# FLUIDI IDEALI INCOMPRIMIBILI

Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ (oppure $D \subset \mathbb{R}^2$) un dominio spaziale in cui si trova il fluido.

$\underline{x} = (x, y, z)$ denota un punto di $D$.

$t$ tempo

$\underline{u} = u(\underline{x}, t)$ velocità delle particelle del fluido che si trovano in $\underline{x}$ al tempo $t$.

$\underline{u}$ viene anche detto CAMPO DI VELOCITA' o CAMPO EULERIANO di VELOCITÀ.

$\rho(\underline{x}, t)$ denota la densità di massa.

Se $W \subset D$ $\quad m(W,t) = \int_W \rho(\underline{x}, t)\, d^3\underline{x}$ massa di fluido contenuta in $W$ al tempo $t$

Si assume che $u$ e $\rho$ (e altre quantità che saranno introdotte nel seguito) sono funzioni sufficientemente regolari sì che le usuali operazioni di derivazione ect sono definite.

OSSERVAZIONE

L'assunzione che $\rho$ esista equivale alla cosiddetta assunzione del continuo. Chiaramente è falsa nel momento in cui si vuol tener conto della struttura molecolare del fluido. Tuttavia per la maggior parte dei fenomeni macroscopici cui siamo interessati è ritenuta estremamente accurata.

La derivazione delle equazioni che regolano la meccanica dei fluidi si basa su queste assunzioni:

1) Conservazione della massa.

2) Conservazione del momento (seconda legge di Newton).

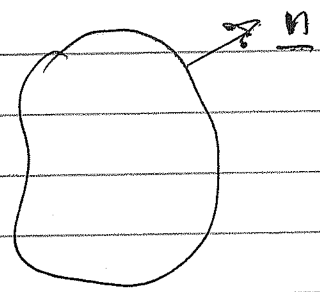
3) Equazione costitutiva

CONSERVAZIONE DELLA MASSA.

$W \subset D$ $\quad W$ sia fissa

$$\frac{d\,m(W,t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_W \rho(\underline{x},t)\,d^3x = \int_W \frac{\partial\rho}{\partial t}\,d^3x .$$

$\partial W$ denota la frontiera di $W$



Conservazione della massa.

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_W \rho(\underline{x},t)\,d^3x}_{\frac{d\,m(W,t)}{dt}} = \underbrace{-\int_{\partial W} \rho\underline{u}\cdot\underline{n}\,ds}_{\text{flusso di massa che entra o esce da } W.}$$

Applicando il teorema della divergenza

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d^3\underline{x} = -\int_W \nabla\cdot(\rho\underline{u})\, d^3x$$

siccome tale relazione vale $\forall\, W \subset D$ si ha

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\underline{u}) = 0 .$$

OSSERVAZIONE.

Formulazione integrale della conservazione della massa

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d^3\underline{x} = -\int_{\partial W} \rho\underline{u}\cdot\underline{n}\, dS \qquad \forall\, W \subset D$$

Formulazione locale $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\underline{u}) = 0.$

ESERCIZIO 1

Cosa cambia se $W$ non è fisso $W = W(t)$ e $\partial W$ si muove con velocità $\underline{w}$

BILANCIO DI MOMENTO

Supponiamo di individuare le particelle del fluido con l'"indice continuo" $\underline{\xi} \in D_0$

$$\underline{x} : D_0 \longrightarrow D$$

$$\underline{\xi} \overset{\underline{x}}{\longmapsto} \underline{x}(\underline{\xi}, t)$$ posizione che la particella $\underline{\xi}$ occupa al tempo $t$.

Assunzione fondamentale $\underline{x}(\underline{\xi},t)$ è INVERTIBILE $\forall\,\underline{\xi}$ e $\forall\,t$. Si può dunque scrivere

$$\underline{\xi} = \underline{\xi}(\underline{x},t).$$

$$\underline{\dot{x}}(\underline{\xi},t) = \frac{d\underline{x}(\underline{\xi},t)}{dt}$$ campo di velocità Lagrangiano

$$\underline{u}(\underline{x},t) = \left.\frac{d\underline{x}(\underline{\xi},t)}{dt}\right|_{\underline{\xi}=\underline{\xi}(\underline{x},t)}$$ campo di velocità Euleriano

$$\underline{a}(\underline{\xi},t) = \underline{\ddot{x}}(\underline{\xi},t)$$ accelerazione Lagrangiana

~~osserviamo che~~

$$\underline{a}(\underline{\xi},t) = \frac{d\underline{u}}{dt}\left(\underline{x}(\underline{\xi},t);t\right) =$$

$$= \frac{\partial \underline{u}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}$$

ma se adesso ritorniamo alle variabili $x, y, z$

$$\underline{a}\left(\underline{\xi}(\underline{x},t);t\right) = u_x\frac{\partial \underline{u}}{\partial x} + u_y\frac{\partial \underline{u}}{\partial y} + u_z\frac{\partial \underline{u}}{\partial z} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}$$

$$= (\underline{u}\cdot\nabla)\,\underline{u} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}.$$

Quindi

$$a(\underline{x},t) = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u}\circ\nabla\underline{u}$$

<u>DEF.</u> Si definisce derivata materiale di una qualsiasi grandezza $f(\underline{x},t)$

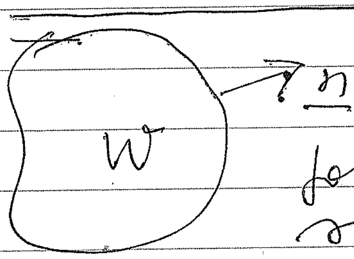
$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{u}\circ\nabla f$$

<u>DEF.</u>

Un fluido si dice <u>IDEALE</u> se la forza esercitata dal fluido su ogni superficie unitaria in qualsiasi condizione di moto è <u>ORTOGONALE</u> alla superficie stessa.

$$\overline{\overline{\Pi}} = -p(\underline{x},t)\,\overline{\overline{I}}$$ tensore degli stress di Cauchy

<u>OSSERVAZIONE</u> (sul segno di $p$).




forza agente su W $= \displaystyle\int_{\partial W} \overline{\overline{\Pi}}\,\underline{n}\,ds =$

$$= \int_{\partial W} -p\,\underline{n}\,ds = -\oint p\,\underline{n}\,ds.$$

Se $p > 0 \Rightarrow$ Forza di compressione

Se $p < 0 \Rightarrow$ Forza di trazione.

OSSERVAZIONE

L'assenza di forze di taglio implica che in nessun modo la rotazione di un fluido ideale può essere indotta o arrestata. Questo contraddice l'esperienza quotidiana. Tuttavia il fluido ideale altro non è che una definizione matematica.

Torniamo a W.C.D.

$$\underline{F}_W = -\int_{\partial W} p\,\underline{n}\,dS = \int_{\partial W} (-p\,\underline{\underline{I}})\,\underline{n}\,dS =$$

$$= \int_W \nabla\cdot(-p\,\underline{\underline{I}})\,d^3x = \int_W -\nabla p\,d^3x$$

Dim.

$$\underline{e}_x\cdot\underline{F}_W = -\int_{\partial W} (p\,\underline{e}_x)\cdot\underline{n}\,dS =$$

$$= -\int_W \nabla\cdot[p\,\underline{e}_x]\,d^3x = -\int_W \frac{\partial p}{\partial x}\,d^3x$$

Analogamente

$$\underline{e}_y\cdot\underline{F}_W = -\int_W \frac{\partial p}{\partial y}\,d^3x$$

$$\underline{e}_z\cdot\underline{F}_W = -\int_W \frac{\partial p}{\partial z}\,d^3x$$

$$\Longrightarrow \underline{F}_W = -\int_W \nabla p\,d^3x.$$

**Def.**

$\underline{b}(\underline{x},t)$ densità di forze per unità di massa non dovute all'azione del fluido

$$\underline{B}_W = \int_W \rho \, \underline{b} \, d^3x$$

Seconda legge di Newton. Si considera $W$ fisso

$$\int_W \rho \, \underline{a}(\underline{x},t) \, d^3\underline{x} = -\int_{\partial W} p \, \underline{n} \, dS + \int_W \rho \, \underline{b} \, d^3x$$

$$\underline{a} \to \frac{D\underline{u}}{Dt}$$

$$\int_W \rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\int_W \nabla p \, d^3x + \int \rho \, \underline{b} \, d^3x .$$

Abbiamo dunque (dall'arbitrarietà di $W$).

$$\boxed{\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \, \underline{b}}$$

Equazione di bilancio del momento

Nel caso di fluidi perfetti si dice anche equazione di Eulero. Una forma equivalente è

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} \right) = -\nabla p + \rho \, \underline{b}$$

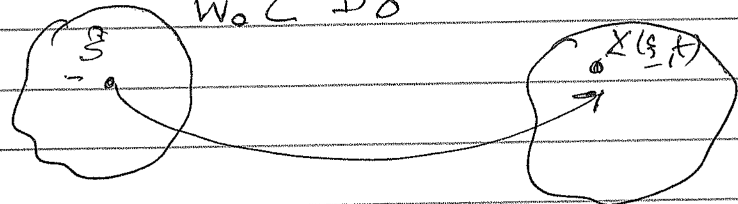
# IL TEOREMA DEL TRASPORTO DI REYNOLDS

Riprendiamo il discorso sulle coordinate materiali e quelle euleriane

$\underline{\xi}$ coordinate materiale $\qquad$ $\underline{x}$ coordinate spaziale (o euleriane).

$$\underline{\xi} \in D_0 \quad \xleftrightarrow{\text{MAPPA 1 A 1}} \quad \underline{x} \in D . \qquad \underline{x} = \underline{x}(\underline{\xi},t) \qquad \underline{\xi} = \underline{\xi}(\underline{x},t)$$

$W_0 \subset D_0$




$W_t \subset D$

$W_0$ è un dominio materiale. Vediamo la conservazione della massa.

$$M(W_0) = \int_{W_0} \rho(\underline{\xi},t)\, d^3\underline{\xi}$$

$$M(W_t) = \int_{W_t} \rho(\underline{x},t)\, d^3\underline{x}$$

$$\frac{dM(W_t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho(\underline{x},t)\, d^3\underline{x} =$$

CAMBIO DI VARIABILE

$$= \frac{d}{dt} \int_{W_0} \rho(\underline{x}(\underline{\xi},t))\, J(\underline{\xi},t)\, d^3\underline{\xi}$$

dove $J = \det\left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\xi}}\right)$ determinante Jacobiano.

## LEMMA

$$\frac{dJ}{dt} = J\, \nabla \cdot \underline{u}$$

Dim.

Facciamo la dimostrazione in $\mathbb{R}^2$ per semplicità.

$$\underline{x} = (x, y) \qquad \underline{\xi} = (\xi, \eta)$$

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{\xi}) \Rightarrow \quad x = (x(\xi, \eta); y(\xi, \eta))$$

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\frac{\partial x}{\partial \eta} -$$

$$- \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)$$

Ove $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x(\xi, \eta, t)}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi} =$

$$\left\{ \begin{aligned} &\underline{u}(x, y) = \\ &= (\dot{x}(x,y), \dot{y}(x,y)) \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi} u_x(x(\xi, \eta); y(\xi, \eta), t)$$

$$= \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

Stessa cosa si fa con gli altri

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

Mettendo tutto insieme si ha

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial u_x}{\partial x} J + \frac{\partial u_y}{\partial y} J = \nabla \cdot \underline{u} \; J.$$

$\square$

Abbiamo quindi

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \, d^3x = \frac{d}{dt} \int_{W_0} \rho J \, d^3\underline{\xi} =$$

$$= \int_{W_0} \left( \frac{d\rho}{dt} J + \rho J \nabla \cdot \underline{u} \right) d^3\underline{\xi} =$$

$$= \int_{W_0} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \underline{u} \right) J \, d^3\underline{\xi} =$$ si cambiano variabili ritornando da $\underline{\xi}$ a $\underline{x}$

$$= \int_{W_t} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \underline{u} \right) d^3x.$$

Da cui, essendo $W_t$ arbitrario,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \underline{u} =$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0.$$

OSSERVAZIONE

1. Se $\rho \doteq \text{cost} \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \underline{u} = 0$

condizione di fluido meccanicamente incomprimibile.

Sono possibili due definizioni di densità.

(2) $\rho_L(\underline{\xi},t)$ densità lagrangiana $= \dfrac{\Delta M}{W_0}$

$\rho(\underline{x},t)$ densità euleriana $= \dfrac{\Delta M}{W_t}$

ove $W_t = J\, W_0$

$$\left(\frac{\Delta M}{W_t}\right) = \frac{\Delta M}{J\, W_0} = \frac{1}{J}\left(\frac{\Delta M}{W_0}\right) \Longrightarrow \rho(\underline{x},t) = \frac{1}{J}\,\rho_L(\underline{\xi},t)$$

$$\rho_L = J\,\rho$$

(3) Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- il fluido è meccanicamente incomprimibile
- $\nabla \cdot \underline{u} = 0$
- $J \equiv 1 \iff W_0 \equiv W_t \quad \forall t.$

Vediamo il teorema del trasporto di Reynolds.

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho f\, d^3\underline{x} = \int_{W_t} \rho \frac{Df}{Dt}\, d^3\underline{x}$$

Dim.

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho f\, d^3\underline{x} = \int_{W_t}\left(\frac{D(\rho f)}{Dt} + \rho f\, \nabla\cdot\underline{u}\right) d^3\underline{x} =$$

$$= \int_{W_t}\left[\rho\frac{Df}{Dt} + f\underbrace{\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\nabla\cdot\underline{u}\right)}_{=0}\right] d^3\underline{x} = \int_{W_t} \rho\frac{Df}{Dt}\, d^3\underline{x}$$

Vale anche il seguente risultato

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} f \, d^3\underline{x} = \int_{W_t}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla\cdot f\underline{u}\right) d^3\underline{x}$$

Dim.

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} f \, d^3\underline{x} = \int_{W_t}\left(\frac{Df}{Dt} + f\,\nabla\cdot\underline{u}\right) d^3\underline{x} =$$

$$= \int_{W_t}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \underbrace{\underline{u}\cdot\nabla f + f\,\nabla\cdot\underline{u}}_{\nabla\cdot(f\underline{u})}\right) d^3\underline{x}$$

# LINEE DI FLUSSO

Sia dato il campo di velocità $\underline{u}(\underline{x},t)$. Da esso si definiscono:

① Traiettorie delle particelle

Sia $\underline{\xi} \in D_0$ coordinate Lagrangiane

$\underline{x}(\underline{\xi},t) : D_0 \longrightarrow D$

La traiettoria seguita dalla particella $\underline{\xi}$ è la curva definita

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{dt} = \underline{u}(\underline{x}(\underline{\xi},t);t) \\ \underline{x}\big|_{t=0} = \underline{\xi} \end{cases}$$

② Linee di flusso

Fissato il tempo $t$ le linee di flusso sono le linee di campo del campo di velocità $\underline{u}$, ovvero le linee che, istante per istante, sono tangenti ad $\underline{u}$

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{x}}{ds} = \underline{u}(\underline{x}(s);t) \\ \underline{x}\big|_{s=0} = \underline{x}_0 \end{cases}$$

Equazione della linea di flusso che "fuoriesce" dal punto $\underline{x}_0$.

## OSSERVAZIONE

Se il campo di velocità è stazionario $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = 0$, linee di flusso e traiettorie delle particelle coincidono. Infatti riscriviamo le due definizione

$$\begin{cases} \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{u}(\underline{x}(\underline{\xi},t)) \\ \underline{x}\big|_{t=0} = \underline{\xi} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{d\underline{x}}{ds} = \underline{u}(\underline{x}(s,\underline{x}_0)) \\ \underline{x}\big|_{s=0} = \underline{x}_0 \end{cases}$$

sono esattamente le stesse definizione se si cambia $s$ con $t$ e $\underline{x}_0$ con $\underline{\xi}$.

# ANALISI LOCALE DEL CAMPO DI VELOCITÀ EULERIANO

Consideriamo $\underline{u}(\underline{x},t)$. Fissiamo $\underline{x} \in D$ e prendiamo $\underline{y} \in D$. Grazie alle ipotesi di regolarità fatte potremo scrivere

$$\underline{u}(\underline{y},t) = \underline{u}(\underline{x},t) + \nabla \underline{u}(\underline{x},t)(\underline{y}-\underline{x}) + o(|\underline{y}-\underline{x}|)$$

Ora denotato con $\mathbb{L}(\underline{x},t) = \nabla \underline{u}(\underline{x},t)$ potremo sempre scrivere

$$\mathbb{L}(\underline{x},t) = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbb{L} + \mathbb{L}^T)}_{\mathbb{D}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbb{L} - \mathbb{L}^T)}_{\Omega}$$

$\mathbb{D}$ : tensore velocità di deformazione (simmetrico)

$\Omega$ : tensore di vortice (antisimmetrico)

Quindi se $|\underline{x}-\underline{y}|$ è piccolo

$$\underline{u}(\underline{y},t) = \underline{u}(\underline{x},t) + \mathbb{D}(\underline{y}-\underline{x}) + \Omega(\underline{y}-\underline{x})$$

Ora

$$\Omega = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi al tensore $\Omega$ possiamo associare il vettore $\frac{1}{2}\nabla\wedge\underline{u}(\underline{x},t)$.

$$\Omega \longrightarrow \frac{1}{2}\nabla\wedge\underline{u}(\underline{x},t)$$

Si definisce <u>VORTICITÀ</u>

$$\underline{\omega}(\underline{x},t) = \nabla\wedge\underline{u}(x,t).$$

Abbiamo quindi

$$\underline{u}(\underline{y},t) = \underline{u}(\underline{x},t) + \frac{1}{2}\underline{\omega}\wedge(\underline{y}-\underline{x}) + \mathbb{D}(\underline{y}-\underline{x}) + \\ + o|\underline{y}-\underline{x}|.$$

I primi due termini rappresentano la velocità del corpo rigido. Quindi $\nabla\wedge\underline{u}$ può essere visto come la velocità angolare delle particelle fluide.

Vediamo il significato di $\mathbb{D}$. $\mathbb{D}$ è simmetrica quindi, fissati $\underline{x}$ e $t$, ammette 3 autodirezioni $e_1, e_2, e_3$ fra loro ortogonali. In tale base $\mathbb{D}$ assume la forma

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

Quindi, dimenticando $\frac{1}{2}\omega_a(\underline{y}-\underline{x})$ e $o|\underline{y}-\underline{x}|$ e supponiamo $\underline{x}$ fisso abbiamo

$$\underline{u}(\underline{y},t) = \mathbb{D}(\underline{y}-\underline{x})$$

ovvero, $\frac{d(\underline{y}-\underline{x})}{dt} = \underline{u}(\underline{y},t)$ e dunque

$$\frac{d(\underline{y}-\underline{x})}{dt} = \mathbb{D}(\underline{y}-\underline{x})$$

che scriveremo come $\frac{d\underline{h}}{dt} = \mathbb{D}\underline{h}$ se $\underline{h} = \underline{y}-\underline{x}$.

Ora nella base $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ si ha

$$\frac{d\underline{h}}{dt} = \mathbb{D}\underline{h} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dh_1}{dt} = d_1 h_1 \\ \frac{dh_2}{dt} = d_2 h_2 \\ \frac{dh_3}{dt} = d_3 h_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = h_{1,0}\, e^{d_1 t} \\ h_2 = h_{20}\, e^{d_2 t} \\ h_3 = h_{30}\, e^{d_3 t} \end{cases}$$

Quindi $d_i$ rappresenta il rate di dilatazione nella direzione $\underline{e}_i$. Quindi $\mathbb{D}$ è il tensore che descrive la deformazione.

Se $V = h_1 h_2 h_3$ rappresenta il volumetto

$$\frac{d}{dt}(h_1 h_2 h_3) = \frac{dh_1}{dt}(h_2 h_3) + h_1 \frac{dh_2}{dt} h_3 + h_1 h_2 \frac{dh_3}{dt} =$$

$$= (d_1 + d_2 + d_3)\, h_1 h_2 h_3$$

$$\frac{dV}{dt} = \operatorname{tr}\mathbb{D}\; V.$$

Ora $\mathrm{tr}\,\underline{D} = \nabla\cdot\underline{u} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \nabla\cdot\underline{v}\, V$

Se quindi $\nabla\cdot\underline{u} = 0 \Rightarrow V$ rimane invariato.

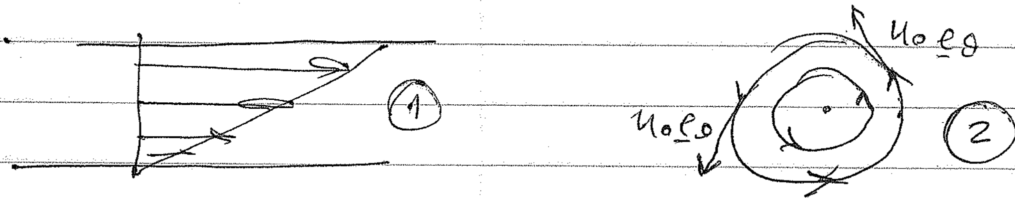
OSSERVAZIONE (sul significato fisico di $\underline{\omega}$)

Sappiamo che $\frac{1}{2}\underline{\omega} = \frac{1}{2}\nabla\wedge\underline{u}$ rappresenta la velocità angolare della particella considerata.

Il campo $\underline{\omega}$ non deve trarre in inganno. $\underline{\omega} = 0$ non implica curvatura nulla delle linee di flusso. Viceversa esistono campi di velocità con linee di flusso curve e vorticità nulla come esempio si considerano:

1) $\underline{u} = \frac{x}{\ell}\underline{e}_y \Rightarrow \underline{\omega} = \nabla\wedge\underline{u} = \frac{1}{\ell}\underline{e}_z$

2) $\underline{u} = \frac{u_0}{r}\underline{e}_\theta \Rightarrow \underline{\omega} = 0$




DEF.

Un flusso si dice irrotazionale se $\underline{\omega} \equiv 0$ $\forall\, \underline{x} \in D$.

# FLUIDI IDEALI BAROTROPICI: IL TEOREMA DI BERULLI

Riprendiamo l'eq. di Eulero

$$\frac{D\underline{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \underline{b}$$

Il fluido si dice **Barotropico** se esiste una relazione fra $p$ e $\rho$ cioè $\rho = \rho(p)$. Detta quindi

$$\mathcal{P}(p) = \int \frac{1}{\rho(p')} dp'$$

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla \mathcal{P}(p)$$

Esempio

Gas perfetto soggetto a trasformazioni isoterme

$$pV = NR\vartheta \quad ; \quad N = \frac{M}{M_{mol}} \Rightarrow \frac{pV}{M} = \frac{R}{M_{mol}}\vartheta$$

$$r = \frac{R}{M_{mol}} \Rightarrow \frac{p}{\rho} = r\vartheta \Rightarrow \rho = \frac{p}{r\vartheta}$$

Gas perfetto soggetto a trasformazioni adiabatiche

$$p = A\rho^{\gamma} \qquad \text{con } A = \text{costante}.$$

OSSERVAZIONE

Nei fluidi meccanicamente incomprimibili $\rho = \text{cost}$. Quindi $p$ è una variabile indipendente.

Le forze di massa $\underline{b}$ si diranno conservative se

$$\underline{b} = -\nabla U$$

dove $U$ è l'energia potenziale.

TEOREMA (di BERNULLI)

Si consideri un fluido ideale soggetto solo a forze conservative la cui energia potenziale è $U$.
Se il fluido è caratterizzato da un campo di velocità $\underline{u}(\underline{x})$ stazionario, allora:

1) Se il fluido è barotropico

$$\frac{1}{2}\underline{u}^2 + \mathcal{P}(p) + U$$

è costante lungo le linee di flusso

2) Se il fluido è incomprimibile (ovvero $\rho$ è costante ed uniforme)

$$\frac{1}{2}\underline{u}^2 + \frac{p}{\rho} + U = \text{cost.}$$

è costante lungo le linee di flusso.

Dim.

Siccome $\underline{u}(\underline{x})$ è stazionario linee di flusso e traiettorie delle particelle coincidono.

Si comincia con l'osservare che

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla \underline{u}^2 + (\nabla \wedge \underline{u}) \wedge \underline{u}$$

Siccome siamo in condizioni stazionarie

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = \frac{1}{2}\nabla \underline{u}^2 + (\nabla \wedge \underline{u}) \wedge \underline{u}$$

Scriviamo l'equazione di Eulero

$$\frac{1}{2}\nabla \underline{u}^2 + (\nabla \wedge \underline{u}) \wedge \underline{u} = -\nabla \mathcal{P}(p) - \nabla \mathcal{U}$$

e quindi

$$\nabla \left[ \frac{1}{2}\underline{u}^2 + \mathcal{P}(p) + \mathcal{U} \right] = -(\nabla \wedge \underline{u}) \wedge \underline{u}$$

consideriamo adesso la quantità

$$B = \frac{1}{2}\underline{u}^2 + \mathcal{P}(p) + \mathcal{U}.$$

Se mostriamo che $\frac{DB}{Dt} = 0$ allora il teorema è provato siccome linee di flusso e traiettorie coincidono.

Abbiamo

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla B = \underline{u} \cdot \nabla B$$

Ma $\nabla B = -(\nabla \wedge u) \wedge \underline{u}$ per cui

$$\frac{DB}{Dt} = -\underline{u} \cdot [(\nabla \wedge \underline{u}) \wedge \underline{u}] = 0$$

siccome $\underline{u}$ è $\perp$ a $\underline{u} \wedge (\nabla \wedge \underline{u})$.

- La generalizzazione al caso 2 è immediata.

La dimostrazione di questo teorema ci ha fatto vedere che $B = B(\underline{s})$ quindi cambia da linea di flusso a linea di flusso.

COROLLARIO

Se il campo di velocità è irrotazionale allora

$$B = \text{costante}$$

con la costante uniforme.

Dim.

Se $\underline{\omega} = 0$ in $D$ allora

$$\nabla B = -\underline{\omega} \wedge \underline{u} = 0$$

quindi $B$ non dipende né da $\underline{x}$ né da $t$.

## COROLLARIO

Se il campo di velocità è derivabile da un potenziale, cioè

$$\underline{u}(\underline{x},t) = \nabla \phi(\underline{x},t)$$

ed però non stazionario, allora

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\underline{u}^2 + \mathcal{P}(p) + \mathcal{U} = c(t).$$

Dim

Notiamo subito che se $\underline{u} = \nabla\phi \Rightarrow \nabla \wedge \underline{u} = 0$ cioè $\underline{\omega} \equiv 0$. L'equazione di Eulero diventa

$$\frac{\partial \nabla\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla u^2 + \underbrace{(\nabla \wedge \underline{u})}_{\overset{\parallel}{0}} \wedge \underline{u} = -\nabla\mathcal{P} - \nabla\mathcal{U}$$

$$\nabla\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \mathcal{P} + \mathcal{U}\right] = 0$$

da cui la quantità in parentesi non dipende da $\underline{x}$. Abbiamo dunque

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}u^2 + \mathcal{P} + \mathcal{U} = c(t).$$

# MOTI VORTICOSI DI UN FLUIDO IDEALE

Abbiamo definito irrotazionali i moti in cui $\underline{\omega} = \nabla \wedge \underline{u} \equiv 0$. Se invece in qualche parte di $D$ $\underline{\omega} \neq 0$ il moto si dice vorticoso.

Abbiamo già chiarito il significato fisico di $\underline{\omega}$

**DEF.**

Data $\gamma$ curva chiusa sufficientemente regolare si definisce circolazione di $\underline{u}$ rispetto al contorno $\gamma$

$$\Gamma(\gamma) = \oint_\gamma \underline{u} \cdot d\underline{l}$$

dove $d\underline{l} = \underline{t}\, ds$ con $\underline{t}$ versore tangente a $\gamma$ ed $s$ ascissa curvilinea

Se $\gamma \subset D$ e $S$ una qualsiasi superficie SEMPLICEMENTE CONNESSA con bordo $\gamma$ il teorema di Stokes implica

$$\oint_\gamma \underline{u} \cdot d\underline{l} = \int_S \nabla \wedge \underline{u} \cdot \underline{n}\, ds = \int_S \underline{\omega} \cdot \underline{n}\, ds$$

dove $\underline{n}$ è la normale ad $S$ selezionata con la regola della mano destra.

TEOREMA

Sia D la regione d'interesse dove si svolge il moto. Sia $\gamma \in D$ curva chiusa. Se la porzione di D racchiusa da $\gamma$ è semplicemente connesso allora se il moto è irrotazionale $\Gamma(\gamma) = 0$. Inoltre in D non possono esistere linee di flusso chiuse.

Dim.

E' sufficiente applicare il teorema di Stokes per avere la tesi. Il fatto che non esistono linee di flusso chiuse si prova per assurdo. Se $\gamma$ fosse linea di flusso chiusa allora per definizione $\underline{u} \parallel \underline{dl}$ e quindi $\oint_\gamma \underline{u}\, \underline{dl} \neq 0$ contraddicendo la tesi.

OSSERVAZIONE

Il fatto che il dominio sia semplicemente connesso è un ipotesi FONDAMENTALE. Supponiamo che $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ed il campo $\underline{u}$ è:

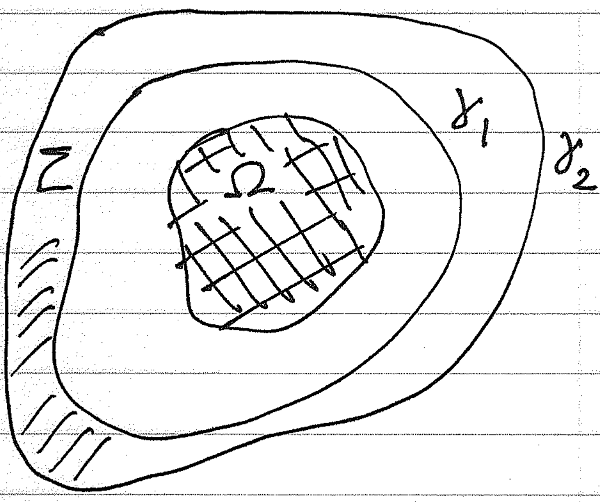
$$\underline{u} = \frac{a}{r}\underline{e}_\theta \qquad (*)$$

Ora D non è semplicemente connesso e $\nabla \wedge \underline{u} \equiv 0$ mentre se consideriamo una circonferenza di raggio R si ha

$$\oint \frac{a}{R}\,\underline{e}_\theta \cdot \underline{dl} = \int_0^{2\pi} \frac{a}{R} R\, d\theta = 2\pi a \neq 0.$$

Il campo di velocità (*) è detto <u>vortice rettilineo</u>.
Quello che abbiamo è che la circolazione attorno a tale vortice è non nulla ma è sempre la stessa: non dipende cioè dalla curva che circonda il vortice.

Questa proprietà vale in un contesto più generale. Consideriamo il flusso irrotazionale, $\underline{\omega} \equiv 0$, che avviene nel dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ rappresentato in figura ($\Omega$ è l'ostacolo).




Considerate due curve $\gamma_1$ e $\gamma_2$ che circondano l'ostacolo allora

$$\Gamma(\gamma_1) = \Gamma(\gamma_2).$$

Se infatti consideriamo la regione $\Sigma$ fra $\gamma_1$ e $\gamma_2$ abbiamo

$$0 = \int_\Sigma \underline{\omega} \cdot \underline{e}_z \, ds = \oint_{\gamma_1} \underline{u} \cdot d\underline{l} - \oint_{\gamma_2} \underline{u} \cdot d\underline{l} =$$

$$= \Gamma(\gamma_1) - \Gamma(\gamma_2)$$

dove $\underline{e}_z$ è la normale al piano $\mathbb{R}^2$.

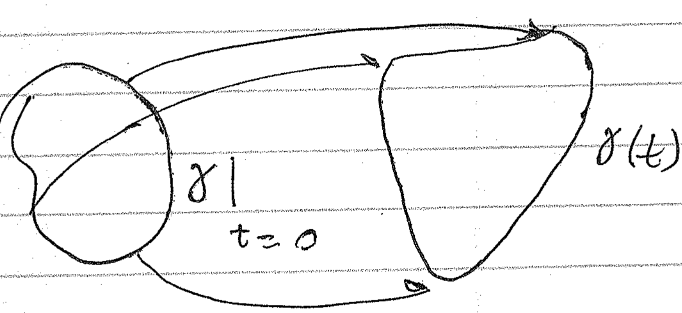
# IL TEOREMA DI KELVIN

Il seguente teorema (dimostrato nel 1869 da Thompson - lord Kelvin) ha grande importanza nella dinamica dei fluidi ideali.

TEOREMA

In un fluido ideale incomprimibile o barotropico (cioè $\rho = \text{cost.}$ oppure $p$ e $\rho$ legati dalla relazione $\frac{1}{\rho(p)} \nabla p = \nabla \mathcal{P}(p)$ con $\mathcal{P}(p) = \int \frac{dp'}{\rho(p')}$) la circolazione lungo una qualsiasi curva materiale $\gamma(t)$ semplice e chiusa è costante nel tempo.

Bisogna specificare cosa si intende per curva materiale.




Una curva materiale è una curva costituita sempre dalle stesse particelle.

Premettiamo il seguente

LEMMA

Se $\gamma(t)$ è una curva materiale

$$\frac{D\Gamma_{\gamma(t)}}{Dt} = \int_{\gamma(t)} \frac{D\underline{u}}{Dt} \cdot d\underline{l} \quad \text{dove} \quad \Gamma_{\gamma(t)} = \int_{\gamma(t)} \underline{u} \cdot d\underline{l}$$

Sia $\gamma_0$ la curva nella configurazione di riferimento. Una parametrizzazione è questa

$$\gamma_0 : s : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad s \longrightarrow \underline{\xi}(s) \Rightarrow \underline{dl}_0 = \underline{\xi}' \, ds$$

Sia inoltre

$$\begin{array}{ccc} D_0 & \longrightarrow & D \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ \underline{\xi} & \xrightarrow{\underline{x}} & \underline{x}(\underline{\xi}, t) \end{array}$$

Inoltre $\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{V}(\underline{\xi}(\underline{x}, t), t)$ con $\underline{V} \doteq \dot{\underline{x}}$

e $\underline{V}(\underline{\xi}, t) = \underline{u}(\underline{x}(\underline{\xi}, t), t)$ velocità della particella $\underline{\xi}$

Si considera la parametrizzazione della curva $\gamma_t$

$$\gamma_t : s \longrightarrow \underline{x}(s) \qquad d\underline{l} = \underline{x}' \, ds .$$

Abbiamo dunque

$$\int_{\gamma_t} \underline{w} \cdot d\underline{l} =$$

si effettua il cambiamento di variabile

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{\xi}, t)$$

e dunque

$$\underline{x}(s) \longrightarrow \underline{x}(\underline{\xi}(s); t)$$

$$d\underline{l} = \frac{d\underline{x}}{ds} ds = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\xi}} \cdot \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial s} ds = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\xi}} \underbrace{\underline{\xi}' \, ds}_{d\underline{l}_0}$$

$$\underline{u} \longrightarrow \underline{u}(\underline{x}(\underline{\xi}(s), t), t) = \underline{V}(\underline{\xi}(s), t) .$$

$$\int_{\gamma_t} \underline{u}\cdot d\underline{l} = \int_0^1 \underline{u}(\underline{x}(s),t)\cdot \underline{x}'(s)\,ds =$$

$$= \int_0^1 \underline{V}(\underline{\xi}(s),t)\,\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\xi}}\,d\underline{l}_0$$

Quindi

$$\frac{D}{Dt}\int_{\gamma_t} \underline{u}\cdot d\underline{l} = \int_0^1 \left[\frac{d\underline{V}}{dt}(\underline{\xi}(s),t)\frac{\partial \underline{x}}{\partial s} + \underline{V}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\xi}}\right)\right] d\underline{l}_0$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{d\underline{V}}{dt}\,\frac{\partial \underline{x}}{\partial s}\cdot \underbrace{\underline{\xi}'\,ds}_{d\underline{l}_0}}_{\text{si ritorna alle variabili originali}} + \underbrace{\int_0^1 \underline{V}\,\frac{\partial \underline{V}}{\partial \underline{\xi}}\,\underline{\xi}'\cdot ds}_{\underbrace{\int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}\underline{V}^2(\underline{\xi}(s),t)\right)ds}_{\text{Ora la curva è chiusa per cui}}}$$

$$\Downarrow$$

$$= \int_0^1 \frac{D\underline{u}}{Dt}\,\frac{d\underline{x}}{ds}\cdot ds$$

$$= \int_{\gamma_t} \frac{D\underline{u}}{Dt}\cdot d\underline{l}$$

$\underline{\xi}(0) = \underline{\xi}(1)$

$\Rightarrow \underline{V}^2(\underline{\xi}(0),t) = \underline{V}^2(\underline{\xi}(1),t)$

L'integrale è nullo ∎

Passiamo alla dimostrazione vera e propria del teorema di Kelvin.

Si ricordo l'equazione di Eulero nel caso di forze conservative.

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla U$$

Se il fluido è barotropico

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla \left[ \mathcal{P}(p) + U \right]$$

che vale anche se la densità è costante.
In tal caso

$$\mathcal{P}(p) = \frac{p}{\rho} \qquad \text{con } \rho = \text{costante}.$$

Allora

$$\oint_{\gamma_t} \frac{D\underline{u}}{Dt} \cdot d\underline{l} = -\oint_{\gamma_t} \nabla \left[ \mathcal{P} + U \right] \cdot d\underline{l} = 0.$$

Una formulazione equivalente del teorema di Kelvin fa ricorso al teorema di Stokes.
Infatti:

$$\int_{\gamma} \underline{u} \cdot d\underline{l} = \int_{S_\gamma} (\nabla \wedge \underline{u}) \cdot \underline{n} \, ds = \int \underline{\omega} \cdot \underline{n} \, ds$$

Quindi

$$0 = \frac{D}{Dt} \oint_{\gamma_t} \underline{u} \cdot d\underline{l} = \frac{D}{Dt} \int_{S_{\gamma_t}} \underline{\omega} \cdot \underline{n} \, dS$$

Si può pertanto affermare che il flusso di vorticità per un fluido ideale e barotropico o con densità costante attraverso superfici che abbiano come contorno una curva materiale chiusa è costante nel tempo.

Una conseguenza di tale teorema è che un fluido ideale (incomprimibile o barotropico) è irrotazionale se ciascuna delle sue particelle parte da uno stato di quiete o di moto uniforme ($\underline{u} = cost$).

# EQUAZIONE DELLA VORTICITÀ DI BELTRAMI

Consideriamo un fluido perfetto incomprimibile o barotropico, cioè:

$$\nabla \mathcal{P}(p) = \frac{1}{\rho(p)} \nabla p \iff \mathcal{P}(p) = \int \frac{1}{\rho(p)} dp$$

Se il fluido è soggetto soltanto a forze conservative allora, posto

$$\underline{\tilde{\omega}} = \frac{\underline{\omega}}{\rho} \qquad \underline{\omega} = \nabla \wedge \underline{u}$$

$\underline{\tilde{\omega}}$ soddisfa questa equazione detta equazione di Beltrami

$$\frac{D\underline{\tilde{\omega}}}{Dt} = (\underline{\tilde{\omega}} \cdot \nabla) \underline{u}$$

<u>Dim.</u> Consideriamo il caso $\rho = cost$ (fluido incomprimibile) il caso fluido barotropico è lasciato come esercizio.

L'eq. di Eulero è

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \mathcal{U} = -\nabla \left[ \frac{p}{\rho} + \mathcal{U} \right].$$

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 - \underline{u} \wedge \underline{\omega}$$

Consideriamo il rotore

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \frac{1}{2}\underbrace{\nabla \wedge \left(\nabla \underline{u}^2\right)}_{0} - \nabla \wedge \left(\underline{u} \wedge \underline{\omega}\right) = \underbrace{-\nabla \wedge \left[\frac{p}{\rho} + \mathcal{U}\right]}_{0}$$

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} = \nabla \wedge \left(\underline{u} \wedge \underline{\omega}\right)$$

Si applica la formula di analisi vettoriale

$$\nabla \wedge \left(\underline{u} \wedge \underline{\omega}\right) = \underline{u}\left(\nabla \cdot \underline{\omega}\right) - \underline{\omega}\left(\nabla \cdot \underline{u}\right) + \left(\underline{\omega} \cdot \nabla\right)\underline{u} - \left(\underline{u} \cdot \nabla\right)\underline{\omega}$$

Ora $\nabla \cdot \underline{\omega} = 0$ ed essendo il fluido incomprimibile $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ quindi

$$\nabla \wedge \left(\underline{u} \wedge \underline{\omega}\right) = -\left(\underline{u} \cdot \nabla\right)\underline{\omega} + \left(\underline{\omega} \cdot \nabla\right)\underline{u}$$

Dunque

$$\underbrace{\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \left(\underline{u} \cdot \nabla\right)\underline{\omega}}_{\frac{D\underline{\omega}}{Dt}} - \left(\underline{\omega} \cdot \nabla\right)\underline{u} = 0$$

$$\frac{D\underline{\omega}}{Dt} = \left(\underline{\omega} \cdot \nabla\right)\underline{u}$$

Nel caso di moto piano

$$\underline{u} = u_1(x,y)\,\underline{e}_x + u_2(x,y)\,\underline{e}_y$$

$$\underline{\omega} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \underline{e}_z$$

Di conseguenza $(\underline{\omega} \cdot \nabla)\,\underline{u} = 0$. L'equazione di Beltrami si riduce a

$$\frac{D\underline{\omega}}{Dt} = 0 \Rightarrow \frac{D}{Dt}\left(\frac{\underline{\omega}}{\rho}\right) = 0$$

Se il fluido è incomprimibile $\Rightarrow \frac{D\underline{\omega}}{Dt} = 0$

quindi la vorticità delle singole particelle è costante.

# VORTICITÀ IN DOMINI ILLIMITATI

Abbiamo visto che se un flusso è irrotazionale all'istante iniziale lo è sempre. Consideriamo adesso altre situazioni che garantiscono l'irrotazionalità del flusso.
Al solito si suppone di avere:
1) Fluido perfetto barotropico o incomprimibile
2) Forze conservative

## PRIMO CASO: Dominio bidimensionale illimitato.

Supponiamo che $D \subset \mathbb{R}^2$, $D$ illimitato.

Inoltre $\lim_{\underline{x} \to \infty} \underline{u} = \underline{U}_\infty$ con $\underline{U}_\infty$ costante

Evidentemente $\lim_{\underline{x} \to \infty} \underline{\omega} = 0$.

Se per semplicità assumiamo $\rho = \text{cost}$ (ma il risultato vale anche per fluidi barotropici, provarlo per esercizio) allora

$$\frac{D\underline{\omega}}{Dt} = 0 \Rightarrow \underline{\omega} = \underline{\omega}_\infty = 0.$$

Il flusso è irrotazionale ovunque.

## SECONDO CASO: Dominio tridimensionale $D \subset \mathbb{R}^3$ illimitato e condizioni stazionarie

Per semplicità supponiamo che $\rho$ sia costante e uniforme (fluido incomprimibile) ma il risultato vale anche per fluidi barotropici.

$$B = \frac{1}{2}\underline{u}^2 + \frac{P}{\rho} + U = \text{cost.}$$ che non dipende né da $\underline{x}$ né da $t$.

Equazione di Eulero in condizioni stazionarie

$$(\underline{u} \cdot \nabla)\, \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla U \qquad (*)$$

Ora abbiamo $\nabla B = 0$ e quindi

$$0 = \nabla B = \frac{1}{2} \nabla \underline{u}^2 + \frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla U =$$ si applica la $(*)$

$$= \frac{1}{2} \nabla \underline{u}^2 - (\underline{u} \cdot \nabla)\, \underline{u}$$

Si ricorda che $\frac{1}{2} \nabla \underline{u}^2 = (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u} + \underline{u} \wedge \underline{\omega}$

e quindi

$$0 = \nabla B = \frac{1}{2} \nabla \underline{u}^2 - (\underline{u} \cdot \nabla)\, \underline{u} = \underline{u} \wedge \underline{\omega}$$

Ciò implica che

$$\underline{\omega} = K\, \underline{u} \quad (**) \quad \text{con } K = K(\underline{x}).$$

Facciamo vedere che $K \equiv 0$. Considerando le (**) per $|\underline{x}| \to \infty$ si ha

$$0 = K_\infty \underline{U}_\infty$$

Siccome $\underline{U}_\infty \neq 0 \Rightarrow \lim_{|\underline{x}| \to \infty} K = 0 \Leftrightarrow K_\infty = 0.$

Facciamo vedere che $K$ non dipende da $\underline{x}$, ovvero $\nabla K = 0$.

$$0 = \nabla \cdot \underline{\omega} = \nabla \cdot (K\underline{u}) = \nabla K \cdot \underline{u} + K \underbrace{\nabla \cdot \underline{u}}_{\substack{= \\ 0}}$$

fluido incomprimibile

$$\Rightarrow \nabla K \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow \nabla K \perp \underline{u}$$

Quindi $\nabla K$ è ortogonale alle linee di flusso che sono anche ~~linee di corrente~~ traiettorie delle particelle. Le linee di flusso sono isolinee (linee di livello) della funzione $K(\underline{x})$. Ma le linee di flusso si estendono anche per $|\underline{x}| \to \infty$ dove $K = K_\infty = 0$. Quindi lungo tutte le linee di flusso $K = 0$. Se ne deduce che

$$\underline{\omega} \equiv 0 \quad \text{uniformemente.}$$

Il flusso è irrotazionale.

# MOTI POTENZIALI

Un flusso $\underline{u}$ definito in $D$ si dice POTENZIALE se esiste una funzione $\phi : D \to \mathbb{R}$ t.c. $\underline{u} = \nabla\phi$.

## PROPOSIZIONE

Se $u$ è potenziale allora $\underline{u}$ è irrotazionale ed inoltre, se il fluido è incomprimibile, $\phi$ è una funzione armonica.

Dim

se $u = \nabla\phi \Rightarrow \underline{\omega} = \nabla \wedge (\nabla\phi) = 0$. Se poi il fluido è incomprimibile allora $\nabla \cdot u = 0$ e quindi $\nabla \cdot (\nabla\phi) = \Delta\phi = 0$. da $\phi$ è armonica $\square$

## TEOREMA

Supponiamo che un fluido ideale incomprimibile con densità omogenea e soggetto solo a forze esterne la cui energia potenziale è $U$ occupi un dominio $D \subset \mathbb{R}^N$ $(N = 2, 3)$ semplicemente connesso eventualmente illimitato.
Allora la funzione $\phi : D \to \mathbb{R}$ è soluzione del problema di Neumann

$$(N) \begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{in } D \\ \left.\dfrac{\partial\phi}{\partial \underline{n}}\right|_{\partial D} = 0 & \underline{n} \text{ normale a } \partial D \\ \lim\limits_{|\underline{x}| \to \infty} \nabla\phi = \underline{U}_\infty & \text{se } D \text{ è illimitato} \end{cases}$$

se e solo se $u = \nabla\phi$ è soluzione del problema di Eulero stazionario

$$(E)\quad \begin{cases} \underline{u}\cdot\nabla\underline{u} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p - \nabla U \\ \nabla\cdot\underline{u} = 0, \quad \nabla\wedge\underline{u} = 0 \\ \underline{u}|_{\partial D}\cdot\underline{n} = 0 \qquad \underline{n} \text{ normale a } \partial D \\ \lim_{|\underline{x}|\to\infty}\underline{u} = \underline{U}_\infty \quad (\text{se } D \text{ è illimitato}) \end{cases}$$

Dim.

Supponiamo che $\phi$ sia soluzione di (N) e consideriamo $\underline{u} = \nabla\phi$. evidentemente

$\nabla\cdot\underline{u} = \Delta\phi = 0$ OK

$\nabla\wedge\underline{u} = 0$ OK

$\underline{u}|_{\partial D}\cdot\underline{n} = \nabla\phi|_{\partial D}\cdot\underline{n} = \dfrac{\partial\phi}{\partial\underline{n}}\Big|_{\partial D} = 0$ ok

$\lim_{|\underline{x}|\to\infty}\underline{u} = \lim_{|\underline{x}|\to\infty}\nabla\phi = \underline{U}_\infty$ ok.

Ci manca di far vedere che $\underline{u} = \nabla\phi$ soddisfa le $(E)_1$. Questo è OVVIO perché, dato che $\nabla\wedge\underline{u} = 0$, abbiamo

$$\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = \frac{1}{2} \nabla \underline{u}^2$$

Quindi possiamo scrivere la $(E)_1$ come

$$\nabla \left[ \frac{1}{2} \underline{u}^2 + \frac{p}{\rho} + \mathcal{U} \right] = 0$$

E' sufficiente prendere

$$\phi = -\rho \left( \mathcal{U} + \frac{1}{2} \underline{u}^2 \right)$$

con $\underline{u} = \nabla \phi$ per cui la $(E)_1$ è soddisfatta.

Supponiamo adesso che $\underline{u}$ risolva $(E)$. Siccome $\nabla \wedge \underline{u} = 0$ e $D$ è semplicemente connesso allora $\underline{u} = \nabla \phi$. Il fatto che $\phi$ soddisfi $(N)$ deriva dal fatto che $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ e dalle condizioni al contorno $(NE)_3$ ed $(E)_4$.

$\square$

La condizione $\underline{u}\big|_{\partial D} = 0$ può essere rilassata e si può considerare anche il caso in cui $\underline{u} \cdot \underline{n}\big|_{\partial D} = \chi$ ovvero $\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}}\Big|_{\partial D} = \chi$, ossia si prescrive la velocità normale sul bordo di $D$.

La questione dell'unicità è invece piuttosto complessa e dipende, in ultima analisi dalla geometria del dominio.
Diamo solo questo teorema

TEOREMA

Sia $D \subset \mathbb{R}^N$ $(N=2,3)$ semplicemente connesso e limitato. Allora il problema di Neuman

$$N: \begin{cases} \Delta\phi = 0 \\ \left.\dfrac{\partial \phi}{\partial \underline{n}}\right|_{\partial D} = \chi \end{cases}$$

ammette unica soluzione se $\int_{\partial D} \chi \, ds = 0$.

Dim.

Siccome $\Delta\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi)$ integrando su $D$ l'equazione

$$0 = \int_D \Delta\phi \, dV = \int_{\partial D} \nabla\phi \cdot \underline{n} \, ds = \int_{\partial D} \left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_{\partial D} ds =$$

$$= \int_{\partial D} \chi \, ds.$$

Supponiamo adesso che $N$ abbia due soluzioni $\phi_1$ e $\phi_2$. Consideriamo $\psi = \phi_1 - \phi_2$ e sia $\underline{q} = \nabla(\phi_1 - \phi_2)$.

$$\int_D \nabla\cdot(\psi \underline{q})\, dV = \int_D \Big(\underline{q}\cdot\nabla\psi + \psi \underbrace{\nabla\cdot\underline{q}}_{0}\Big) dV =$$

$$= \int_D \underline{q}\cdot\underline{q}\, dV = \int_D \underline{q}^2 dV$$

Del resto $\int_D \nabla\cdot(\psi \underline{q})\, dV = \int_{\partial D} \psi \underline{q}\big|_{\partial D} \cdot \underline{n}\, ds$

ove $\underline{q}\big|_{\partial D} = (\nabla\phi_1 - \nabla\phi_2)\big|_{\partial D} \cdot \underline{n} = 0$

Quindi $\int_D |\underline{q}^2|\, dV = 0 \Rightarrow \underline{q} \equiv 0.$

$\square$

L'ovvia conseguenza di tale teorema è che se $D \subset \mathbb{R}^N$ limitato semplicemente connesso esiste uno ed un solo flusso potenziale $\underline{u}$ che soddisfa

$$\begin{cases} (\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla U \\ \nabla\cdot\underline{u} = 0, \quad \nabla\wedge\underline{u} = 0 \\ \underline{u}\big|_{\partial D}\cdot\underline{n} = \chi \end{cases}$$

Tali risultati si estendono anche a domini illimitati di $\mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$

TEOREMA

Sia $D \subset \mathbb{R}^N$ illimitato semplicemente connesso. In $D$ è posto un fluido ideale incomprimibile soggetto soltanto a forze esterne la cui energia potenziale è $U$. Allora la soluzione del problema di Neumann (N) è unica.

OSSERVAZIONE

Notiamo che, dato il teorema precedente ogni soluzione di (E) è anche soluzione di (N). Dalla unicità di (N) discende quindi l'unicità di (E).

Dim (del teorema)

La tecnica di dimostrazione è analoga al precedente teorema. Si sfrutta in più il fatto che se $\phi(\underline{x})$ è soluzione di (N) allora si conosce l'andamento di $\phi(\underline{x})$ per $|\underline{x}|$ "grandi", cioè ①

$$\phi(\underline{x}) = \underline{u}_\infty \cdot \underline{x} + O(r^{-k})$$

dove $k = 2$ in $\mathbb{R}^3$ e $k = 1$ in $\mathbb{R}^2$ e, $C$ è una costante.

Si osserva adesso che

$$\nabla\phi \cdot \nabla\phi = \nabla \cdot (\phi \nabla \phi).$$

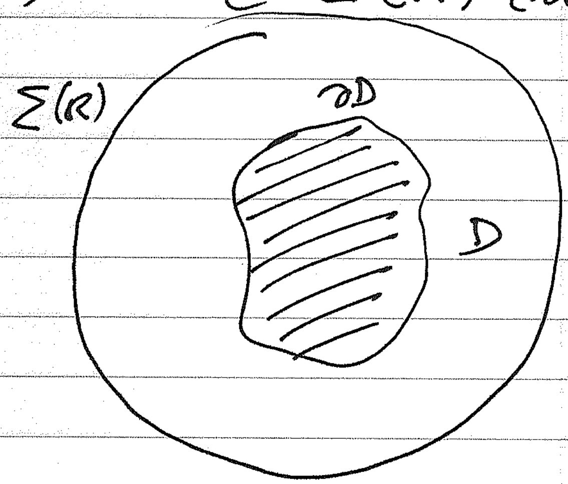
① Si ricorda che la soluzione del problema di Neumann (N) è definita a meno di una costante. Si considera nulla quindi la costante.

Supponiamo quindi che esistono due soluzioni di N, siano esse $\phi_1$ e $\phi_2$. Consideriamo

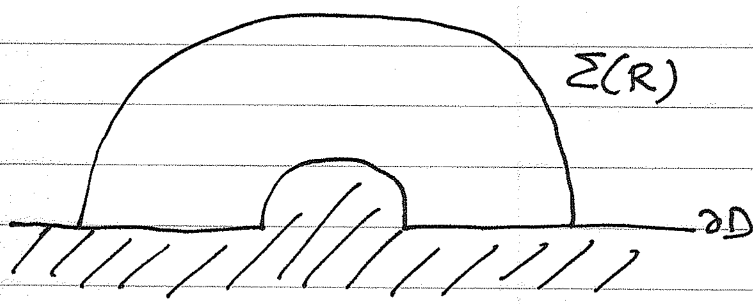
$$\psi = \phi_1 - \phi_2 .$$

Evidentemente $\left.\frac{d\psi}{dn}\right|_{\partial D} = 0$. Consideriamo adesso una sfera $\Sigma(R)$ con R sufficientemente grande. Ci sono sostanzialmente due casi

1) $\partial D$ e $\Sigma(R)$ non hanno intersezioni. In questo caso D è il dominio esterno ad un ostacolo




2) $\partial D$ e $\Sigma(R)$ hanno intersezioni




In questo caso l'ostacolo si estende all'infinito.

In entrambe i casi consideriamo la regione fra $\Sigma(R)$ e $\partial D$. Sia essa $\Omega$. Abbiamo

$$\int_\Omega |\nabla\psi|^2 dV = \int_\Omega \nabla\cdot(\psi\nabla\psi)\, dV =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \psi\nabla\psi\cdot \underline{n}\, ds = \int_{\partial\Omega} \psi \frac{d\psi}{dn}\, ds$$

Ora la parte di $\partial\Omega$ dove $\frac{d\psi}{d\underline{n}}$ è non nulla è $\Sigma(R)$, per cui

$$\int_{\Omega} |\nabla\psi|^2 dV = \int_{\Sigma(R)} \psi \frac{d\psi}{d\underline{n}} dS.$$

Calcoliamo $\frac{d\psi}{d\underline{n}}$ supponendo che $R \to \infty$.

$$\frac{d\psi}{d\underline{n}} = (\nabla\phi_1 - \nabla\phi_2) \cdot \underline{e}_r = (\underline{U}_\infty - \underline{U}_\infty) \cdot \underline{e}_r + O(r^{-k-1})$$

Quindi $\frac{d\psi}{d\underline{n}} \xrightarrow[R\to\infty]{} \begin{cases} O\left(\frac{1}{r^3}\right) & \text{in } \mathbb{R}^3 \\ O\left(\frac{1}{r^2}\right) & \text{in } \mathbb{R}^2 \end{cases}$

Inoltre

$$\psi \xrightarrow[R\to\infty]{} \begin{cases} O\left(\frac{1}{r^2}\right) & \text{in } \mathbb{R}^3 \\ O\left(\frac{1}{r}\right) & \text{in } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Quindi

$$\psi \frac{d\psi}{d\underline{n}} \xrightarrow[r\to\infty]{} \begin{cases} O\left(\frac{1}{r^5}\right) & \text{in } \mathbb{R}^3 \\ O\left(\frac{1}{r^3}\right) & \text{in } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Abbiamo dunque

$$\left| \int_{\Sigma(R)} \varphi \frac{d\varphi}{d\underline{n}} ds \right| \leq \begin{cases} M \int_{\Sigma(R)} \frac{1}{R^5} ds = M 4\pi \frac{1}{R^3} & \text{in } \mathbb{R}^3 \\ M \int_{\Sigma(R)} \frac{1}{R^3} ds = M 2\pi \frac{1}{R^2} & \text{in } \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Quindi, per $R \to \infty$, $\left| \int_{\Sigma(R)} \varphi \frac{d\varphi}{d\underline{n}} ds \right| \to \infty$.

Ma allora

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dV = 0 \implies \varphi \equiv 0,$$

e ciò prova $\phi_1 \equiv \phi_2$. $\square$

Il teorema di unicità appena dimostrato non è estendibile a moti piani (in $\mathbb{R}^2$) incomprimibili irrotazionali che si svolgono in domini non semplicemente connessi.

Avremo modo di approfondire più avanti questo punto.

# MOTI POTENZIALI IN $\mathbb{R}^2$

Sia $\underline{u} = u_1 \underline{e}_x + u_2 \underline{e}_y$ il campo di velocità piano. Si assume che:

1. $\underline{u}$ potenziale $\Rightarrow$ Esiste $\phi(x,y)$ t.c.
$$\underline{u} = \nabla \phi$$

2. stazionario $\underline{u} = \underline{u}(x,y)$

3. incomprimibile $\Rightarrow \nabla \cdot \underline{u} = 0$

L'assunzione 1 comporta $\underline{u}$ irrotazionale.

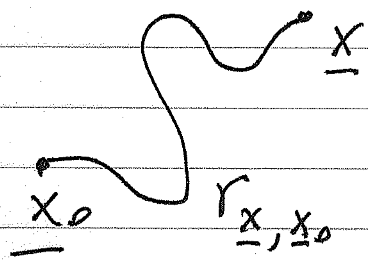
Consideriamo la forma differenziale
$$\sigma = -u_2 dx + u_1 dy$$

E' facile vedere che $\sigma$ è esatta poiché:
$$\frac{\partial(-u_2)}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

Infatti $\nabla \cdot \underline{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial(-u_2)}{\partial y}$.

Quindi fissato $\underline{x}_0 \equiv (x_0, y_0)$ arbitrario (ma fissato una volta per tutte) si introduce
$$\psi(x,y) = \int_{\gamma_{\underline{x},\underline{x}_0}} -u_2 dx + u_1 dy$$
detta FUNZIONE DI CORRENTE.

dove $\gamma_{\underline{x},\underline{x}_0}$ è una qualsiasi curva regolare a tratti che collega $\underline{x}$ e $\underline{x}_0$.




OSSERVAZIONE

Se $\gamma$ è una curva chiusa qualsiasi allora

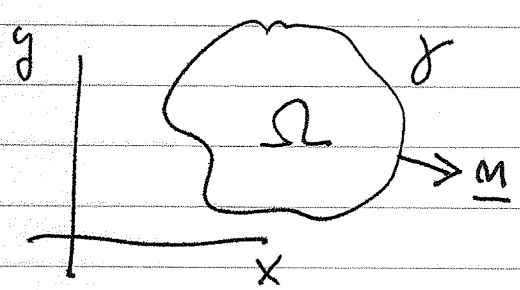
$$\oint_\gamma -u_2\, dx + u_1\, dy = 0$$

Infatti: $\oint_\gamma \sigma = \int_\Omega \nabla \cdot \underline{u}\, dx dy = 0$ con $\Omega$ regione racchiusa da $\gamma$

o meglio

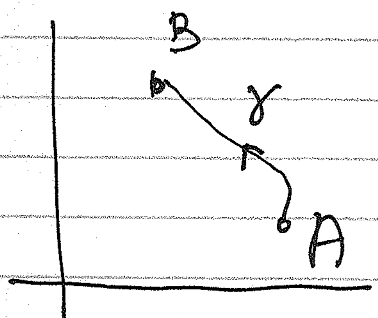
$$\oint_\gamma \sigma = \oint_\gamma \underline{u} \cdot \underline{n}\, dl = \int_\Omega \nabla \cdot \underline{u}\, dx\, dy$$

$\underline{n}$ : normale esterna



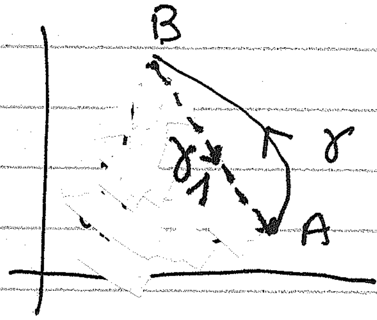
A differenza del potenziale $\phi$ (che ha problemi di definizione quando il dominio D non è semplicemente connesso) il potenziale $\psi$ è SEMPRE ben definito. Questo perché la forma differenziale $\sigma$ è ESATTA.
Per quel che riguarda $\phi$, anche se il flusso fosse irrotazionale, questo non è univocamente definito in domini non semplicemente connessi.

Concludiamo con un'osservazione sul significato fisico di $\psi$. Consideriamo una curva $\gamma$ che connette due punti A e B




$$\int_\gamma \sigma = \int_\gamma -v\,dx + u\,dy = \psi(B) - \psi(A).$$

Ora supponiamo di "chiudere" il percorso con un'altra curva $\gamma_1$ da B ad A che sia rettilinea




Abbiamo

$$0 = \int_{\gamma \cup \gamma_1} \sigma = \int_\gamma \sigma + \int_{\gamma_1} \sigma$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \sigma = -\int_{\gamma_1} \sigma$$

Ma $\int_\gamma \sigma$ si interpreta proprio come il flusso (o meglio le portate) che transita attraverso il segmento AB. Infatti

$$\int_{\gamma_1} \sigma = \int_{\gamma_1} \underline{u} \cdot \underline{n} \, dl = + \psi(A) - \psi(B).$$