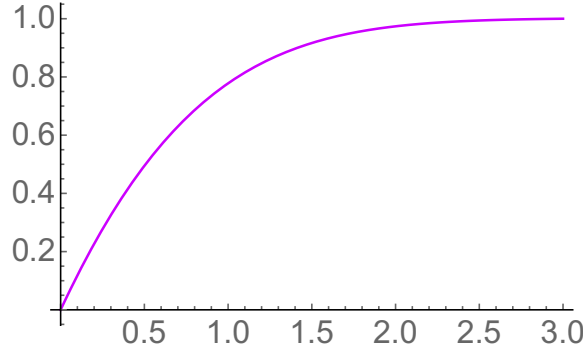


Figura 11.8. Soluzione dell'equazione di Falkner-Skan per $\alpha = \beta$.

(c) *Caso generale*

Utilizzando la (11.50) nella seconda delle (11.49) si trova

$$U^{2(\alpha-\beta)/\beta} U' = \frac{\beta \nu U_0^{2(\alpha-\beta)/\beta}}{G_0^2}.$$

Distinguiamo i casi $\alpha = \beta/2$ e $\alpha \neq \beta/2$ e integriamo per separazione di variabili: con facili passaggi si ha

$$U(x) = \begin{cases} A \exp\left(\frac{2\alpha\nu}{U_0 G_0^2} x\right), & \text{se } \alpha = \beta/2, \\ \left[(2\alpha - \beta)\nu \frac{U_0^{(2\alpha-\beta)/\beta}}{U_0 G_0^2} x + C\right]^{\beta/(2\alpha-\beta)} & \text{se } \alpha \neq \beta/2, \end{cases} \quad (11.51)$$

dove $A > 0$ e C sono costanti arbitrarie.

Per individuare una strategia di scelta per la costante d'integrazione C , consideriamo un diedro formato da due semipiani che formano un angolo γ e consideriamo il potenziale complesso

$$\mathcal{W} = Az^{\pi/\gamma},$$

dove $A \in \mathbb{R}^+$ è una costante fissata e $\gamma \in (0, \pi)$ (diedro concavo) oppure $\gamma \in (\pi, 2\pi)$ (diedro convesso). Il potenziale \mathcal{W} è olomorfo in tutto il piano, con l'eventuale eccezione dell'origine (che identifichiamo col vertice del diedro) se $\gamma > \pi$, e definisce una corrente non viscosa piana, incomprimibile e irrotazionale. Il campo di velocità ad essa associato può essere assunto come corrente “esterna” nel problema di strato limite per la geometria del diedro. Da $\mathcal{W}\phi + i\psi$ si ha

$$\psi = Ar^{\pi/\gamma} \sin\left(\frac{\pi}{\gamma}\vartheta\right),$$

per cui

$$u(r, \vartheta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = A \frac{\pi}{\gamma} r^{\pi/\gamma-1} \cos\left(\frac{\pi}{\gamma} \vartheta\right), \quad v(r, \vartheta) = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -A \frac{\pi}{\gamma} r^{\pi/\gamma-1} \sin\left(\frac{\pi}{\gamma} \vartheta\right),$$

dalle quali si deduce se $\gamma \in (0, \pi)$ allora $(u, v) \rightarrow (0, 0)$ se $r \rightarrow 0$ (il vertice del diedro è un punto di ristagno) mentre se $\gamma \in (\pi, 2\pi)$ allora $(u, v) \rightarrow (\infty, \infty)$ se $r \rightarrow 0$ (per cui il vertice del diedro è singolare). Si noti che se $\gamma = \pi$ si ottiene esattamente il campo di moto non viscoso visto nel caso (b) cioè $(u, v) = A(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$.

Torniamo ora al problema di scegliere un valore per la costante C che appare nell'equazione (11.51) che definisce la velocità orizzontale della corrente non viscosa quando $\alpha \neq \beta/2$. Possiamo scrivere, senza ledere la generalità, $U(x)$ nella forma più conveniente

$$U(x) = U_0 \left[\frac{(2\alpha - \beta)\nu}{U_0 G_0^2} (x + D) \right]^{\beta/(2\alpha - \beta)}$$

avendo ridefinito al costante arbitraria in modo ovvio. Osserviamo che la corrente esterna, sulle pareti e in prossimità dello spigolo ha il valore

$$u(r, 0) = \frac{A\pi}{\gamma} r^{\pi/\gamma-1}, \quad u(r, \gamma) = -\frac{A\pi}{\gamma} r^{\pi/\gamma-1}.$$

Dal confronto fra $U(x)$ e $u(r, \dots)$ appare evidente che il campo di velocità richiesto dalla condizione di similarità coincide, in forma, con la componente radiale dalla corrente irrotazionale non viscosa che lambisce il diedro. Ciò suggerisce di porre $D = 0$ e quindi che

$$U(x) = U_0 \left[\frac{(2\alpha - \beta)\nu}{U_0 G_0^2} x \right]^{\beta/(2\alpha - \beta)}$$

A questo punto possiamo eguagliare l'esponente di x e quello di r

$$\frac{\beta}{2\alpha - \beta} = \frac{\pi}{\gamma} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \frac{\pi}{2} \left(2 - \frac{\beta}{\alpha} \right).$$

Una volta determinata $U(x)$ possiamo valutare lo spessore $G(x)$:

$$G(x) = G_0 \left[\frac{U(x)}{U_0} \right]^{(\alpha - \beta)/\beta} = G_0 \left[\frac{(2\alpha - \beta)\nu}{U_0 G_0^2} x \right]^{(\alpha - \beta)/(2\alpha - \beta)}.$$

A questo punto dobbiamo solo risolvere il problema al contorno per l'equazione di Falkner-Skan

$$\begin{cases} f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) + \beta \left(1 - (f'(\eta))^2 \right) = 0, \\ f(0) = f'(0) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f' = 1. \end{cases} \quad (11.52)$$

Anche in questo caso non si conoscono soluzioni analitiche del problema. La figura 11.9 mostra il profilo dello strato limite e le linee di flusso calcolate numericamente con $\beta = 0.065$.

La figura 11.10 mostra f per alcuni valori di β con α fissato.

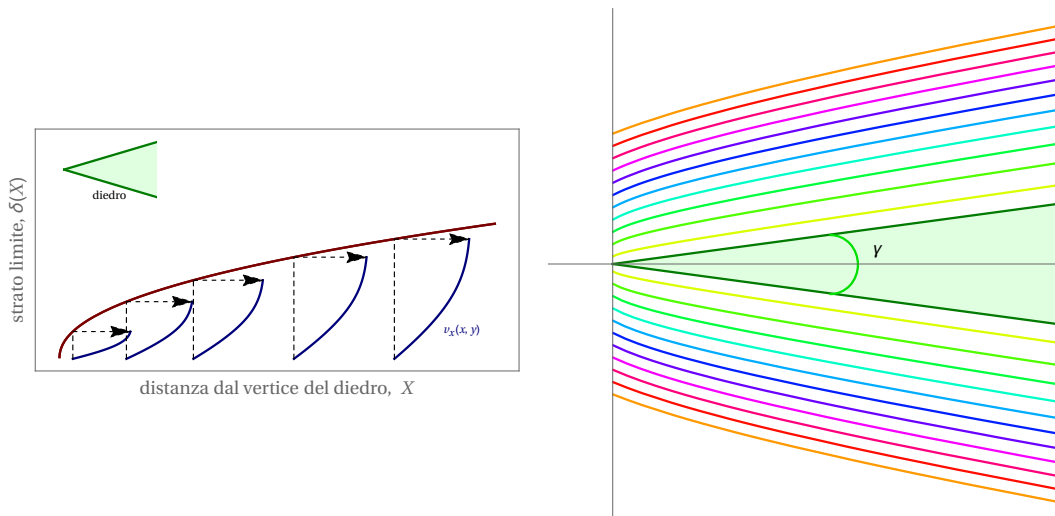


Figura 11.9. La soluzione delle equazioni di Prandtl per un diedro convesso di apertura γ

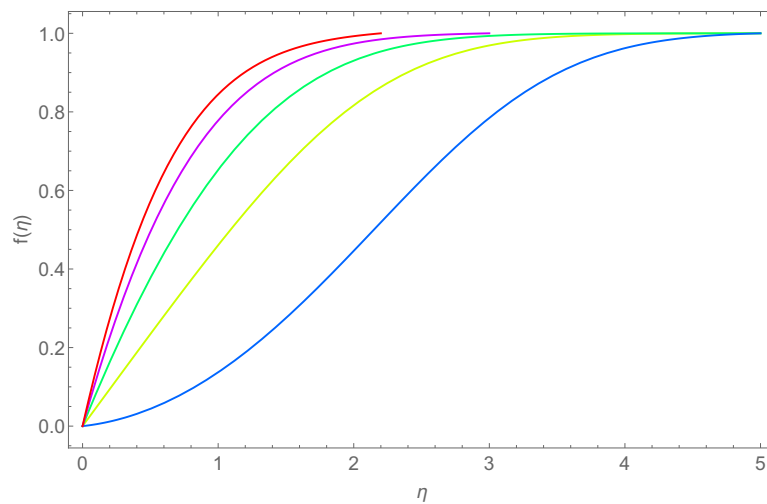


Figura 11.10. Soluzione del problema (11.52) per vari valori di β e $\alpha = 1$: Da sinistra verso destra β decresce da 1 a -0.2 .

11.7 Spessori di strato limite ed equazione di von Karman

È possibile rimuovere dalla definizione di “spessore” dello strato limite l’arbitrarietà legata alla scelta del valore ξ nella relazione (11.39). Le tre definizioni che ora proporremo sono determinate dal “trasporto”, associato al moto del fluido nello strato limite, di tre diverse grandezze fisiche: la

massa, la quantità di moto e l'energia cinetica.

Spessore di spostamento $\delta_1(x)$

Consideriamo due correnti, una viscosa con velocità $u(x, y)$ e una non viscosa con velocità $U(x)$, che lambiscono la medesima parete $y = 0$ e tali che ad una certa distanza $y = h(x)$ da $y = 0$ sia

$$u(x, h(x)) = U(x). \quad (11.53)$$

Sia poi

$$\Delta F_M \stackrel{\text{def}}{=} \varrho \int_0^{h(x)} [U(x) - u(x, y)] dy$$

il “deficit” di trasporto massa del flusso viscoso rispetto a quello non viscoso. Visivamente il deficit

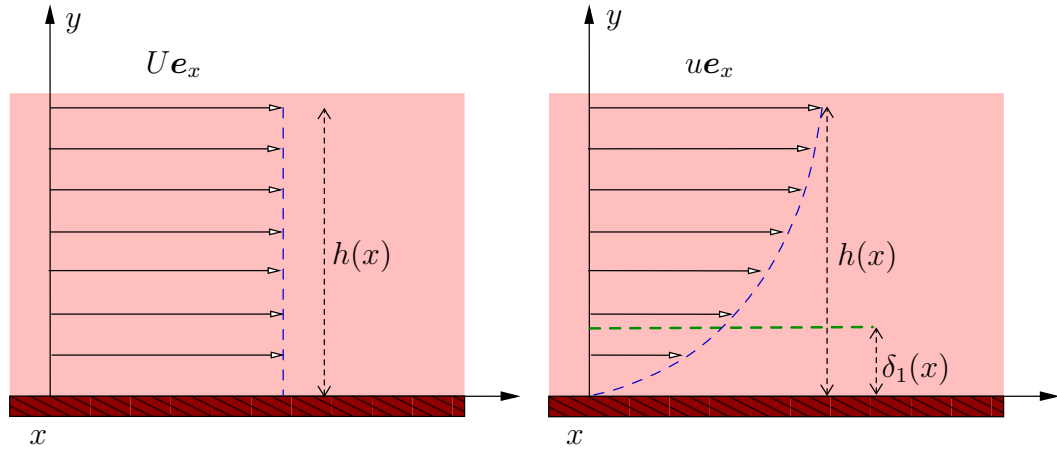


Figura 11.11. Significato dello spessore di spostamento $\delta_1(x)$.

di massa trasportata si manifesta con un “allontanamento” delle linee di flusso corrispondenti alla corrente non viscosa dal bordo della parete. Dal punto di vista della corrente esterna questo allontanamento appare come dovuto ad un “ispessimento” della parete. Vogliamo quindi dare una misura di tale ispessimento in direzione ortogonale alla parete: poiché U è generalmente funzione di x tale è anche questa misura. Osserviamo innanzitutto che $\Delta F_M > 0$; quindi, a condizione di scegliere un valore $0 < \delta_1(x) < h(x)$ opportuno (teorema della media integrale), risulta

$$\int_0^{h(x)} u(x, y) dy = \int_{\delta_1(x)}^{h(x)} U(x) dy = \int_0^{h(x)} U(x) dy - \int_0^{\delta_1(x)} U(x) dy \quad (11.54)$$

e quindi

$$\int_0^{h(x)} u(x, y) dy + \int_0^{\delta_1(x)} U(x) dy = \int_0^{h(x)} U(x) dy. \quad (11.55)$$

Ma U dipende solo da x per cui, tenendo anche conto della (11.53), la (11.55) implica

$$\delta_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \left[1 - \frac{u(x, y)}{U(x)} \right] dy, \quad (11.56)$$

detto *spessore di spostamento* dello strato limite. Conseguentemente

$$\Delta F_M = \varrho U(x) \delta_1(x).$$

Spessore di quantità di moto $\delta_2(x)$

Nelle stesse ipotesi del paragrafo precedente consideriamo trasporto di quantità di moto (definita come il prodotto della densità di massa per la velocità) e definiamo il deficit di trasporto di questa grandezza fisica: Sia poi

$$\Delta F_Q \stackrel{\text{def}}{=} \varrho \int_0^{h(x)} [U^2(x) - u^2(x, y)] dy,$$

(ovviamente strettamente positivo) che possiamo riscrivere

$$\Delta F_Q \stackrel{\text{def}}{=} \varrho U(x) \int_0^{h(x)} [U(x) - u(x, y)] dy + \varrho \int_0^{h(x)} [U(x) - u(x, y)] dy.$$

Utilizzando la (11.56) si trova

$$\Delta F_Q = \varrho U^2(x) \delta_1(x) + \varrho U^2(x) \int_0^{h(x)} \left[1 - \frac{u(x, y)}{U(x)} \right] \frac{u(x, y)}{U(x)} dy.$$

Definiamo *spessore di quantità di moto* la funzione

$$\delta_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \left[1 - \frac{u(x, y)}{U(x)} \right] \frac{u(x, y)}{U(x)} dy. \quad (11.57)$$

Conseguentemente

$$\Delta F_Q = \varrho U^2(x) [\delta_1(x) + \delta_2(x)],$$

da cui si comprende che $\delta_2(x)$ è più un termine correttivo di $\delta_1(x)$ che non una stima dello spessore effettivo dello strato limite. Vedremo che anche la successiva definizione di spessore ha la medesima caratteristica di termine correttivo.

Spessore di energia cinetica $\delta_3(x)$

Consideriamo l'energia cinetica (a meno del fattore 1/2) trasportata dalle due correnti. Anche in questo caso si ha un deficit positivo

$$\Delta F_E \stackrel{\text{def}}{=} \varrho \int_0^{h(x)} [U^3(x) - u^3(x, y)] dy,$$

che con semplici manipolazioni algebriche possiamo riscrivere nella forma

$$\Delta F_E = \varrho U^3(x) \delta_1(x) + \varrho U^3(x) \int_0^{h(x)} \left[1 - \left(\frac{u(x, y)}{U(x)} \right)^2 \right] \frac{u(x, y)}{U(x)} dy.$$

Definiamo *spessore di energia cinetica* la funzione

$$\delta_3(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \left[1 - \left(\frac{u(x, y)}{U(x)} \right)^2 \right] \frac{u(x, y)}{U(x)} dy. \quad (11.58)$$

Conseguentemente

$$\Delta F_E = \varrho U^3(x) [\delta_1(x) + \delta_3(x)].$$

Equazione di von Karman

L'utilità degli spessori $\delta_i(x)$ di strato limite, a prescindere dal loro interesse intrinseco, sta nell'equazione che ora dedurremo. Integriamo su $(0, h(x))$ l'equazione di Prandtl (in forma dimensionale) con x fissato¹⁵:

$$\int_0^{h(x)} \left[-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - U(x)U'(x) \right] dy = 0. \quad (11.59)$$

Dall'equazione di continuità segue

$$v(x, y) = - \int_0^y \frac{\partial u(x, \xi)}{\partial x} d\xi + \underbrace{v(0, y)}_{=0}.$$

Ora integriamo per parti il terzo termine nella (11.59): considerate le condizioni al contorno per u nello strato, si ha

$$\int_0^{h(x)} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = - \int_0^{h(x)} \left[\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} d\xi \right] \frac{\partial u}{\partial y} dy = -U(x) \int_0^{h(x)} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{h(x)} u \frac{\partial u}{\partial x} dy. \quad (11.60)$$

Consideriamo ora il primo termine nella (11.59) e rammentiamo la (11.41):

$$\int_0^{h(x)} \left(\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dy = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}^{h(x)} = -\nu \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\frac{1}{\varrho} \sigma_w, \quad (11.61)$$

visto che per $y = h(x)$ la velocità u coincide con $U = U(x)$. Sostituendo nella (11.59) abbiamo allora

$$\int_0^{h(x)} \left[2u \frac{\partial u}{\partial x} - U(x)U'(x) - U(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] dy = -\frac{1}{\varrho} \sigma_w(x). \quad (11.62)$$

Aggiungendo e sottraendo $U'u$ nell'integrale, cambiando segno, dividendo tutto per U^2 e ricordando la (11.45), otteniamo

¹⁵ Come in precedenza abbiamo evitato di appesantire la notazione delle grandezze dimensionali eliminando l'apice “*”.

$$\frac{1}{U^2} \frac{d}{dx} \left\{ U^2 \underbrace{\int_0^\infty \left[1 - \frac{u}{U} \right] \frac{u}{U} dy}_{\delta_2(x)} \right\} + \frac{U'}{U} \underbrace{\int_0^\infty \left[1 - \frac{u}{U} \right] dy}_{\delta_1(x)} = \underbrace{\frac{\sigma_w}{\rho U^2}}_{C_f(x)}. \quad (11.63)$$

Posto $H(x) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_1/\delta_2$ la (11.64) si riscrive

$$\frac{d \delta_2}{dx} + [2 + H(x)] \frac{U'(x)}{U(x)} \delta_2 = \frac{C_f(x)}{2} \quad (11.64)$$

nota come *equazione di von Karman*.

La (11.64) viene spesso usata in ambito applicativo per ottenere una “stima” dello spessore reale dello strato limite. Il modo di utilizzare l’equazione (11.64) è sicuramente inusuale e sorprendente per un “non addetto ai lavori”. Infatti *si ipotizza* per $u(x, y)$ un profilo che soddisfi *unicamente* la condizione di parete $u(x, 0) = 0$ e di raccordo con la prima componente $U(x)$ (nota) del flusso non viscoso alla distanza $\delta(x)$ (incognita). Ovviamente il flusso reale $u(x, y)$ sarà diverso (ma non tanto diverso) da quello ipotizzato. In questo modo si possono calcolare δ_1, δ_2 e σ_w come funzioni di x e dei parametri liberi presenti nei profili di $u(x, y)$ e $U(x)$. Questa procedura permette di esplicitare i coefficienti dell’equazione di von Karman che assume la forma di un’equazione nell’incognita $\delta(x)$. Una volta integrata questa, si ottengono formule esplicite per δ_1, δ_2 e σ_w . Per comprendere meglio questa tecnica conviene utilizzare un caso in cui si dispone della soluzione esatta, che utilizzeremo come termine di paragone.

▲ ESEMPIO 11.2. – *Nel caso della lastra piana semi-infinita (problema di Blasius) il gradiente di pressione esterno è nullo ($U' = 0$) per cui la (11.64) si riduce a*

$$U^2 \frac{d \delta_2}{dx} = \frac{\sigma_w}{\rho}. \quad (11.65)$$

Assumendo come profilo di velocità del flusso viscoso $u(x, y)/U = y/\delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \eta(x, y)$ sono verificate sia la condizione $u = 0$ per $y = 0$ che $u = U$ per $y = \delta(x)$. Dalle definizioni di δ_i e σ_w segue

$$\delta_1(x) = \int_0^1 \eta(1 - \eta) d\eta = \frac{\delta(x)}{2}, \quad \delta_2(x) = \int_0^1 \eta(1 - \eta) \delta d\eta = \frac{\delta(x)}{6}, \quad \sigma_w = \mu \frac{U}{\delta(x)}. \quad (11.66)$$

Sostituendo ora nell’equazione di von Karman (11.65) si ha

$$\frac{U^2}{6} \frac{d \delta}{dx} = \nu \frac{U}{\delta} \quad (11.67)$$

che fornisce

$$\delta(x) = \sqrt{12 \frac{\nu x}{U}}. \quad (11.68)$$

Noto $\delta(x)$ possiamo procedere a ritroso e calcolare tutte le altre quantità:

$$\delta_1(x) \approx 1.732\sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \quad \delta_2(x) \approx 0.557\sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \quad \sigma_w \approx 0.288\sqrt{\frac{\varrho\mu U^3}{x}}. \quad (11.69)$$

Per una lamina finita di lunghezza L e profondità B si trova allora

$$C_f = 1.152\sqrt{\frac{\nu}{UL}}, \quad D = B \int_0^L \sigma_w(x) dx = 0.576\sqrt{\varrho\mu U^3 L}. \quad (11.70)$$

Questi valori vanno confrontati con quelli ottenuti con la soluzione esatta di Blasius: ad esempio per con i dati dell'esempio 11.1 si ha ora

$$\delta(L) \approx 5.9 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad D \approx 2 \times 10^{-2} \text{ N}.$$

Dal confronto si vede che nonostante il profilo $u/U = \eta$ sia il più semplice che si possa pensare, i valori numerici che si ottengono con l'equazione di von Karman non sono troppo dissimili da quelli esatti. Usando profili più sofisticati (funzioni cubiche, continue a tratti ecc.) si ottengono valori ancora più prossimi a quelli esatti. Se il contorno del corpo non è di forma semplice, se il gradiente di pressione esterno non è nullo o se il profilo non auto-simile, la procedura di soluzione rimane concettualmente identica ma si complica notevolmente ma alla fine si giunge comunque ad un'equazione differenziale ordinaria per $\delta(x)$ da cui si ricavano tutte le grandezze d'interesse applicativo.

▲ ESEMPIO 11.3. – Nelle stesse ipotesi dell'esempio precedente, proviamo a ipotizzare un profilo di u più sofisticato di quello lineare: sia

$$\frac{u(y)}{U} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right), & y \in [0, \delta), \\ 1, & y \geq \delta. \end{cases}$$

con U costante. Procedendo come in precedenza si trova

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{280}{13} \frac{\nu x}{U}}, \quad \delta_2(x) = \frac{39}{280}\delta(x), \quad \sigma_w = \sqrt{\frac{117\varrho\mu U^3}{1120}} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Con i valori dell'esempio 11.1 abbiamo ora

$$\delta(L) \approx 1.59 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad D \approx 3.7 \times 10^{-2} \text{ N}.$$