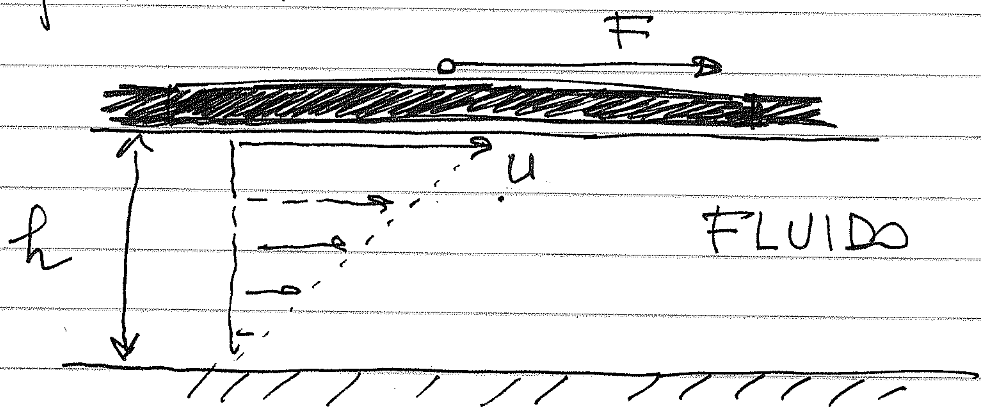
FLUIDI VISCOSI. EQUAZIONI DI NAVIER STOKES

Abbiamo visto che la caratteristica fondamentale dei fluidi ideali è quella di non ammettere sforzi di taglio in condizioni dinamiche. Vogliamo adesso definire un modello di fluido che ammette sforzi di taglio in condizioni dinamiche. La questione è dunque la seguente: quali sono i campi di velocità per cui è lecito aspettarsi sforzi di taglio?
In un fluido gli sforzi di taglio sono nulli per definizione in condizioni statiche e ciò indipendentemente dall'osservatore a cui ci si riferisce. Se dunque consideriamo un moto rigido ed un osservatore solidale con esso questi non deve misurare alcun sforzo di taglio nel fluido. Quindi gli unici moti che possono produrre uno sforzo di taglio sono quelli non rigidi. Si cerca così un'espressione del tensore degli sforzi di Cauchy di questo tipo:

$$\mathbb{T} = -p\,\mathbb{I} + \mathbb{T}_v$$

dove $\Pi_v = 0$ per ogni moto rigido del fluido.

Per quanto riguarda la forma specifica di Π_v si ricorre al seguente esperimento



Per molti fluidi (incluso l'acqua) la forza F che deve essere applicata alla superficie superiore A dello strato di fluido avente spessore h, per mantenere la superficie a velocità costante U è proporzionale a $\frac{U}{h}$, cioè

$$\frac{F}{A} \propto \frac{U}{h}$$

Ciò suggerisce che il tensore Π_v che "modellizza" le forze di taglio sia proporzionale a $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

A questo punto rileviamo le seguenti proprietà dei moti rigidi:

- La parte simmetrica del tensore $\nabla \underline{u}$, cioè

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2}\left(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T\right)$$

le cui componenti sono

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

è <u>nulla</u> per un moto rigido. Infatti $\mathbb{D}$ prende anche il nome di tensore delle velocità di deformazione, STRAIN RATE TENSOR.

- I moti rigidi sono isocorici, ovvero mantengono il volume. Di conseguenza

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0$$

per qualsiasi moto rigido.

Appare dunque naturale scegliere $\overline{\overline{\Pi}}_V$ come:

$$\overline{\overline{\Pi}}_V = 2\mu \mathbb{D} + \lambda \underbrace{(\nabla \cdot \underline{u})}_{\mathrm{Tr}\, \mathbb{D}} \overline{\overline{\mathbb{I}}}$$

I fluidi la cui equazione costitutiva è di questo tipo sono detti FLUIDI VISCOSI NEWTONIANI.

I coefficienti μ e λ sono detti VISCOSITÀ e BULK VISCOSITY.

Nel caso di fluidi incomprimibili $\nabla \cdot \underline{u} = 0$, il modello di fluido viscoso Newtoniano diventa

$$\overline{\overline{T}} = -p\,\mathbb{I} + 2\mu\,\mathbb{D}$$

Vediamo dunque come diventano in questo caso il sistema delle equazioni di moto e dell'equazione di continuità

$$\left(\frac{D\cdot}{Dt} = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + \underline{u}\cdot\nabla\cdot\right)$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{u} = 0 \\ \rho \dfrac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \underline{u} + \rho \underset{\uparrow}{\underline{b}} \end{cases}$$

forze di massa

che vengono usualmente dette EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES.
In tal caso infatti:

$$\nabla \cdot \overline{\overline{T}} = \nabla \cdot \left(-p\,\mathbb{I} + 2\mu\,\mathbb{D}\right) =$$

$$= -\nabla p + 2\mu\,\nabla \cdot (\mathbb{D})$$

$$\nabla \cdot \frac{1}{2}\left(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T\right) = \frac{1}{2}\Delta \underline{u} + \frac{1}{2}\nabla\underbrace{(\nabla \cdot \underline{u})}_{0} = \frac{1}{2}\Delta \underline{u}$$

$$2\mu\,\nabla \cdot \mathbb{D} = \mu\,\Delta \underline{u}$$

In particolare, introducendo

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

detta VISCOSITÀ CINEMATICA, il sistema di Navier-Stokes diventa

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{u} = 0 \\ \dfrac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla\left(\dfrac{p}{\rho}\right) + \nu \Delta \underline{u} + \underline{b} \end{cases}$$

$$\uparrow \ \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u}$$

ovvero un sistema di 4 equazioni nelle 4 incognite $\underline{u}$ e p.

OSSERVAZIONE

Ricordando la definizione di dissipazione intrinseca

$$\varphi_1 = \mathbb{T} \cdot \mathbb{D} - \rho\left(\frac{de}{dt} - T\frac{ds}{dt}\right)$$

ed il fatto che $\varphi_1 \geq 0$ per qualsiasi processo, otteniamo

$$\mathbb{T} \cdot \mathbb{D} = 2\mu\, \mathbb{D} \cdot \mathbb{D}$$

e di conseguenza $\mu \geq 0$.

L'equazioni di Navier-Stokes vengono usualmente scritte in forma adimensionale. Si introducono le seguenti grandezze caratteristiche:

- L scala di lunghezza caratteristica
- u_0 velocità caratteristica
- $t_0 = \frac{L}{u_0}$ tempo caratteristico, corrispondente al TEMPO DI TRANSITO
- P_0 pressione caratteristica

Adimensionalizzando, introducendo cioè

$$\tilde{x} = \frac{x}{L} \qquad \tilde{\underline{u}} = \frac{\underline{u}}{u_0} \qquad \tilde{t} = \frac{t}{t_0}$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{P_0} \qquad \tilde{\nabla} = \frac{1}{L} \nabla$$

otteniamo (non si considerano le forze di massa)

$$\begin{cases} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{u}} = 0 \\ \frac{\rho u_0}{t_0} \frac{D \tilde{\underline{u}}}{D \tilde{t}} = - \frac{P_0}{L} \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{\mu u_0}{L^2} \tilde{\Delta} \tilde{\underline{u}} \end{cases}$$

Focalizzandoci sulla seconda ed omettendo i "~" per semplicità di notazione si ottiene

$$\frac{\rho U_0^2}{L}\frac{D\underline{u}}{Dt} = -\frac{P_0}{L}\nabla p + \frac{\mu U_0}{L^2}\Delta\underline{u} \qquad (*)$$

ovvero

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = -\frac{P_0}{\rho U_0^2}\nabla p + \frac{\mu}{\rho U_0 L}\Delta\underline{u}$$

A questo punto se poniamo:

$$p_0 = \rho U_0^2$$

ed introduciamo

$$Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu}$$

detto numero di Reynolds otteniamo

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta\underline{u} \qquad (o)$$

OSSERVAZIONE

Notiamo che la (o) non è l'unica equazione adimensionalizzata che possiamo scrivere. Se infatti moltiplichiamo la $(*)$ per $\frac{L^2}{\mu U_0}$ si ottiene

$$\frac{\rho U_0 L}{\mu}\frac{D\underline{u}}{Dt} = -\frac{P_0 L}{\mu U_0}\nabla p + \Delta\underline{u}$$

Se quindi poniamo $p_0 = \frac{\mu U_0}{L}$ si ha

$$Re \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla p + \Delta \underline{u} \quad \square$$

Vediamo adesso qual'è l'interpretazione del numero di Reynolds Re. Se ripartiamo dall'equazione di moto dimensionale e adimensionalizziamo il tempo con t_c, tempo caratteristico, senza porre $t_c = \frac{L}{U_0}$, si ha

$$\frac{\rho U_0}{t_c} \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\frac{p_0}{L} \nabla p + \frac{\mu U_0}{L^2} \Delta \underline{u}$$

da cui

$$\frac{\rho L^2}{\mu t_c} \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\frac{p_0 L}{\mu U_0} \nabla p + \Delta \underline{u}$$

Se quindi poniamo $t_c = \frac{\rho L^2}{\mu}$ e $p_0 = \frac{\mu U_0}{L}$ si ha:

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla p + \Delta \underline{u}$$

Se dunque consideriamo un flusso in cui $\nabla p = 0$, per esempio il flusso di trascinamento come quello dell'esperimento, otteniamo

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = \Delta \underline{u}$$

Dunque $t_c = \frac{\rho L^2}{\mu}$ si interpreta come il tempo caratteristico della diffusione viscosa.
E' facile dunque vedere che

$$Re = \frac{t_c}{t_0} = \frac{\rho L^2}{\mu} \cdot \frac{U_0}{L} = \frac{\rho L U_0}{\mu}$$

Quindi $t_c \ll t_0 \Rightarrow Re \ll 1$

Il tempo di diffusione viscoso è molto più piccolo del tempo "inerziale". La scala di tempo dominante è quella della viscosità.

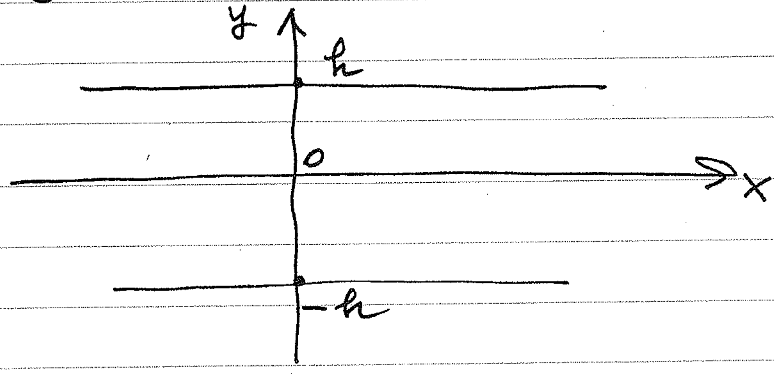
Se $t_c \gg t_0 \Rightarrow Re \gg 1$

La scala di tempo dominante è t_0, ovvero il tempo inerziale. In questo regime gli effetti viscosi sono trascurabili. In tal caso però si possono avere instabilità che conducono ad un moto caotico (TURBOLENZA).

ALCUNI MOTI STAZIONARI IN GEOMETRIE PARTICOLARI

A) Moti generati da un gradiente di pressione.

Consideriamo il moto stazionario di un fluido viscoso in una regione compresa fra due piani orizzontali



Si assume che il campo di velocità sia

$$\underline{u} = u(x,y)\,\underline{e}_x$$

Scriviamo le equazioni di Navier-Stokes in condizioni stazionarie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = u(y) \\[2ex] -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \mu \underbrace{\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}_{=\,0} = 0 \\[2ex] -\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\[2ex] -\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

perché $u = u(y)$

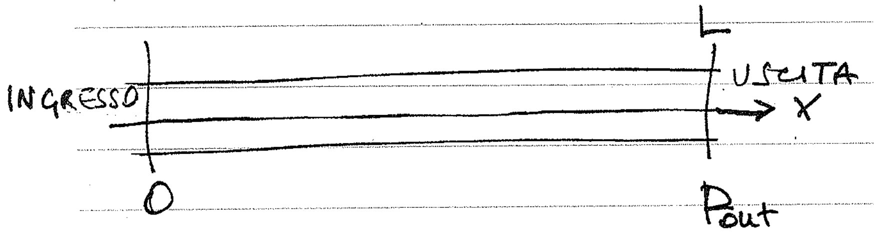
$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0,\quad -\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \Longrightarrow \quad p = p(x)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad p(x) = Ax + B$$

Dobbiamo specificare le condizioni al contorno

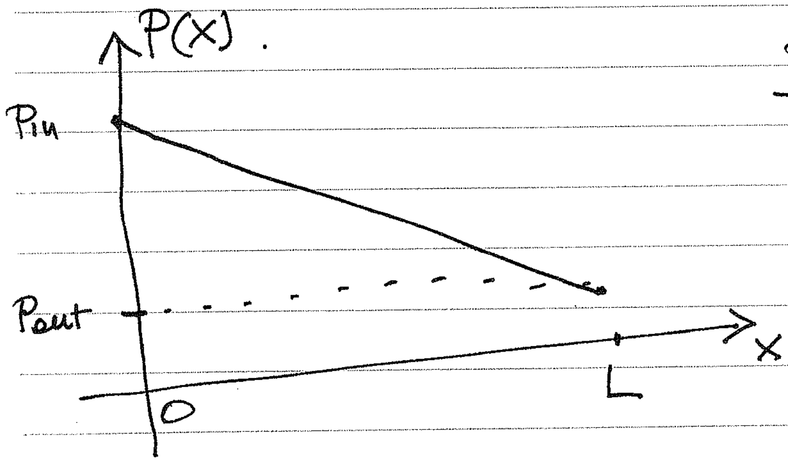
Pressione

$P_{in} \geq P_{out}$



$$\begin{cases} A \cdot 0 + B = P_{in} \\ A \cdot L + B = P_{out} \end{cases} \Rightarrow \quad A = -\frac{P_{in} - P_{out}}{L} = -\frac{\Delta P}{L} > 0 \qquad B = P_{in}$$

$$P(x) = -\frac{\Delta P}{L} x + P_{in}.$$



$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\Delta P}{L}$$

Velocità

$u(y = \pm h) = 0$ condizione di aderenza alla parete (no-slip).

$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$ condizione di simmetria sull'asse centrale.

$$u(-y) = u(y)$$

u deve essere una funzione pari_

Possiamo quindi risolvere il problema (considerando soltanto il semi-canale)

$$\begin{cases} -\dfrac{\Delta p}{L} + \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & 0<y<h \\ u(h) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \end{cases}$$

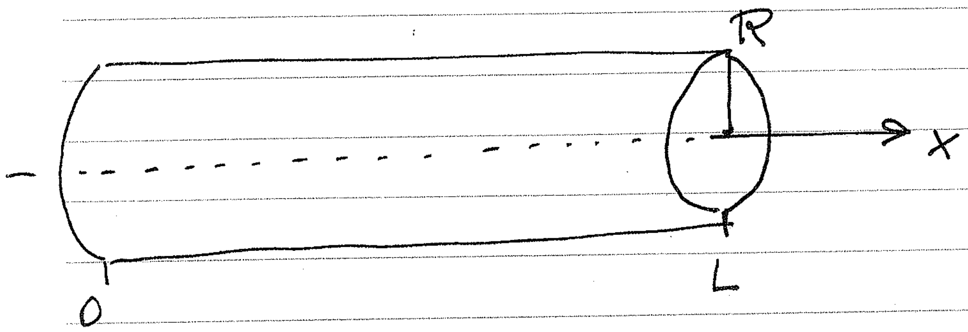
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = + \dfrac{\Delta p}{\mu L}\, y \\ u(h) = 0 \end{cases} \Rightarrow u(y) = \frac{1}{2}\frac{\Delta p}{L}\left(h^2 - y^2\right)$$

profilo parabolico

Lo sforzo di taglio massimo avviene a parete

$$\max\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \max\left(\frac{\Delta p}{L} h\right) = \frac{\Delta p\, h}{L}$$

Il flusso nel cilindro si tratta nella stessa maniera lavorando però in coordinate cilindriche



$$\underline{u} = u(r)\, \underline{e}_x$$

$$-\nabla p + \mu \Delta \underline{u} = 0 \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r \dfrac{\partial u}{\partial r}\right) = 0 \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial \vartheta} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p = p(x) \end{cases}$$

Differenziamo rispetto a x

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \\ p\Big|_{x=0} = p_{in} \qquad \Longrightarrow \quad p(x) = -\dfrac{\Delta P}{L} x + P_{in} \\ p\Big|_{x=L} = P_{out} \qquad \qquad \Delta p = p_{in} - P_{out} \end{cases}$$

Per quel che riguarda il campo di velocità

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r \dfrac{\partial u}{\partial r}\right) = -\dfrac{\Delta p}{\mu L} \\ u\Big|_{r=R} = 0 \qquad \text{no-slip} \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0 \qquad \text{simmetria} \end{cases}$$

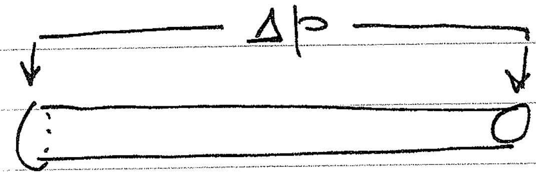
$$u(r) = \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\Delta p}{L}\right)(R^2 - r^2)$$

Se si calcola la portata volumica

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} u\, r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{8\mu}\,\frac{\Delta P}{L}\,R^4$$

Legge di Poiseuille

OSSERVAZIONE



La legge di Poiseuille si presta ad un interessante confronto con le leggi di Ohm.

$$Q = \left(\frac{\pi R^4}{8\mu L}\right)\Delta P \Longrightarrow \Delta p = \left[\frac{8\mu L}{(\pi R^2)\,R^2}\right] Q$$

Se interpretiamo Δp come V, differenza di potenziale ai "capi del condotto", Q come corrente elettrica I, abbiamo

$$V = \left[\frac{8\mu L}{S\,R^2}\right] I$$

S: (πR^2) area della sezione del condotto

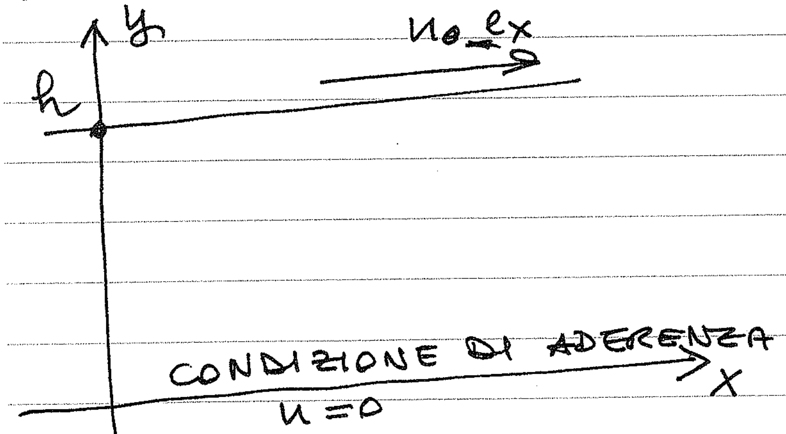
Quindi $\dfrac{8\mu L}{S R^2}$ si può interpretare come resistenza $\mathcal{R}$ del condotto ed infatti è sovente chiamata resistenza idraulica. Abbiamo quindi

$$V = \mathcal{R}\, I$$

che è la prima legge di Ohm e con R resistenza che è proporzionale alla lunghezza del conduttore ed inversamente proporzionale alla sezione. (seconda legge di Ohm) -

B) Moti prodotti dal trascinamento di una superficie.

Considerando un moto tra due piani orizzontali dei quali quello inferiore è fisso mentre quello superiore trasla con velocità uniforme $u_0 \underline{e}_x$ (FLUSSO DI COUETTE).



$$\underline{u} = u(y)\,\underline{e}_x$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \left.\begin{aligned} -\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ -\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow p = p(x) \end{cases}$$

Come prima $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$

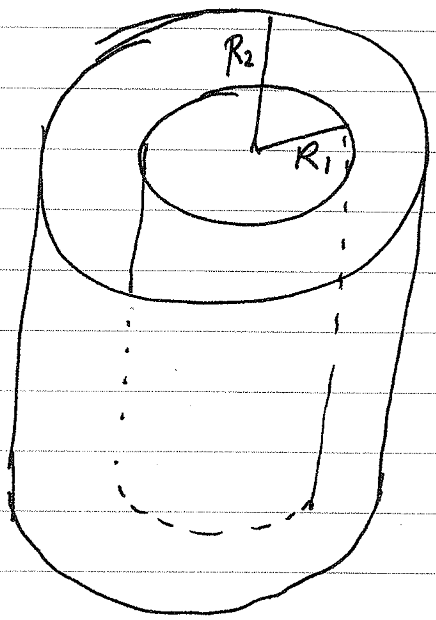
Siccome $p\big|_{x=\infty} = p\big|_{x=-\infty} = p_0$, non c'è gradiente di pressione, si ha:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \implies p(x) = p_0 \quad \forall\, x.$$

L'equazione per il campo di velocità diventa

$$\begin{cases} \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u\big|_{y=0} = 0 \\ u\big|_{y=h} = u_0 \end{cases} \implies u(y) = u_0 \frac{y}{h}$$

Consideriamo adesso il moto fra due cilindri coassiali di lunghezza infinita. I cilindri hanno raggi $R_1 < R_2$. Non si considerano le forze di massa e si suppone



$$\underline{u} = u(r)\,\underline{e}_\theta$$

$$p = p(r)$$

L'equazione di continuità è automaticamente soddisfatta perché in coordinate cilindriche è:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(u) = 0.$$

Le equazioni di moto diventano

$$-\frac{u^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)\right)$$

le cui soluzioni sono

$$p = \rho \int \frac{u^2}{r}\, dr$$

e

$$u = Ar + \frac{B}{r}$$

Adesso si suppone che il cilindro interno abbia velocità angolare Ω_1 e che quello esterno velocità angolare Ω_2, sì che le condizioni di aderenza si scrivono come

$$u\big|_{R_1} = \Omega_1 R_1 \Rightarrow AR_1 + \frac{B}{R_1} = \Omega_1 R_1$$

$$u\big|_{R_2} = \Omega_2 R_2 \Rightarrow AR_2 + \frac{B}{R_2} = \Omega_2 R_2$$

da cui si ottiene

$$u(r) = \frac{1}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}\left\{\left[\Omega_2 - \Omega_1\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right] r + \frac{R_1^2}{r}(\Omega_1 - \Omega_2)\right\}$$

La soluzione si estende anche al caso $R_2 \longrightarrow \infty$ e $\Omega_2 = 0$

$$u(r) = \frac{R_1^2}{r}\Omega_1$$

ed al caso $\Omega_1 = 0$ e $R_1 = 0$

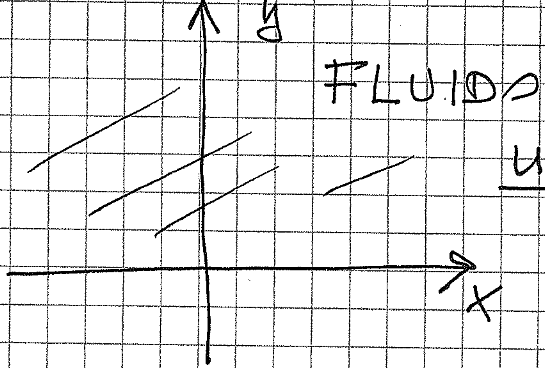
$$u(r) = \Omega_2 r$$

Vediamo come ultimo esempio il moto impulsivo di una superficie che delimita un dominio. Questa acquisendo impulsivamente una velocità mette in moto lo strato di fluido ad essa adiacente. Per effetto della viscosità la velocità si trasferisce a tutto il fluido.
Nello specifico consideriamo il semispazio $y > 0$ che supponiamo riempito di fluido viscoso. Il piano $y = 0$ delimita dal basso il dominio dove si trova il fluido. Tale piano viene messo impulsivamente in moto ovvero acquista la velocità

$$\underline{v} = U\,\theta(t)\,e_x$$

dove $\theta(t)$ è la funzione di Heaviside,

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$\underline{u} = u(y,t)\,\underline{e}_x$

Supponiamo che il campo di velocità (non stazionario adesso) sia

$$\underline{u} = u(y,t)\,\underline{e}_x .$$

Non considerando le forze di massa le equazioni di moto sono

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \left.\begin{aligned} \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p = p(x,t) \end{cases}$$

Differenziando rispetto ad x la prima e ricordando che $u = u(y,t)$ si ottiene

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

la cui soluzione $p = p_0$ se si assume $p|_{-\infty} = p|_{+\infty} = p_0$. L'equazione per il campo di velocità diventa quindi

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

che è una equazione parabolica.

Le condizioni iniziali ed al contorno sono:

- ADERENZA in $y=0 \Rightarrow u\big|_{y=0} = U\,\theta(t)$

- $\lim_{y\to\infty} u = 0$

- QUIETE INIZIALE $\Rightarrow u\big|_{t=0} = 0$.

Dobbiamo dunque risolvere questo problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & y>0\,;\ t>0 \\ u\big|_{t=0} = 0 & y>0 \\ u\big|_{y=0} = U\,\theta(t) & t>0 \\ u(\infty,t) = 0 & t>0 \end{cases}$$

La soluzione di tale problema può esser così scritta

$$u(y,t) = U\left[1 - \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\xi^2}\,d\xi}_{\operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)}\right]$$

È proprio questo esempio che spinge a considerare il concetto di "strato limite". Infatti, prendendo i valori tabulati della funzione $(1-\mathrm{erf}(\eta))$ si vede che

$$\frac{u}{U} = 1 - \mathrm{erf}(1.822) \sim \frac{1}{100} \quad \text{ovvero che}$$

alla distanza da parete pari a $y \sim 3{,}64\sqrt{\nu t}$ la velocità del fluido si è ridotta ad 1/100 del valore a parete. Per $y > 3.64\sqrt{\nu t}$ è dunque ragionevole considerare il fluido praticamente fermo. Si viene dunque a creare uno strato limite dipendente dal tempo e con spessore proporzionale a $\sqrt{t}$ fuori dal quale l'effetto delle condizioni al bordo può essere trascurato.