

## Part I

# Brevi note sulla teoria dello strato limite aerodinamico

I nuovi concetti che verranno introdotti in questa parte sono:

- riscalatura (scaling) delle grandezze fisiche;
- strato limite;
- matching;
- equazioni di Prandtl per la lamina piana;

Verranno poi presentati alcuni metodi per la soluzione delle equazioni dello strato limite (equazioni di Prandtl) ed anche qualche cenno ai limiti di questa teoria.

## 1 Importanza dei termini viscosi rispetto a quelli inerziali nell'equazione di Navier-Stokes: il numero di Reynolds

In questa sezione si considera un un flusso stazionario bidimensionale di un fluido Newtoniano incomprimibile<sup>1</sup>. Si denota con<sup>2</sup>

$$\vec{v}^*(x^*, y^*) = u(x^*, y^*) \vec{e}_x + v(x^*, y^*) \vec{e}_y, \quad (1)$$

il campo di velocità euleriano, e con  $\rho^*$ ,  $\mu^*$ , rispettivamente la densità (costante) e la viscosità (anch'essa costante) del fluido. Il sistema di equazioni

---

<sup>1</sup>Si ricorda che l'aria può essere considerata incomprimibile se la velocità tipica è molto minore della velocità del suono.

<sup>2</sup>In tutto questo capitolo lo “\*” denota grandezze con dimensioni. L'assenza dello “\*” denota invece grandezze adimensionali.

che governa il flusso è il seguente

$$\begin{cases} \rho^* \left( u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu^* \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right), \\ \rho^* \left( u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \mu^* \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right), \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

dove  $p^*$  è la pressione del fluido.

Supponiamo di adesso di aver a che fare con un flusso diretto sostanzialmente lungo l'asse  $x$ , e caratterizzato da una velocità  $U_o^*$ . Per fissare le idee si può pensare al flusso d'aria intorno ad un'automobile che si muove lungo un rettilineo alla velocità di 80 Km/h. Se in queste condizioni si sporge fuori dal finestrino un braccio si percepisce nettamente la “forza viscosa” dell'aria che tende a spostarlo verso la parte posteriore dell'auto. Facciamo, riferendoci appunto a tale caso specifico, una stima grossolana dell'ordine di grandezza dei termini inerziali e di quelli viscosi nell'equazione (2)<sub>1</sub>. Se si denota con  $L^*$ , la scala di lunghezza caratteristica è (nel caso del braccio<sup>3</sup>  $L^* \approx 10 \text{ cm}$ ) abbiamo<sup>4</sup>

$$\frac{\text{TERMINI INERZIALI}}{\text{TERMINI VISCOSI}} = \frac{\rho^* \left| u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right|}{\mu^* \left| \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} \right|} \approx \frac{U_o^* \frac{U_o^*}{L^*}}{\eta^* \frac{U_o^*}{L^{*2}}} = \frac{U_o^* L^*}{\eta^*}, \quad (3)$$

dove  $\eta^* = \frac{\mu^*}{\rho^*}$ , viene detta viscosità cinematica. Mettendo i numeri abbiamo

$$\frac{U_o^* L^*}{\eta^*} \sim 10^5,$$

essendo  $\eta^* \sim 0.1 \text{ cm}^2/\text{s}$ . Quindi questo indurrebbe a pensare che i termini viscosi sono molto più piccoli dei termini inerziali e che quindi l'effetto della viscosità è trascurabile. Ma allora come si spiega la “forza dell'aria” sul

<sup>3</sup>Si ricordi che stiamo considerando un flusso piano. Quindi quello che interessa è il diametro dell'ostacolo, ossia il diametro del braccio.

<sup>4</sup>Siccome il flusso è praticamente unidirezionale è ragionevole trascurare la componente trasversale, ovvero quella diretta lungo l'asse  $y$ .

braccio? Se il fluido è sostanzialmente inviscido perché lo stesso fluido esercita una forza viscosa? Questo paradosso emerge ancor più chiaramente se, nel sistema (2), consideriamo variabili adimensionali. Si definiscono le seguenti variabili adimensionali

$$x = \frac{x^*}{L^*}, \quad y = \frac{y^*}{L^*}, \quad u = \frac{u^*}{U_o^*}, \quad v = \frac{v^*}{U_o^*}, \quad p = \frac{p^*}{p_o^*}, \quad (4)$$

dove  $p_o^*$  è una pressione caratteristica che dobbiamo ancora fissare. Introducendo le suddette variabili adimensionali nel sistema (2) si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \left( \frac{p_o^*}{\rho^* U_o^{*2}} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{1}{\frac{U_o^* L^*}{\eta^*}} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \left( \frac{p_o^*}{\rho^* U_o^{*2}} \right) \frac{\partial p}{\partial y} + \left( \frac{1}{\frac{U_o^* L^*}{\eta^*}} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

Quindi, possiamo naturalmente porre

$$p_o^* = \rho^* U_o^{*2}, \quad (6)$$

(usualmente detta scala di pressione aerodinamica) ed introdurre il parametro caratteristico

$$\text{Re} = \frac{U_o^* L^*}{\eta^*}, \quad (7)$$

detto **numero di Reynolds**. Riscriveremo dunque il sistema (5) come segue

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \text{Re}^{-1} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \text{Re}^{-1} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

E proprio quest'ultima versione mette ancor più in evidenza il paradosso: se  $Re \sim 10^5$ , appare chiaro che i termini di (8) che sono moltiplicati per  $Re^{-1}$  possono essere legittimamente trascurati. Così facendo il sistema (8) si riconduce al sistema di Eulero che descrive il moto di un fluido non viscoso. Ma, per tale modello, la formula di D'Alembert ci fornisce il "drag" viscoso: che è nullo. Quindi, tornando all'esempio del braccio esposto al flusso d'aria, il "drag" viscoso agente su di esso dovrebbe essere trascurabile, mentre l'unico effetto percepibile dovrebbe essere un'eventuale portanza (che potrebbe spingere il braccio verso l'alto o verso il basso). Ma allora, ancora una volta, perché il braccio è trascinato indietro dall'aria?

Prima di rispondere a questa domanda soffermiamoci ancora un po' sulla definizione (7). Confrontando (3) con (7) appare subito il significato fisico di  $Re$ : rapporto fra inerzia (intesa come la classica  $ma$ ) e forza viscosa. Se  $Re \ll 1$  gli effetti viscosi sono dominanti, non lo sono più se  $Re \gg 1$ .

Bisogna però osservare che la stima del numero di Reynolds si opera selezionando una lunghezza caratteristica, una velocità caratteristica e parametri fisici del fluido: densità e viscosità. Quindi ci chiediamo: siamo proprio sicuri che la lunghezza  $L^*$  è quella giusta? Sul fatto che il flusso attorno al braccio possa essere considerato bidimensionale non sembrano esserci dubbi, come non ci sono dubbi sul fatto che  $U_o^*$ , è la sua velocità caratteristica. Allora l'unica possibilità che ci resta è quella di ipotizzare l'esistenza di una scala di lunghezza "nascosta" da qualche parte nel sistema.

## 2 Strato limite sopra una lastra piana

Consideriamo una lamina di spessore trascurabile e lunghezza  $L^*$ . La direzione  $x^*$  è orientata lungo la lamina, mentre la direzione  $y^*$  è perpendicolare alla stessa. L'origine del sistema di riferimento è posta nel punto  $O$  che coincide col bordo d'attacco del flusso (v. figura 1). Per simmetria considereremo solo il semipiano  $y^* \geq 0$ .

Si considerano poi condizioni stazionarie per cui il campo di velocità (bidimensionale) è dato dalla (1), con  $u^*$ ,  $v^*$ , dipendenti solo da  $x^*$ ,  $y^*$ . Le condizioni che si impongono sulla lamina sono:

$$\begin{cases} u^*(x^*, 0) = 0, & \text{aderenza,} \\ v^*(x^*, 0) = 0, & \text{impermeabilità.} \end{cases} \quad (9)$$

Infine, a "grande distanza" dalla lamina possiamo supporre che il campo di velocità non risente della presenza della lamina.

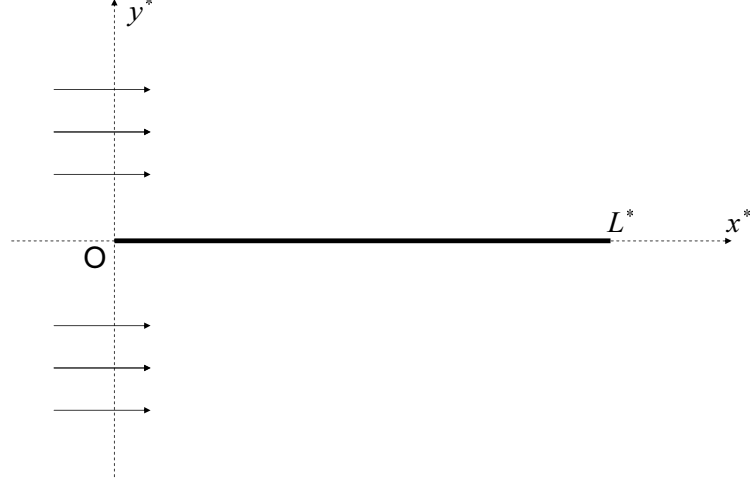


Figure 1: Flusso attorno ad una lamina sottile di lunghezza  $L^*$ .

La scala longitudinale è sicuramente  $L^*$ , ma cosa dire riguardo alla scala trasversale? Ma, prima di tutto, cosa vuol dire scala caratteristica di lunghezza in questo contesto? Con tale termine si intende quella distanza lungo la quale la velocità subisce variazioni relative significative. Allora se la scala longitudinale è  $L^*$ , poniamo che quella verticale (o meglio trasversale) è  $\delta^*$ . Il valore  $\delta^*$  tuttavia non è a priori noto (anche se a priori ci aspettiamo comunque che  $\delta^* \leq L^*$ ). Quindi, per definizione di scala di lunghezza, la velocità trasversale  $v^*$  subisce, nello spazio  $\delta^*$ , una variazione relativa non trascurabile. Introduciamo quindi questa doppia scalatura

$$x = \frac{x^*}{L^*}, \quad y = \frac{y^*}{\delta^*}. \quad (10)$$

Adesso, cosa possiamo dire in merito alla scale di velocità? Certamente la scala longitudinale è  $U_o^*$ , ma quella trasversale? Sapendo che  $U_o^*$  è la scala di velocità longitudinale possiamo introdurre la relativa scala di tempo

$$t_o^* = \frac{L^*}{U_o^*}.$$

Quindi, nel tempo  $t_o^*$  le particelle del fluido percorrono una distanza longitudinale dell'ordine di  $L^*$ . Ci aspettiamo pertanto che nello stesso tempo  $t_o^*$

le particelle percorrano una distanza trasversale dell'ordine  $\delta^*$ . Per cui, se denotiamo con  $V_o^*$  la scala trasversale di velocità, avremo

$$V_o^* = \frac{\delta^*}{t_o^*} = \frac{\delta^*}{L^*} U_o^*.$$

Si definisce così

$$u = \frac{u^*}{U_o^*}, \quad v = \frac{v^*}{V_o^*} = \frac{L^*}{\delta^*} \frac{v^*}{U_o^*}. \quad (11)$$

Vediamo adesso come si può stimare  $\delta^*$ . Consideriamo il sistema (2), e introduciamo in esso le variabili adimensionali (10), (11), non definendo ancora  $p_o^*$ . Otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{U_o^{*2}}{L^*} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \left( \frac{p_o^*}{\rho^* L^*} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta^* U_o^*}{\delta^{*2}} \left( \frac{\delta^{*2}}{L^{*2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{U_o^{*2} \delta^*}{L^{*2}} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \left( \frac{p_o^*}{\rho^* \delta^*} \right) \frac{\partial p}{\partial y} \\ \quad + \left( \frac{\eta^* U_o^* \delta^*}{L^{*3}} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left( \frac{\eta^* U_o^*}{\delta^* L^*} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (12)$$

Ora, riferendoci a quanto detto nella sezione 1, il confronto fra termini inerziali e termini viscosi ci permette di valutare  $\delta^*$ . Infatti, ricordando (3) e (7),

$$\frac{\text{TERMINI INERZIALI}}{\text{TERMINI VISCOSI}} = \frac{\frac{U_o^{*2}}{L^*}}{\frac{\eta^* U_o^*}{\delta^{*2}}} = \frac{U_o^* \delta^{*2}}{\eta^* L^*} = \text{Re} \frac{\delta^{*2}}{L^{*2}}.$$

Quindi se vogliamo che i due termini siano confrontabili dobbiamo richiedere

$$\text{Re} \frac{\delta^{*2}}{L^{*2}} = 1, \quad \Leftrightarrow \quad \delta^* = \frac{L^*}{\text{Re}^{1/2}}. \quad (13)$$

In particolare, se  $L^* \sim 10 \text{ cm}$ , e  $\text{Re} = 10^5$ , (come ad esempio nel caso considerato nella sezione precedente) si trova che  $\delta^*$ , è dell'ordine del decimo di  $mm$ . Dal punto di vista fisico questo vuol dire che i fenomeni viscosi si manifestano in un sottilissimo strato adiacente alla lamina (da qui il nome di strato limite).

Quindi, considerando  $\delta^*$  dato dalla (13), con  $\text{Re} \gg 1$  (ad esempio  $\text{Re} \sim 10^5$ ), e considerando poi  $p_o^*$  dato da (6), il sistema (12) acquisisce questa forma

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{1}{\text{Re}} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

che, a sua volta, trascurando i termini dell'ordine di  $1/\text{Re}$ , e, a maggior ragione, quelli dell'ordine di  $1/\text{Re}^2$ , si può così semplificare

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Ora, lontano dalla lastra,  $y^* \sim L^*$ , possiamo considerare lo “scaling” (4), che però adesso, proprio per enfatizzare i differenti domini di applicazione (v. figura 2), denoteremo così

$$x = \frac{x^*}{L^*}, \quad Y = \frac{y^*}{L^*}, \quad U = \frac{u^*}{U_o^*}, \quad V = \frac{v^*}{U_o^*}, \quad P = \frac{p^*}{\rho^* U_o^{*2}}. \quad (15)$$

Qui, tralasciando i termini di ordine  $1/\text{Re}$ , il sistema (2) si riduce al seguente

$$\begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial x}, \\ U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y}, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \end{cases} \quad (16)$$

che descrive appunto un flusso non viscoso.



Figure 2: Rappresentazione schematica dei domini di validità degli “scalings” proposti. Lo “scaling” (10), (11), (13) sarà corretto solo nel dominio dello strato limite, mentre lo “scaling” (15) sarà valido nel dominio lontano. Le dimensioni dei domini non sono in scala.

## 2.1 Matching

Si denota con  $\bar{U}(x, Y)$ ,  $\bar{V}(x, Y)$ , e  $\bar{P}(x, Y)$ , la soluzione del sistema (16) accoppiato con le seguenti condizioni al controno del tutto generali<sup>5</sup>

$$\begin{cases} \lim_{(x^2+y^2) \rightarrow \infty} (U \vec{e}_x + V \vec{e}_y) = \hat{U}(x, y) \vec{e}_x + \hat{V}(x, y) \vec{e}_y, \\ V(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (17)$$

con  $\hat{U}$ ,  $\hat{V}$ , funzioni date (si considera comunque sempre il caso in cui il campo  $\hat{U} \vec{e}_x + \hat{V} \vec{e}_y$ , è irrotazionale). Il sistema (14), per poter essere risolto ha bisogno di specifiche condizioni al controrno. Sorge quindi un nuovo problema: come si definiscono tali condizioni? Infatti, sempre riferendoci alla figura 2, il dominio “lontano” ed il dominio dello strato limite non

<sup>5</sup>Si ricorda che per il flusso non viscoso, descritto dalle equazioni di Eulero, non si impone la condizione di aderenza alle superfici (condizione di “non-slip”), come si usa fare nel caso dei flussi viscosi, ma soltanto la condizione di impermeabilità (velocità normale alla superficie nulla).



sono fisicamente separati da una netta superficie, ma piuttosto si assiste ad una “immersione” dell’uno nell’altro. Certo, si potrebbe definire una certa quota, denotata con  $y_1$  rispetto allo “scaling” (10) e con  $Y_1$ , rispetto allo “scaling” (15), ed imporre che per  $y = y_1$ , e  $Y = Y_1$ , le soluzioni di (14) e di (16) coincidano. Questo approccio, ancorché pragmatico, ha però il difetto dell’arbitrarietà. Infatti perché non prendere  $0.9y_1$ , e  $0.9Y_1$  (oppure  $1.1y_1$ , e  $1.1Y_1$ ) come quota di raccordo? In fondo, tenendo conto che questa è una teoria approssimata, la differenza fra  $y_1$  e  $0.9y_1$ , o  $1.1y_1$ , non è poi grande! Quindi, per non incorrere in questi problemi, è necessario liberarci da una precisa definizione della quota di raccordo, sostituendo a questa qualcosa di più “sfumato”. Questo è il cosiddetto **matching** fra le due scale ed è l’argomento di questa sezione, che verrà sviluppato nel seguito.

Si comincia con l’osservare che la teoria sviluppata sarà fisicamente accettabile se la soluzione di (14) tende a quella di (16) man mano che  $y$  si avvicina al bordo superiore dello strato limite, ovvero man mano che  $y$  diventa sempre più “grande”. Allo stesso modo la soluzione di (16) deve tendere a quella di (14) man mano che ci si avvicina alla lastra, ovvero man mano che  $Y \rightarrow 0$ . In definitiva, guardando al problema dal punto di vista fisico, deve esistere una qualche regione dove le i due regimi (quello viscoso descritto dal sistema (14) e quello non viscoso descritto da (16)) si confondono uno con l’altro. Il punto è quindi caratterizzare, dal punto di vista matematico, questa **regione di sovrapposizione**. Si osserva poi che le formule (10)<sub>2</sub>, (15)<sub>2</sub> ed ancora la (13) comportano

$$yL^*\text{Re}^{-1/2} = y\delta^* = y^* = YL^*,$$

da cui discende

$$\frac{y}{\text{Re}^{1/2}} = Y. \quad (18)$$

Quindi se<sup>6</sup>  $Y = \mathcal{O}(1)$ , abbiamo  $y \sim \text{Re}^{1/2} \gg 1$ , ovvero molto grande. D’altra parte se  $y = \mathcal{O}(1)$ , si ha  $Y \sim \text{Re}^{-1/2} \ll 1$ , ovvero molto piccolo. Il raccordo deve pertanto avvenire in una zona che riscalata con la (15)<sub>2</sub> corrisponde ad  $Y$  molto piccoli, mentre riscalata con la (10)<sub>2</sub> corrisponde ad  $y$  molto grandi. In pratica bisogna trovare una scala intermedia, che denotiamo con  $\zeta$ , che sia, allo stesso tempo, “grande” rispetto a  $y$  e “piccola” rispetto a  $Y$ . Per far questo si considera una generica funzione  $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tale che<sup>7</sup>

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) = +\infty, \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{F(s)}{s^{1/2}} = 0,$$

<sup>6</sup>Con la notazione  $\mathcal{O}(1)$  si intende una grandezza finita, cioè che non è infinitesima ma neppure infinita.

<sup>7</sup>Un esempio potrebbe essere  $F(s) = s^{1/3}$ .

e si definisce tale scala trasversale intermedia  $\zeta$ , ponendo

$$\zeta = F(\text{Re}) Y, \quad \text{oppure, ricordando la (18),} \quad \zeta = y \frac{F(\text{Re})}{\text{Re}^{1/2}}.$$

Quindi, siccome  $Y = \frac{\zeta}{F(\text{Re})}$ , si ha che per  $\zeta$  fissato e finito, se  $\text{Re} \rightarrow +\infty$  (che in pratica vuol dire  $\text{Re} \gg 1$ ),  $Y \rightarrow 0$ . D'altra parte, poiché  $y = \frac{\zeta}{\text{Re}^{-1/2} F(\text{Re})}$ , sempre per  $\zeta$  fissato e finito, e  $\text{Re} \rightarrow +\infty$ , si ha  $y \rightarrow \infty$  (che al solito va inteso come  $y \gg 1$ ). La scala intermedia è dunque composta da quei valori di  $\zeta$  che, se  $\text{Re} \gg 1$ , si avvicinano al “bordo superiore” dello strato limite (e che pertanto corrispondono a  $y$  “grandi”) e che allo stesso tempo si avvicinano alla lamina (dal momento che corrispondono a  $Y$  “piccoli”). La scala  $\zeta$  è proprio la scala della regione di raccordo fra i due domini. Quindi, riferendoci per esempio alla velocità longitudinale, il matching tra le due approssimazioni verrà effettuato imponendo

$$\lim_{\text{Re} \rightarrow \infty} u \left( x, \frac{\zeta}{\text{Re}^{-1/2} F(\text{Re})} \right) = \lim_{\text{Re} \rightarrow \infty} U \left( x, \frac{\zeta}{F(\text{Re})} \right), \quad (19)$$

per ogni fissato  $\zeta$ . La suddetta condizione si usa anche scrivere come  $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = U(x, 0)$ .

Vediamo una prima conseguenza della (19). L'equazione (14)<sub>2</sub> comporta automaticamente

$$p = p(x),$$

ovvero la pressione è indipendente da  $y$  in tutto lo strato limite. Applicando la (19) si ottiene pertanto

$$p(x) = \lim_{\text{Re} \rightarrow \infty} P \left( x, \frac{\zeta}{F(\text{Re})} \right) = \bar{P}(x, 0),$$

dove, lo ricordiamo ancora,  $\bar{P}$  è soluzione di (16), (17). Avremo dunque,

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial x}(x, 0),$$

ovvero, sfruttando la<sup>8</sup> (16)<sub>1</sub>,

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} = -\bar{U}(x, 0) \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}(x, 0), \quad (20)$$

siccome, in virtù di (17),  $V(x, 0) = 0$ .

Di conseguenza potremo riscrivere (14) come

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \bar{U}(x, 0) \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}(x, 0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Per quanto riguarda poi le condizioni al contorno, applicando sempre la (19) scriveremo

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = \bar{U}(x, 0),$$

mentre la (9) comporta  $u(x, 0) = 0$ , e  $v(x, 0) = 0$ . Il flusso nello strato limite è quindi descritto dal seguente sistema di equazioni (detto anche problema di Prandtl per lo strato limite)

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \bar{U}(x, 0) \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}(x, 0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & 0 < x < 1, \ 0 < y < +\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, & 0 < x < 1, \ 0 < y < +\infty \\ u(x, 0) = 0, \ v(x, 0) = 0, & 0 < x < 1, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = \bar{U}(x, 0), & 0 < x < 1, \\ u(0, y) = u_o(y), & y > 0, \end{cases} \quad (21)$$

dove  $u_o(y)$  è una funzione assegnata e  $\bar{U}$  è la soluzione del flusso non viscoso (16), (17).

---

<sup>8</sup>La (20) si può derivare anche dalla condizione di Bernulli che, scritta con variabili adimensionale, equivale a

$$P^2(x, 0) + \frac{1}{2}U^2(x, 0) = \text{costante}.$$

## 2.2 Soluzione di Blasius

Consideriamo adesso il semplice caso il flusso imperturbato esterno sia parallelo alla lamina, cioè le condizioni (17) sono

$$\begin{cases} \lim_{(x^2+y^2) \rightarrow \infty} (U \vec{e}_x + V \vec{e}_y) = \vec{e}_x, \\ V(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

In tal caso la soluzione di (16) è

$$\bar{U}(x, Y) = 1, \quad \bar{V}(x, Y) = 0, \quad \bar{P}(x, Y) = \text{COSTANTE}.$$

Il sistema (21) si riscrive quindi in questa forma

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < +\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < +\infty \\ u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, & 0 < x < 1, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 1, & 0 < x < 1, \\ u(0, y) = 1, & y > 0. \end{cases} \quad (22)$$

Per esso si ricerca una soluzione in termine della funzione di corrente  $\psi(x, y)$ , ponendo<sup>9</sup>

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Sostituendo nel sistema (22) si ottiene<sup>10</sup>

$$\begin{cases} \psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} = \psi_{yyy}, & x > 0, \quad y > 0, \\ \psi_y(x, 0) = 0, \quad \psi_x(x, 0) = 0, & x > 0, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \psi_y = 1, & x > 0, \\ \psi_y(0, y) = 1, & y > 0. \end{cases} \quad (23)$$

<sup>9</sup>Si noti che l'equazione (22)<sub>2</sub> è automaticamente soddisfatta.

<sup>10</sup>Per semplicità di notazione i pedici “ $_x$ ” e “ $_y$ ” indicano rispettivamente le derivate parziali rispetto a  $x$  ed a  $y$ .

Il problema (23) ammette una **soluzione autosimile** (la cosiddetta soluzione di Blasius). Si ricerca  $\psi(x, y)$  nella seguente forma

$$\psi(x, y) = \sqrt{2x} f(\xi), \quad \text{con} \quad \xi = \frac{y}{\sqrt{2x}}, \quad (24)$$

dove la nuova variabile  $\xi$  è non negativa ( $\xi \geq 0$ ). In particolare,

$$\begin{cases} u = \psi_y = f'(\xi), \\ v = -\psi_x = \frac{1}{\sqrt{2x}} [\xi f'(\xi) - f(\xi)], \end{cases} \quad \text{dove} \quad (\cdot)' = \frac{d}{d\xi}.$$

Sostituendo (24) in (23) si ottiene il seguente problema (detto problema di Blasius)

$$\begin{cases} f''' + f f'' = 0, & \xi \geq 0, \\ f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1, \end{cases} \quad (25)$$

la cui soluzione però non è esprimibile in forma analitica chiusa.

### 2.2.1 Metodo di soluzione

Vediamo un metodo iterativo per risolvere il problema (25). Si comincia con l'osservare che il problema (25) è un problema ai limiti e non un problema di Cauchy. Questo fatto rende la sua soluzione numerica non proprio banale, nel senso che il problema sarebbe molto più semplice da trattare se tutti i dati venissero specificati in  $\xi = 0$ .

Vediamo prima di tutto una semplice proprietà delle soluzioni. Si nota che se  $f$  è soluzione dell'equazione  $(25)_1$ , allora fissata comunque una costante  $a$ , anche  $af(a\xi)$  è soluzione. Consideriamo quindi il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} h''' + h h'' = 0, & \xi \geq 0, \\ h(0) = h'(0) = 0, \quad h''(0) = 1. \end{cases} \quad (26)$$

Si può facilmente mostrare che

$$f(\xi) = ah(a\xi),$$

è soluzione di (25). Infatti sia  $h$  soluzione di (26). Avremo  $f'(\xi) = a^2 h'(a\xi)$ . Quindi se  $a$  è tale che

$$a = \left[ \lim_{z \rightarrow \infty} h(z) \right]^{-2}, \quad (27)$$

avremo

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} f'(\xi) = 1,$$

che unito al fatto che  $f'(0) = f(0) = 0$ , rende  $f$  soluzione di (25). Ovviamente, in  $(26)_2$  la condizione  $h''(0) = 1$ , è arbitraria, nel senso che avremmo potuto benissimo imporre  $h''(0) = \alpha$ , con  $\alpha \neq 0$ . Se l'avessimo fatto, avremmo trovato una differente funzione  $h$ , che varebbe dato luogo, tramite la formula (27), ad un differente valore  $a$ .

Abbiamo quindi visto che il problema di Cauchy (26) è equivalente al problema ai limiti (25). Vediamo dunque un metodo iterativo per risolvere (26). Si osserva che, introducendo

$$q = h'',$$

(26) si può scrivere così

$$\begin{cases} q' + hq = 0, & \xi \geq 0, \\ q(0) = 1, \end{cases} \quad (28)$$

la cui soluzione è questa

$$q(\xi) = \exp \left\{ - \int_0^\xi h(s) ds \right\}, \quad \xi \geq 0. \quad (29)$$

Ora, ricordando che  $h(0) = h'(0) = 0$ , possiamo scrivere (v. Figura 3, (A))

$$\begin{aligned} h(s) &= \int_0^s \int_0^r q(t) dt dr = \int_0^s dt \left( \int_t^s q(t) dr \right) \\ &= \int_0^s (s-t) q(t) dt, \end{aligned} \quad (30)$$

e, applicando la stessa tecnica all'integrale della formula (29), avremo (si veda la Figura 3, (B))

$$\begin{aligned} \int_0^\xi h(s) ds &= \int_0^\xi \int_0^s (s-t) q(t) dt ds \\ &= \int_0^\xi dt \left( \int_s^\xi (s-t) q(t) ds \right) = \int_0^\xi \frac{1}{2} (\xi-t)^2 q(t) dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Il problema di Cauchy (28) è dunque equivalente a questa equazione integrale

$$q(\xi) = \exp \left\{ - \int_0^\xi \frac{1}{2} (\xi-t)^2 q(t) dt \right\}, \quad \xi \geq 0,$$

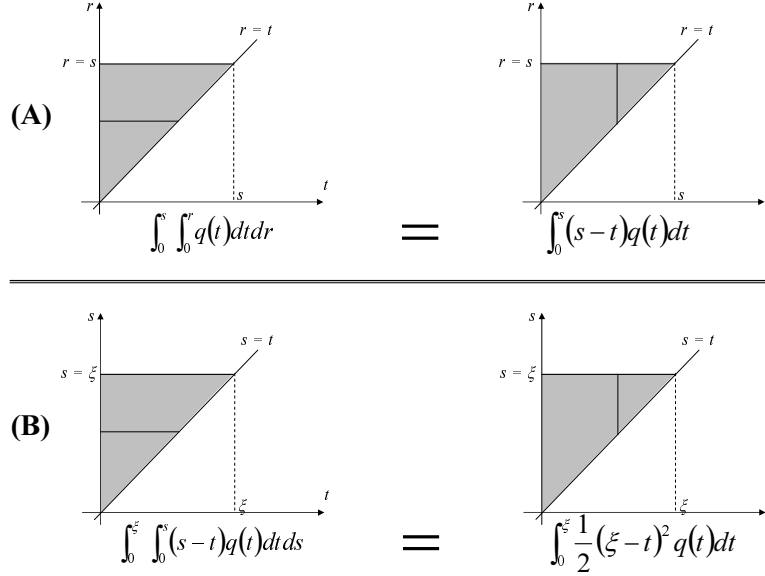


Figure 3: **(A)**: Schema di integrazione formula (30). **(B)**: Schema di integrazione formula (31).

che si presta particolarmente bene a definire una procedura iterativa. Si pone infatti

$$q_0 = 1, \quad q_{n+1} = \Lambda(q_n),$$

dove l'applicazione  $\Lambda$ , è così definita

$$\Lambda(q) = \exp \left\{ - \int_0^\xi \frac{1}{2} (\xi - t)^2 q(t) dt \right\}.$$

Si può provare che  $\Lambda$  è un'applicazione contrattiva per cui il metodo iterativo porta a convergenza.

Vediamo adesso alcune proprietà di  $\Lambda$ . Prima di tutto, conviene cambiare variabile e considerare

$$\zeta = \frac{\xi}{\sqrt[3]{2}}, \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \sqrt[3]{2} \zeta,$$

ponendo  $\hat{q}(\zeta) = q(\sqrt[3]{2} \zeta)$ , ovvero  $q(\xi) = \hat{q}(\xi/\sqrt[3]{2})$ . In particolare, lavorando con  $\zeta$  e  $\hat{q}$ , la legge ricorsiva viene ad essere così definita

$$\hat{q}_{n+1}(\zeta) = \exp \left\{ - \int_0^\zeta (\zeta - s)^2 \hat{q}_n(s) ds \right\}, \quad \text{con} \quad \zeta \geq 0. \quad (32)$$

Possiamo quindi calcolare le prime iterazione. Avremo

$$\hat{q}_1(\zeta) = 1, \quad (33)$$

$$\hat{q}_2(\zeta) = \exp\left\{-\frac{\zeta^3}{3}\right\}, \quad (34)$$

$$\hat{q}_3(\zeta) = \exp\left\{-\int_0^\zeta (\zeta-s)^2 \exp\left(-\frac{s^3}{3}\right) ds\right\}. \quad (35)$$

Quindi, siccome operiamo nel dominio  $\zeta \geq 0$ , abbiamo che per ogni  $n \geq 1$ ,  $\hat{q}_n \geq 0$ . In particolare, stante l'applicazione iterativa (32),  $q_n \leq 1, \forall n \geq 1$ .

Vediamo un'importante proprietà dell'applicazione  $\Lambda$ . Fissate comunque  $\hat{q}^\star$ , e  $\hat{q}$ , abbiamo

$$\Lambda(\hat{q}) \leq \Lambda(\hat{q}^\star), \quad \text{se} \quad \hat{q} \geq \hat{q}^\star, \quad (36)$$

oppure

$$\Lambda(\hat{q}) \geq \Lambda(\hat{q}^\star), \quad \text{se} \quad \hat{q} \leq \hat{q}^\star. \quad (37)$$

Dimostriamo la seconda, supponendo cioè che  $\hat{q} \leq \hat{q}^\star$ , ovvero che  $\hat{q} = \hat{q}^\star - \lambda^2$ , con  $\lambda^2 \neq 0$ . Potremo quindi scrivere

$$\begin{aligned} \Lambda(\hat{q}) &= \exp\left\{-\int_0^\zeta (\zeta-s)^2 \hat{q}(s) ds\right\} \\ &= \exp\left\{-\int_0^\zeta (\zeta-s)^2 (\hat{q}^\star(s) - \lambda^2) ds\right\} \\ &= \underbrace{\exp\left\{-\int_0^\zeta (\zeta-s)^2 \hat{q}^\star(s) ds\right\}}_{\Lambda(\hat{q}^\star)} \underbrace{\exp\left\{\int_0^\zeta (\zeta-s)^2 \lambda^2 ds\right\}}_{\geq 1}, \end{aligned}$$

ovvero  $\Lambda(\hat{q}) - \Lambda(\hat{q}^\star) \geq 0$ . Con la medesima tecnica si dimostra la prima. Forti di questo risultato, vediamo cosa comporta (sempre facendo riferimento alla formula iterativa (32)). Dalle formule esplicite (34), (33) discende banalmente

$$\hat{q}_2 \leq \hat{q}_1, \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\Lambda(\hat{q}_2)}_{\hat{q}_3} \geq \underbrace{\Lambda(\hat{q}_1)}_{\hat{q}_2},$$

ossia  $\hat{q}_2 \leq \hat{q}_1, \Rightarrow \hat{q}_3 \geq \hat{q}_2$ . Ma quest'ultima in virtù di (36) comporta

$$\hat{q}_3 \geq \hat{q}_2, \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\Lambda(\hat{q}_3)}_{\hat{q}_4} \leq \underbrace{\Lambda(\hat{q}_2)}_{\hat{q}_3} \Leftrightarrow \hat{q}_4 \leq \hat{q}_3.$$



Quindi abbiamo  $\hat{q}_3 \geq \hat{q}_2$ , ed al tempo stesso  $\hat{q}_3 \geq \hat{q}_4$ . Andando avanti otteniamo

$$\hat{q}_4 \leq \hat{q}_3, \Rightarrow \underbrace{\Lambda(\hat{q}_4)}_{\hat{q}_5} \geq \underbrace{\Lambda(\hat{q}_3)}_{\hat{q}_4} \Leftrightarrow \hat{q}_5 \geq \hat{q}_4,$$

ed anche

$$\hat{q}_5 \geq \hat{q}_4, \Rightarrow \underbrace{\Lambda(\hat{q}_5)}_{\hat{q}_6} \leq \underbrace{\Lambda(\hat{q}_4)}_{\hat{q}_5} \Leftrightarrow \hat{q}_6 \leq \hat{q}_5,$$

ossia che  $\hat{q}_5 \geq \hat{q}_4$ , ed al tempo stesso  $\hat{q}_5 \geq \hat{q}_6$ . Procedendo per induzione si trova sostanzialmente che l'approssimazione dispari è sempre maggiore delle due approssimazioni pari adiacenti, ossia,  $\forall n \geq 1$ ,  $\hat{q}_{2n+1} \geq \hat{q}_{2n}$ , ed al tempo stesso  $\hat{q}_{2n+1} \geq \hat{q}_{2n+2}$ . Nello specifico, questo implica che, comunque si scelga  $n$ ,

$$(-1)^n (\hat{q}_{n+1} - \hat{q}_n) \geq 0.$$

Infatti se  $n$  è pari  $(-1)^n = 1$ , e la differenza è sicuramente  $\geq 0$ , in quanto differenza fra un  $\hat{q}$  con indice dispari e quello pari adiacente. Se  $n$  è dispari la differenza è  $\leq 0$ , ma viene moltiplicata per  $(-1)$ , e quindi il tutto torna ad essere  $\geq 0$ .

Sempre applicando (36) e (37) possiamo dimostrare che le  $\hat{q}_{2n+1}$  formano una successione decrescente mentre  $\hat{q}_{2n}$  danno luogo ad una successione crescente. Infatti, siccome dalla (33) e (35) discende  $\hat{q}_1 \geq \hat{q}_3$ , abbiamo

$$\begin{array}{ccc} \hat{q}_1 & \geq & \hat{q}_3 \\ & \downarrow (36) & \\ \hat{q}_2 & \leq & \hat{q}_4 \\ & \downarrow (37) & \\ \hat{q}_3 & \geq & \hat{q}_5 \\ & \downarrow (36) & \\ \hat{q}_4 & \leq & \hat{q}_6 \\ & \downarrow (37) & \\ \hat{q}_5 & \geq & \hat{q}_7 \\ & \vdots & \end{array}$$

Pertanto

$$\begin{array}{lcl} \hat{q}_1 & \geq & \hat{q}_3 \geq \hat{q}_5 \geq \hat{q}_7 \geq \dots, \\ \hat{q}_2 & \leq & \hat{q}_4 \leq \hat{q}_6 \leq \dots. \end{array}$$