

Parte I

Onde non lineari nei fluidi ideali

In questa sezione consideriamo un flusso di un fluido ideale in condizioni tali che un approccio perturbativo non è possibile: non abbiamo a che fare con piccole perturbazioni di un dato stato stazionario. Supponiamo inoltre che il flusso sia omoentropico, sì che

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = A,$$

con $A = \text{costante}$.

Nel caso 1D, le equazioni per la componente longitudinale della velocità $u(x, t)$ e per la densità $\rho(x, t)$ sono¹

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ u_t + u u_x = -c^2 \frac{\rho_x}{\rho}, \end{cases} \quad (1)$$

dove

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = A\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p(\rho)}{\rho}.$$

Il sistema (1) è un **sistema del primo ordine di tipo iperbolico**. Per affrontare lo studio di tale sistemi è necessario conoscere la teoria delle equazioni e sistemi di equazioni del primo ordine di tipo iperbolico.

1 Equazioni del primo ordine di tipo iperbolico

Consideriamo come primo caso la seguente equazione in cui è specificato il “dato iniziale” sulla curva Γ (si veda la figura 1) definita come un’applicazione dall’intervallo $I \subset \mathbb{R}$, in \mathbb{R}^2 , ovvero

$$\Gamma : s \longrightarrow \begin{cases} x = \hat{x}(s), \\ t = \hat{t}(s). \end{cases}$$

Abbiamo dunque questo problema

$$\begin{cases} a(x, t) w_t + b(x, t) w_x = 0, \\ w|_{\Gamma} = f(s). \end{cases} \quad (2)$$

Si fissa adesso un punto su Γ , ovvero si fissa $s \in I$, sì che viene ad essere individuato il punto $(x(s), t(s)) \in \Gamma$. Consideriamo adesso la curva \mathcal{C} vista come applicazione dall’intervallo $J \subset \mathbb{R}$ in \mathbb{R}^2 ,

$$\mathcal{C} : \tau \longrightarrow \begin{cases} x = x(\tau), \\ t = t(\tau), \end{cases}$$

¹ $()_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $()_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

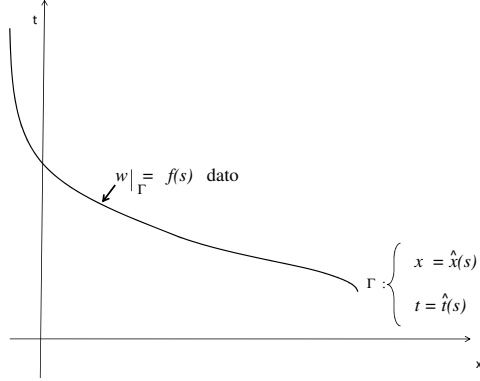


Figura 1: Curva Γ su cui è specificato il “dato iniziale”.

così definita

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = a(x(\tau), t(\tau)), \\ \frac{dx}{d\tau} = b(x(\tau), t(\tau)), \\ x|_{\tau=0} = \hat{x}(s), \\ t|_{\tau=0} = \hat{t}(s). \end{cases} \quad (3)$$

La curva \mathcal{C} viene detta **curva caratteristica** del sistema (2). Notiamo che, volendo essere precisi, dovremo indicare la curva \mathcal{C} come

$$\begin{cases} x(\tau, s), \\ t(\tau, s), \end{cases} \quad (4)$$

dal momento che il parametro s indica il “punto di partenza” di \mathcal{C} su Γ (variando s si cambia il punto di partenza e quindi si individua una diversa caratteristica). Il parametro τ invece individua i vari punti che si trovano sulla curva \mathcal{C} .

In particolare, con la (4) abbiamo definito un’applicazione, detta anche mappa, da $J \times I$ in un aperto di $E \subset \mathbb{R}^2$, che alla coppia $(\tau, s) \in J \times I$ associa un punto nel piano (giacente nell’aperto E), cioè

$$(\tau, s) \longrightarrow (x, t) \text{ dove } x = x(\tau, s) \text{ e } t = t(\tau, s). \quad (5)$$

Ci chiediamo adesso: tale applicazione è invertibile? Ovvero al generico punto (x, t) corrisponde una ed una sola coppia (τ, s) ? In termini geometrici questo vuol dire: dato il generico punto (x, t) per questo punto passa una e una sola caratteristica? Questo accadrà (almeno localmente) se il determinante della matrice jacobiana

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} x_\tau & x_s \\ t_\tau & t_s \end{pmatrix},$$

è non nullo, cioè $\det \mathbb{J} \neq 0$.

Possiamo verificare se tale proprietà è verificata per $\tau = 0$. Se così fosse, allora, esiste un intorno della curva Γ in cui l'invertibilità è garantita (si ipotizza infatti che tutte le funzioni coinvolte siano continue per cui vale il teorema della permanenza del segno). Infatti, tenendo presente la (3), quando $\tau = 0$ le derivate x_τ e t_τ sono facilmente calcolabili come del resto x_s e t_s dal momento che $x|_{\tau=0} = \hat{x}(s)$ e così $t|_{\tau=0} = \hat{t}(s)$. Abbiamo così

$$\begin{aligned} x_\tau|_{\tau=0} &= b(x|_{\tau=0}, t|_{\tau=0}) = b(\hat{x}(s), \hat{t}(s)), \\ t_\tau|_{\tau=0} &= a(x|_{\tau=0}, t|_{\tau=0}) = a(\hat{x}(s), \hat{t}(s)), \\ x_s|_{\tau=0} &= \frac{d\hat{x}(s)}{ds}, \\ t_s|_{\tau=0} &= \frac{d\hat{t}(s)}{ds}, \end{aligned}$$

per cui

$$\det \mathbb{J}|_{\tau=0} \neq 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} b & \hat{x}' \\ a & \hat{t}' \end{pmatrix} = b|_{\tau=0} \hat{t}' - a|_{\tau=0} \hat{x}' \neq 0. \quad (6)$$

Notiamo che la (6) ha un interessante significato geometrico. Infatti il vettore tangente alla curva \mathcal{C}

$$\mathbf{t}_1 = \frac{dx}{d\tau} \mathbf{e}_x + \frac{dt}{d\tau} \mathbf{e}_t = b(x(\tau), t(\tau)) \mathbf{e}_x + a(x(\tau), t(\tau)) \mathbf{e}_t,$$

e calcoliamolo per $\tau = 0$

$$\mathbf{t}_1|_{\tau=0} = b|_{\tau=0} \mathbf{e}_x + a|_{\tau=0} \mathbf{e}_t.$$

Il vettore tangente alla curva Γ è

$$\mathbf{t}_2 = \frac{d\hat{x}}{ds} \mathbf{e}_x + \frac{d\hat{t}}{ds} \mathbf{e}_t.$$

La (6) implica

$$\mathbf{t}_2 \wedge \mathbf{t}_1|_{\tau=0} \neq 0, \quad (7)$$

cioè $\mathbf{t}_1|_{\tau=0}$ e \mathbf{t}_2 non sono paralleli. La condizione che garantisce l'invertibilità dell'applicazione (5) è garantita (almeno localmente) se caratteristiche e curva Γ (curva su cui è definito il dato) non sono mai tangenti (v. figura 2).

Consideriamo adesso $w|_{\mathcal{C}}$, ovvero

$$w|_{\mathcal{C}} = w(\tau, s), \quad \text{con} \quad w(\tau, s) = w(x(\tau, s), t(\tau, s)),$$

dove $x(\tau, s)$, $t(\tau, s)$ sono le equazioni della caratteristica \mathcal{C} fuoriuscente dal punto $(x(s), t(s)) \in \Gamma$. Ricordando la (3) e la (2)₁ abbiamo

$$\begin{cases} \frac{dw}{d\tau} = w_x \frac{dx}{d\tau} + w_t \frac{dt}{d\tau} = aw_t + bw_x = 0, \\ w|_{\tau=0} = f(s). \end{cases}$$

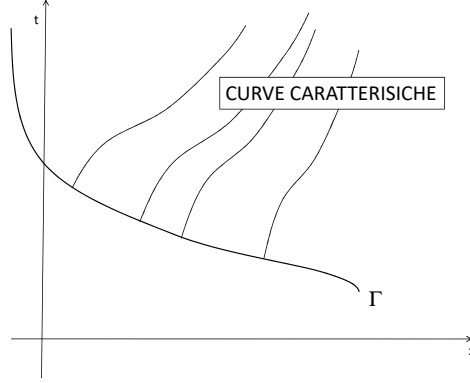


Figura 2: Curva Γ e curve caratteristiche \mathcal{C} .

Quindi

$$w(\tau) = f(s), \quad \forall \tau,$$

ovvero il “dato iniziale” viene propagato invariato lungo la caratteristica \mathcal{C} .

Ora, data l’invertibilità (almeno in un intorno della curva Γ) della (5) possiamo scrivere la soluzione del problema (2), cioè

$$w(x, t) = f(s(x, t)).$$

Consideriamo adesso il seguente problema

$$\begin{cases} w_t + b(w) w_x = 0, \\ w|_{t=0} = f(x). \end{cases} \quad (8)$$

Adesso la curva Γ è l’asse x

$$\Gamma : s \longrightarrow \begin{cases} x = s, \\ t = 0. \end{cases}$$

mentre le caratteristiche sono

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = 1, \\ \frac{dx}{d\tau} = b(w(\tau)), \\ x|_{\tau=0} = s, \\ t|_{\tau=0} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

e, lungo le caratteristiche, abbiamo

$$\begin{cases} \frac{dw}{d\tau} = 0, \\ w|_{\tau=0} = f(s), \end{cases} \Rightarrow w|_C = f(s),$$

ancora una volta w è costante lungo le caratteristiche.

Ritornando alla (9), questo può essere integrato sì da ottenere

$$\begin{cases} t = \tau, \\ x(\tau, s) = s + a(f(s))\tau. \end{cases}$$

Le caratteristiche nel piano x, t sono rette, che possiamo anche scrivere come

$$x = s + f(s)t, \Leftrightarrow t = \frac{x-s}{f(s)},$$

la cui pendenza dipende dal dato iniziale. E' banale osservare che le caratteristiche e curva Γ (cioè l'asse x) non sono mai tangenti (si suppone $a(w)$ limitata). La condizione (7) è verificata e quindi, almeno localmente, il sistema (8) è risolubile. Tuttavia, supponendo per semplicità, $a(w) = w$, abbiamo

$$x = s + f(s)t, \Leftrightarrow t = \frac{x-s}{f(s)},$$

$f(s) > 0$ e $f'(s) < 0$, la pendenza delle caratteristiche cresce e ciò può portare all'incrocio delle stesse, come mostrato in figura 3.

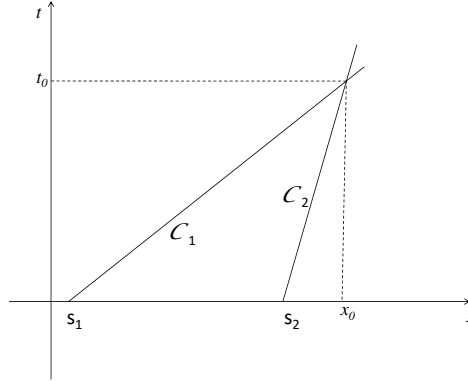


Figura 3: Incrocio delle due caratteristiche C_1 e C_2 . In questo caso $f(s) > 0$ e $f'(s) < 0$.

Riferendoci sempre alla figura 3, la caratteristica C_1 propaga (inalterato) il dato $f(s_1)$, mentre la caratteristica C_2 propaga il dato $f(s_2)$. Le due caratteristiche se incrociano in (x_0, t_0) . In tale punto la soluzione w ha due valori: $f(s_1)$ e $f(s_2)$. Si è dunque generata una discontinuità che in questo contesto viene anche detta **shock**.

2 Sistemi di equazioni del primo ordine di tipo iperbolico

Consideriamo adesso al sistema

$$\begin{cases} \mathbf{w}_t + \mathbb{B} \mathbf{w}_x = 0, \\ \mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{w}_0(x), \end{cases} \quad (10)$$

dove

$$\mathbf{w}(x, t) = \begin{pmatrix} w_1(x, t) \\ w_2(x, t) \\ \vdots \\ w_n(x, t) \end{pmatrix},$$

è il vettore delle n funzioni incognite,

$$\mathbf{w}_0(x) = \begin{pmatrix} w_{01}(x) \\ w_{02}(x) \\ \vdots \\ w_{0n}(x) \end{pmatrix},$$

è il dato iniziale (la curva Γ che porta i dati iniziali è la stesse per tutte le n incognite ed è l'asse x) e \mathbb{B} è una matrice $n \times n$, le cui componenti sono funzioni di x , t e \mathbf{w} , cioè

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}(x, t, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} b_{11}(x, t, \mathbf{w}) & b_{12}(x, t, \mathbf{w}) & \cdots & b_{1n}(x, t, \mathbf{w}) \\ b_{21}(x, t, \mathbf{w}) & b_{22}(x, t, \mathbf{w}) & \cdots & b_{2n}(x, t, \mathbf{w}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(x, t, \mathbf{w}) & b_{n2}(x, t, \mathbf{w}) & \cdots & b_{nn}(x, t, \mathbf{w}) \end{pmatrix},$$

sì che, scritto in componenti, il sistema (10) diventa

$$\begin{cases} \frac{\partial w_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n b_{ik} \frac{\partial w_k}{\partial x} = 0, & i = 1, \dots, n, \\ w_i(x, 0) = w_{0i}(x), & i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (11)$$

Il sistema è la generalizzazione della equazione (8).

Definizione 1. (Stretta iperbolicità) Il sistema (11) è detto **iperbolico** in $U \subset \mathbb{R}^n$ se gli autovalori di \mathbb{B} in U sono reali e **strettamente iperbolico** se essi sono inoltre distinti.

Si assume quindi che il sistema (11) è strettamente iperbolico: la matrice \mathbb{B} possiede $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalori reali e distinti e n autovettori linearmente indipendenti destri $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n\}$ e sinistri $\{\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n\}$, cioè

$$\mathbb{B} \mathbf{r}_i = \lambda_i \mathbf{r}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\mathbf{l}_i^T \mathbb{B} = \lambda_i \mathbf{l}_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ovvero

$$\mathbb{B}^T \mathbf{l}_i = \lambda_i \mathbf{l}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

La matrice \mathbb{B} non è in generale simmetrica quindi, benché \mathbb{B} e \mathbb{B}^T abbiano gli stessi autovalori² gli autovettori destri e sinistri sono, in generale, diversi (se \mathbb{B} fosse simmetrica allora $\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i$ e gli autovettori sarebbero anche ortogonali).

Per trattare il sistema (10) si ricorre ad un “trucco” vecchio quanto la matematica: il cambio di variabili. L’idea è quella di individuare n famiglie di curve caratteristiche \mathcal{C}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, e poi trovare nuove incognite R_1, \dots, R_n , (ciascuna delle quali sarà funzione delle vecchie w_1, \dots, w_n), ovvero

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_1 = R_1(w_1, \dots, w_n) \\ R_2 = R_2(w_1, \dots, w_n) \\ \vdots \\ R_n = R_n(w_1, \dots, w_n) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

che siano costanti su tali curve, ovvero R_i è costante sulle curve della famiglia \mathcal{C}_i (esattamente come fatto per il problema (8)). E’ evidente che dovremo richiedere che la trasformazione $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{w})$ sia invertibile, ovvero che si possa scrivere $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{R})$. Le nuove incognite R_1, \dots, R_n , sono dette **invarianti di Riemann**.

Si procede costruttivamente, definendo passo dopo passo sia la famiglia di caratteristiche \mathcal{C}_i che l’invariante R_i . Seguendo la procedura sviluppata per trattare il problema (8) andiamo alla ricerca della i -esima caratteristica come la curva del tipo

$$\mathcal{C}_i : \begin{cases} t = \tau, \\ x = x_i(\tau), \end{cases}$$

dove ancora non abbiamo specificato come trovare $x_i(\tau)$. Ora imponiamo che $R_i(x, t)$ sia costante lungo \mathcal{C}_i , cioè

$$\frac{dR_i(x_i(\tau), \tau)}{d\tau} = 0. \quad (13)$$

Omettendo adesso l’indice i per non appesantire la notazione (è sottinteso che ci riferiamo alla i -esima caratteristica) sfruttiamo la (12) e la (11) per calcolare la variazione

²Se λ_i è autovalore di \mathbb{A} allora lo è anche di \mathbb{A}^T . Infatti

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}^T - \lambda_i \mathbb{I}) &= \det(\mathbb{A}^T - \lambda_i \mathbb{I}^T) = \det(\mathbb{A} - \lambda_i \mathbb{I})^T \\ &= \det(\mathbb{A} - \lambda_i \mathbb{I}) = 0. \end{aligned}$$

di R lungo la caratteristica³

$$\begin{aligned}
\frac{dR(x(\tau), \tau)}{d\tau} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial R}{\partial w_j} \frac{\partial w_j}{\partial x} x'(\tau) + \frac{\partial R}{\partial w_j} \frac{\partial w_j}{\partial t} \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial R}{\partial w_j} \left[\left(- \sum_{k=1}^n b_{j \ k} \frac{\partial w_k}{\partial x} \right) + \frac{\partial w_j}{\partial x} x'(\tau) \right] \\
&= \sum_{j=1}^n - \frac{\partial R}{\partial w_j} \left[\sum_{k=1}^n \left(b_{j \ k} \frac{\partial w_k}{\partial x} - \frac{\partial w_k}{\partial x} \delta_{kj} x'(\tau) \right) \right] \\
&= \sum_{k=1}^n - \frac{\partial w_k}{\partial x} \left[\sum_{j=1}^n \left(b_{j \ k} \frac{\partial R}{\partial w_j} - \frac{\partial R}{\partial w_j} \delta_{kj} x'(\tau) \right) \right] \\
&= \sum_{k=1}^n - \frac{\partial w_k}{\partial x} \left[\sum_{j=1}^n \left(b_{k \ j}^T \frac{\partial R}{\partial w_j} - \delta_{kj} \frac{\partial R}{\partial w_j} x'(\tau) \right) \right].
\end{aligned}$$

Quindi $\frac{dR(x(\tau), \tau)}{d\tau} = 0$, se i termini in parentesi quadra si annullano, ovvero se

$$\mathbb{B}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial w_1} \\ \frac{\partial R}{\partial w_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial R}{\partial w_n} \end{pmatrix} = x'(\tau) \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial w_1} \\ \frac{\partial R}{\partial w_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial R}{\partial w_n} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Tornando ad inserire l'indice i , la (14) è verificata se

$$x'_i(\tau) = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ovvero se \mathcal{C}_i si ottiene risolvendo tale problema di Cauchy⁴

$$\mathcal{C}_i : \begin{cases} x'_i(\tau) = \lambda_i \\ x_i(0) = s, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

e detto l_i il relativo autovettore sinistro, cioè

$$l_i = \begin{pmatrix} l_{1 \ i} \\ l_{2 \ i} \\ \vdots \\ l_{n \ i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

³ δ_{kj} è la delta di Kroneker.

⁴Al variare di s si ottengono tutte le caratteristiche della famiglia \mathcal{C}_i .

L' i -esimo invariante di Riemann $R_i = R_i(w_1, w_2, \dots, w_n)$ si ottiene imponendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_i}{\partial w_1} = l_{1\ i}, \\ \frac{\partial R_i}{\partial w_2} = l_{2\ i}, \\ \vdots \\ \frac{\partial R_i}{\partial w_n} = l_{n\ i}, \end{array} \right. , \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

E' evidente che il sistema (15) è un sistema di equazioni differenziali che deve essere risolto per determinare gli invarianti di Riemann. In particolare, scrivendo esplicitamente la (41) si ha

$$0 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial R_i}{\partial w_k} \frac{dw_k}{d\tau} = \sum_{k=1}^n l_{k\ i} \frac{dw_k}{d\tau}.$$

Osserviamo che gli n invarianti $R_i = R_i(w_1, w_2, \dots, w_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, danno luogo ad una trasformazione invertibile. Se infatti calcoliamo la matrice Jacobiana \mathbb{J} di tale trasformazione si ha

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial w_1} & \frac{\partial R_2}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial R_n}{\partial w_1} \\ \frac{\partial R_1}{\partial w_2} & \frac{\partial R_2}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial R_n}{\partial w_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial R_1}{\partial w_n} & \frac{\partial R_2}{\partial w_n} & \dots & \frac{\partial R_n}{\partial w_n} \end{pmatrix} \stackrel{(15)}{=} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix}.$$

Dunque \mathbb{J} ha rango massimo (ovvero n) essendo, per ipotesi, gli n autovettori sinistri linearmente indipendenti.

Osserviamo però che questa procedura purtroppo non è molto utile in pratica. Infatti, gli n autovettori λ_i di \mathbb{B} dipendono, in generale, da x e t ma anche da tutte le incognite w_1, w_2, \dots, w_n , cioè

$$\lambda_i = \lambda_i(x, t, w_1, \dots, w_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ora se esprimiamo le incognite originarie w_i in termini degli invarianti di Riemann R_1, \dots, R_n , abbiamo

$$\lambda_i = \hat{\lambda}_i(x, t, R_1, \dots, R_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

dove $\hat{\lambda}_i(x, t, R_1, \dots, R_n) = \lambda_i(x, t, w_1(\mathbf{R}), \dots, w_n(\mathbf{R}))$. Le n equazioni che definiscono le n famiglie di caratteristiche \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, n$, sono dunque

$$\mathcal{C}_i : \begin{cases} x'_i(\tau) = \hat{\lambda}_i(x, t, R_1, \dots, R_n), \\ x_i(0) = s, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Ora, lungo \mathcal{C}_i l'invariante R_i è costante ma non lo sono gli altri $n - 1$ invarianti. Ciò complica notevolmente la soluzione delle n equazioni (16) che forniscono le caratteristiche e rende, in molti casi, il metodo inapplicabile.

Il metodo degli invarianti di Riemann è tuttavia molto efficace nel caso in cui, per qualche motivo, si conoscano le caratteristiche (il che può avvenire in taluni casi come spiegato nella successiva sezione). Infatti, dato un generico punto (x, t) si tracciano da esso tutte le n caratteristiche fino ad incontrare la retta dei dati iniziali (che è l'asse x). Lungo tali curve R_1, \dots, R_n , sono costanti per cui si può determinare il loro valore valutandoli nel punto d'inizio. Adesso è sufficiente invertire la trasformazione (12) per calcolare $w_1(x, t), \dots, w_n(x, t)$.

Infine rimarchiamo ancora che la procedura illustrata ha senso fino a che le caratteristiche non si intersecano (come, per esempio, avviene nella figura 3).

2.1 Regime di onda semplice

Consideriamo un sistema di due equazioni nelle due incognite w_1, w_2 , cioè

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \mathbb{B} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (17)$$

con $\mathbb{B} = \mathbb{B}(w)$. I due autovalori $\lambda_i, i = 1, 2$, dipendono quindi soltanto da w_1, w_2 . Se dunque R_1 e R_2 sono i due invarianti di Riemann, riprendendo la notazione della sezione precedente, le due caratteristiche si ottengono risolvendo

$$\mathcal{C}_i : \begin{cases} x'_i(\tau) = \hat{\lambda}_i(R_1, R_2), \\ x_i(0) = s, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Definizione 2. Si dice che la regione Θ del piano x, t è uno **stato costante**, se R_1, R_2 sono costanti⁵ in Θ . Un'onda semplice è una regione S del piano x, t , dove almeno uno dei due invarianti di Riemann è costante. Per esser più precisi, parleremo di **onda semplice** $S_i, i = 1, 2$, se R_i è costante è costante nella regione S_i .

Ora se in S_1 l'invariante R_1 è costante, allora in tale regione le caratteristiche \mathcal{C}_2 sono rette. Infatti lungo qualsiasi \mathcal{C}_2 l'invariante R_2 è costante e quindi l'equazione della generica \mathcal{C}_2 è⁶

$$\mathcal{C}_2 : \begin{cases} x'_2(\tau) = \hat{\lambda}_2(R_1, R_2(s)), \\ x_2(0) = s, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_2(s, \tau) = s + \hat{\lambda}_2(R_1, R_2(s)) \tau,$$

che, nel piano x, t rappresenta una retta di pendenza $1/\hat{\lambda}_2(R_1, R_2(s))$ che interseca l'asse x nell'ascissa s .

Facendo riferimento alla figura 4, supponiamo che la curva σ limiti uno stato costante Θ (si assume inoltre che Θ sia la più grande regione dove R_1 e R_2 sono costanti). Se \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 non sono parallele, una delle due deve intersecare σ . Supponiamo, per fissare le idee, che le caratteristiche \mathcal{C}_1 intersechino σ . Di conseguenza la regione adiacente

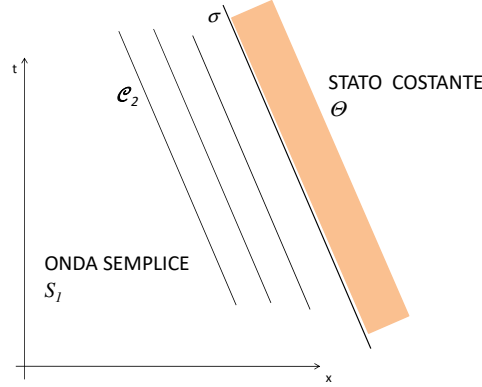


Figura 4: Stato costante Θ delimitato dalla curva σ . Se le caratteristiche \mathcal{C}_1 non sono parallele a σ , la regione adiacente a Θ è un'onda semplice S_1 . Di conseguenza qui le caratteristiche \mathcal{C}_2 sono rette e nessuna caratteristica della famiglia \mathcal{C}_2 può intesecarsi con σ . Nella figura le caratteristiche \mathcal{C}_2 sono parallele a σ . In generale questo non è necessario. Questo implica soltanto che σ è di fatto una caratteristica della famiglia \mathcal{C}_2 . Il bordo di Θ è, in generale, composto da linee rette.

a Θ è un'onda semplice S_1 , perchè qui R_1 è costante. Le caratteristiche \mathcal{C}_2 sono dunque rette.

Non solo, ma se le caratteristiche \mathcal{C}_2 intersecassero il bordo σ (come non avviene in figura 4) allora la stessa regione adiacente diventerebbe anche un'onda semplice S_2 , e quindi sarebbe ancora stato costante (contro l'ipotesi che Θ sia la più grande regione dove R_1 e R_2 sono costanti). Quindi se lo stato costante è realmente la regione Θ allora non possono esserci intersezioni fra σ e le rette \mathcal{C}_2 . In altri termini, σ deve essere o una retta caratteristica \mathcal{C}_2 . In generale, il bordo di uno stato costante Θ è composto da segmenti di rette (ovvero da segmenti di caratteristiche)

Nelle sezioni 3 useremo la strategia appena illustrata per determinare la soluzione analitica di due famosi problemi. E' doveroso ricordare che possiamo ricorrere a tale strategia perché siamo in una situazione in cui le caratteristiche non si incrociano.

3 Il problema del pistone: flusso 1D non stazionario

Si suppone che un gas (che assumeremo comportarsi come un fluido ideale) sia a riposo, $u \equiv 0$, con densità ρ_0 e velocità del suono c_0 , nella porzione $x < 0$ di un tubo $-\infty < x < \infty$ che presenta un pistone localizzato, a $t = 0$, in $x = 0$. Per $t > 0$ il pistone si muove nel verso positivo delle x . E' nota la legge oraria $X(t)$ con cui si

⁵Osserviamo che se R_1 e R_2 sono costanti in Θ , allora lo saranno anche le variabili originarie w_1 e w_2 .

⁶Si ricorda ancora che $\tau = t$.

muove il pistone. In particolare si assume

$$X(0) = \dot{X}(0) = 0, \quad (18)$$

e $\dot{X}(t) > 0$. Il gas, che si trova in $-\infty < x < X(t)$, subisce dunque un'espansione⁷ ed il flusso è chiaramente omoentropico.

Scrivendo il sistema (1)₁ nella forma (17) abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} + \mathbb{B} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} = 0, \quad (19)$$

dove

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} u & \rho \\ c^2/\rho & u \end{pmatrix},$$

dove la velocità del suono c , espressa in termini di ρ , è

$$c(\rho) = \gamma^{1/2} A^{1/2} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}. \quad (20)$$

I due autovalori di \mathbb{B} sono

$$\begin{cases} \lambda_+ = u + c, \\ \lambda_- = u - c, \end{cases} \quad (21)$$

che, in maniera compatta, scriveremo come $u \pm c$. I due autovettori di \mathbb{B}^T si ottengono risolvendo

$$\begin{pmatrix} u & c^2/\rho \\ \rho & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \pm \\ l_2 \pm \end{pmatrix} = (u \pm c) \begin{pmatrix} l_1 \pm \\ l_2 \pm \end{pmatrix},$$

da cui

$$\begin{aligned} (u + c) &\longrightarrow \begin{pmatrix} c/\rho \\ 1 \end{pmatrix}, \\ (u - c) &\longrightarrow \begin{pmatrix} -c/\rho \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Gli invarianti di Riemann si ottengono risolvendo le seguenti equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial R_+}{\partial \rho} = \frac{c(\rho)}{\rho} \\ \frac{\partial R_+}{\partial u} = 1, \end{cases} \Rightarrow R_+ = u + \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = u + \frac{2c}{\gamma-1}, \quad (22)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial R_-}{\partial \rho} = -\frac{c(\rho)}{\rho} \\ \frac{\partial R_-}{\partial u} = 1, \end{cases} \Rightarrow R_- = u - \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = u - \frac{2c}{\gamma-1}, \quad (23)$$

⁷Per ipotesi $\dot{X}(t) > 0$.

da cui si ricavano u e c in termini di R_+ e R_- , cioè⁸

$$u = \frac{R_+ + R_-}{2}, \quad (24)$$

$$c = \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{R_+ - R_-}{2} \right). \quad (25)$$

3.1 Regime regolare: ipotesi (18) verificata

Passiamo adesso ad analizzare il problema del pistone. Per $x \leq 0$ e $t \leq 0$ abbiamo uno stato costante essendo $u = 0$ e $\rho = \rho_0$. Le due famiglie caratteristiche \mathcal{C}_+ e \mathcal{C}_- , che escono dal semiasse negativo delle x hanno inclinazione costante $\pm c_0$, dove $c_0 = \gamma^{1/2} A^{1/2} \rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}}$. Quindi in qualsiasi punto che si trova nella regione

$$\Theta = \left\{ x \leq 0, t \leq -\frac{x}{c_0} \right\},$$

abbiamo $u = 0$ e $\rho = \rho_0$. Ne segue che la regione Θ , evidenziata nella figura 5, è uno stato costante. Notiamo anche che, come già osservato nella sezione 2.1, il bordo superiore di Θ è dato dalla retta $x = -c_0 t$, ovvero una caratteristica della famiglia \mathcal{C}_- .

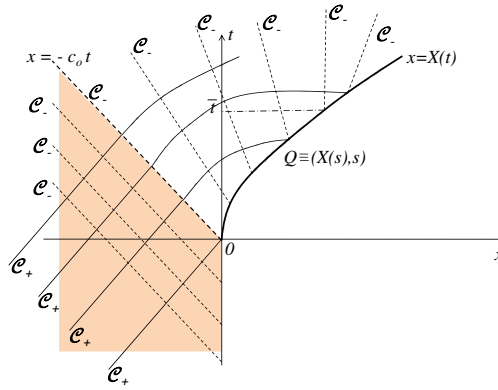


Figura 5: Lo stato costante Θ (porzione del piano evidenziata) è delimitato superiormente dalla retta $x = -c_0 t$. La situazione rappresentata in figura corrisponde al caso 1, cioè $\dot{X} \leq \frac{2c_0}{\gamma - 1}$. In particolare, la figura si riferisce alla situazione in cui esiste \bar{t} tale che la (36) è verificata. Infatti la caratteristica \mathcal{C}_- che emerge dal punto $(X(\bar{t}), \bar{t})$ è verticale.

⁸Si rimarca che c va sempre inteso come $c(\rho)$ dato dalla (20).

Lo stato costante è delimitato superiormente dalla retta $x = -c_0 t$, che incrocia le caratteristiche della famiglia \mathcal{C}_+ , avendo esse inclinazione c_0 . Dunque la regione adiacente allo stato costante, ovvero la regione

$$S_+ = \{t > 0, -c_0 t < x \leq X(t)\},$$

è un'onda semplice. In essa l'invariante R_+ è costante e pari al valore che aveva nella regione Θ . Quindi

$$R_+ = \frac{2c_0}{\gamma - 1}, \quad \forall (x, t) \in S_+, \quad (26)$$

ovvero

$$u + \frac{2c}{\gamma - 1} = \frac{2c_0}{\gamma - 1}, \quad \forall (x, t) \in S_+.$$

Quando le caratteristiche della famiglia \mathcal{C}_+ intersecano la curva $x = X(t)$ (come avviene in figura 5) avremo

$$\dot{X}(t) + \frac{2c|_{X(t)}}{\gamma - 1} = \frac{2c_0}{\gamma - 1}, \implies c|_{X(t)} = c_0 - \frac{\gamma - 1}{2} \dot{X}, \quad (27)$$

siccome $u|_{X(t)} = \dot{X}(t)$. Ora, poiché c deve essere sempre non negativo, è necessario che

$$c_0 - \frac{\gamma - 1}{2} \dot{X} \geq 0, \implies \dot{X} \leq \frac{2c_0}{\gamma - 1}.$$

Si distinguono quindi due casi: $\dot{X} \leq \frac{2c_0}{\gamma - 1}$ per ogni t , oppure esiste un \hat{t} tale che $\dot{X}(\hat{t}) = \frac{2c_0}{\gamma - 1}$ e $\dot{X}(t) > \frac{2c_0}{\gamma - 1}$ per $t > \hat{t}$. In quest'ultimo caso le intersezioni fra le caratteristiche della famiglia \mathcal{C}_+ e la curva $x = X(t)$ si avranno soltanto per $t \leq \hat{t}$.

Primo caso: $\dot{X} \leq \frac{2c_0}{\gamma - 1}, \forall t \geq 0$. Questa è la situazione rappresentata nella figura 5. Le caratteristiche della famiglia \mathcal{C}_- sono rette (ovviamente non intersecanti la retta $x = -c_0 t$) che partono dalla curva $x = X(t)$. Su ognuna di tali rette, R_- è costante. Fissiamo quindi la caratteristica \mathcal{C}_- che parte dal generico punto $Q \equiv (X(s), s)$, con $s \in [0, +\infty)$. Su di essa R_- è costante e pari ad $R_-(s)$ e quindi, ricordando (24), (25) e (26), anche u e c saranno costanti, cioè

$$u(s) = \frac{c_0}{\gamma - 1} + \frac{R_-(s)}{2}, \quad (28)$$

$$c(s) = \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{c_0}{\gamma - 1} - \frac{R_-(s)}{2} \right). \quad (29)$$

Valutando adesso la (28) nel punto di partenza della caratteristica, cioè nel punto Q , si ricava il valore di $R_-(s)$,

$$R_-(s) = -\frac{2c_0}{\gamma - 1} + 2\dot{X}(s), \quad (30)$$

siccome $u(Q) = \dot{X}(s)$. Sostituendo la (30) in (28) e (29) si ha

$$\begin{cases} u(s) = \dot{X}(s), \\ c(s) = c_0 - \frac{\gamma-1}{2} \dot{X}(s), \end{cases} \quad s \in [0, +\infty). \quad (31)$$

Se adesso vogliamo determinare l'espressione di u e c in termini di x e t , dobbiamo esprimere s in termini di x, t . Per far questo ci ricordiamo che la caratteristica \mathcal{C}_- che esce dal punto Q è una retta il cui coefficiente angolare è λ_- , ovvero è rappresentata da un'equazione del tipo

$$x - X(s) = \lambda_-(s)(t - s), \quad \text{con } s \in [0, +\infty). \quad (32)$$

Riprendendo la (21)₂ dove sostituiamo le (31) si ha

$$\lambda_-(s) = \frac{1+\gamma}{2} \dot{X}(s) - c_0, \quad (33)$$

che, inserita nella (32), dà luogo a

$$x - X(s) = \left(\frac{1+\gamma}{2} \dot{X}(s) - c_0 \right) (t - s). \quad (34)$$

Questa è proprio la relazione dovremo utilizzare per esprimere s in funzione di x, t . Ovviamente non sempre sarà possibile esplicitare s in termini di x, t , però, in generale, possiamo sempre esprimere la soluzione nella regione S_+ nella seguente forma parametrica

$$\begin{cases} u(s) = \dot{X}(s), \\ c(s) = c_0 - \frac{\gamma-1}{2} \dot{X}(s), \\ x - X(s) = \left(\frac{1+\gamma}{2} \dot{X}(s) - c_0 \right) (t - s), \end{cases} \quad s \in [0, +\infty). \quad (35)$$

E' interessante valutare la pendenza delle rette⁹ della famiglia \mathcal{C}_- . Dalla (33) si ha $\lambda_-(0) = -c_0$, e quindi la pendenza iniziale è negativa. Se esiste \bar{t} per cui¹⁰

$$\dot{X}(\bar{t}) = \frac{2c_0}{\gamma+1}, \quad (36)$$

allora $\lambda_-|_{s=\bar{t}} = 0$, che corrisponde ad una caratteristica verticale. Per $s > \bar{t}$ la pendenza delle \mathcal{C}_- diventa positiva.

⁹Si ricorda ancora che le caratteristiche della famiglia \mathcal{C}_- sono rette.

¹⁰Evidentemente $\dot{X}(\bar{t}) < \frac{2c_0}{\gamma-1}$.

Prima di passare al caso 2 spieghiamo il perchè dell'ipotesi (18). Sappiamo che il bordo di Θ è una caratteristica della famiglia \mathcal{C}_- . Se adesso consideriamo il bordo dell'onda semplice S_- , osserviamo che anch'esso è costituito da una caratteristica della famiglia \mathcal{C}_- . Infatti nella regione S_+ le rette della famiglia \mathcal{C}_- sono date dalla (34) e quindi la caratteristica che esce dall'origine O (ovviamente corrispondente a $s = 0$) è

$$x - X(0) = \left(\frac{1+\gamma}{2} \dot{X}(0) - c_0 \right) t.$$

Essa coincide con la retta $x = -c_0 t$ soltanto se l'ipotesi (18) è verificata. Se ciò non avviene (perché per esempio $\dot{X}(0) > 0$) allora la rappresentazione data in figura 5 non è corretta (tale caso lo analizzeremo nel paragrafo 3.2). Quindi, dal punto di vista geometrico, l'ipotesi (18) vuol dire che stato stazionario Θ e regime di onda semplice S_+ sono uno attaccato all'altro.

Secondo caso: $\dot{X}(\hat{t}) = \frac{2c_0}{\gamma-1}$, e $\dot{X}(t) > \frac{2c_0}{\gamma-1}$, per $t > \hat{t}$. Al tempo \hat{t} si crea un distacco fra il gas ed il pistone. Infatti, calcolando la (27) per $t = \hat{t}$, si ha

$$c(\hat{t}) = 0, \Rightarrow \rho(\hat{t}) = 0,$$

e

$$\lambda_+|_{\hat{t}} = \lambda_-|_{\hat{t}} = \frac{2c_0}{\gamma-1},$$

ovvero le due caratteristiche \mathcal{C}_- e \mathcal{C}_+ vanno a coincidere per $t > \hat{t}$, e quindi nella regione fra tali caratteristiche e la curva $X(t)$ non è propagato alcun valore di u e di c : questa regione è vuota. In particolare, sulle due caratteristiche coincidenti è propagato $c = 0$, che corrisponde a $\rho = 0$ (vuoto). Nel piano x, t la regione vuota si trova quindi fra $X(t)$ e la retta $x - X(\hat{t}) = \frac{2c_0}{\gamma-1}(t - \hat{t})$.

Facendo poi riferimento alla figura 6, notiamo che le caratteristiche \mathcal{C}_- hanno pendenza pari a $-c_0$ all'inizio, diventano verticali $t = \bar{t}$ (che in questo caso esiste sicuramente), ed infine raggiungono la massima pendenza positiva $\frac{2c_0}{\gamma-1}$. La costruzione della soluzione è identica al caso precedente. L'andamento schematico di ρ in funzione di x (per t fissato) è riportato nella figura 7.

3.2 Moto impulsivo del pistone

Supponiamo adesso che

$$X(t) = Vt,$$

sì che $X(0) = 0$, ma $\dot{X}(0) = V > 0$. L'ipotesi (18) non è dunque verificata. Si assume poi che $V < \frac{2c_0}{\gamma-1}$, così che non si formano regioni vuote. Applicando la (34) è facile determinare la caratteristica della famiglia \mathcal{C}_- che parte dall'origine

$$x = \left(-c_0 + \frac{1+\gamma}{2} V \right) Vt,$$

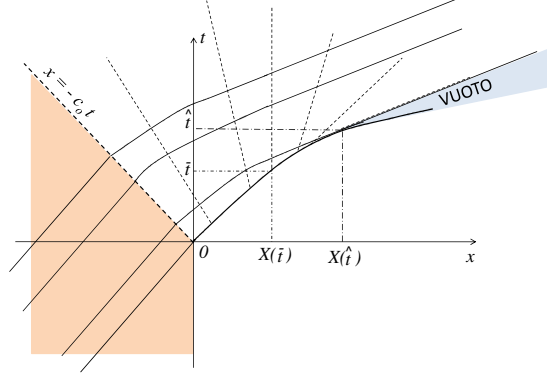


Figura 6: Secondo caso: $\dot{X}(\hat{t}) = \frac{2c_0}{\gamma-1}$, e $\dot{X}(t) > \frac{2c_0}{\gamma-1}$, per $t > \hat{t}$. Si nota la formazione di una regione vuota a partire da \hat{t} .

che si trova a destra della $x = -c_0 t$. Lo stato stazionario Θ non è dunque propriamente adiacente all'onda semplice S_+ , essendoci una sorta di regione triangolare che li divide. Tale regione è detta **regione di espansione a ventaglio** o **onda di rarefazione**, denominata

$$E = \left\{ t > 0, \quad -c_0 t < x < -c_0 \left(1 - \frac{1+\gamma}{2} V \right) t \right\}.$$

Cominciamo la nostra analisi dalla regione S_+ che adesso diventa

$$S_+ = \left\{ t > 0, \quad -c_0 \left(1 - \frac{1+\gamma}{2} V \right) t < x < Vt \right\}.$$

Siccome $\dot{X}(t) = V$, dalla (35) abbiamo

$$\begin{cases} u(s) = V, \\ c(s) = c_0 - \frac{\gamma-1}{2} V, \\ x - Vs = \left(\frac{1+\gamma}{2} V - c_0 \right) (t - s). \end{cases} \quad (37)$$

Quindi, su ogni caratteristica della famiglia \mathcal{C}_- , l'invariante di Riemann R_- (23) è costante¹¹

$$R_- = 2 \left(V - \frac{c_0}{\gamma-1} \right).$$

¹¹Si osserva che se calcoliamo il primo invariante di Riemann per mezzo delle (22), (37)₁ e (37)₂ otteniamo che questo è costantemente uguale a $\frac{2c_0}{\gamma-1}$, cioè il valore dato dalla (26).

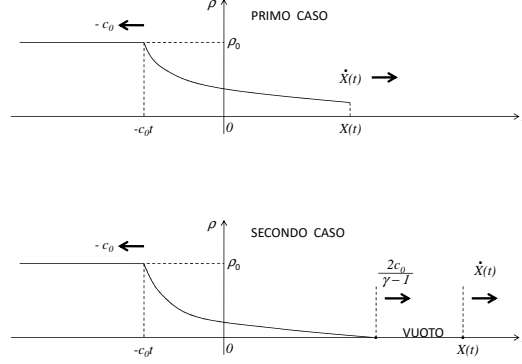


Figura 7: Andamento spaziale di ρ (t è fissato) nel primo e nel secondo caso. Per quel che riguarda il secondo caso, $t > \hat{t}$.

Ma allora la regione S_+ non è un'onda semplice bensì uno stato stazionario, dove entrambe gli invarianti Riemann sono costanti. Di conseguenza la regione di espansione a ventaglio, è un'onda semplice S_+ , dove le caratteristiche della famiglia \mathcal{C}_- sono rette. L'unica possibilità è dunque che la famiglia \mathcal{C}_- sia costituita da un fascio di rette centrato nell'origine (come in figura 8), la cui equazione è

$$x = \lambda_-(s) t, \quad \Rightarrow \quad \lambda_-(s) = \frac{x}{t},$$

dove $\lambda_-(s)$ varia, al variare di s in un certo intervallo $I \subset \mathbb{R}$, fra $-c_0$ e $-c_0 \left(1 - \frac{1+\gamma}{2} V\right)$.

Se ora ricordiamo la (21)₂, ovvero

$$u - c = \lambda_-(s) = \frac{x}{t}, \quad \forall (x, t) \in E, \quad (38)$$

ed il fatto che il primo invariante R_+ è costante nella regione E (essendo questo un'onda semplice di tipo S_+) abbiamo

$$R_+ = \frac{2c_0}{\gamma - 1}, \quad \forall (x, t) \in E. \quad (39)$$

Quindi mettendo a sistem la (38) e la (39) si ottengono u e c in termini di x e t , cioè

$$\begin{cases} u(x, t) = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{x}{t} + c_0 \right), \\ c(x, t) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(\frac{2c_0}{\gamma - 1} - \frac{x}{t} \right), \end{cases} \quad \forall (x, t) \in E.$$

Nel caso in cui il pistone si muove verso il fluido, cioè $\dot{X}(t) < 0$, la situazione è completamente differente. Le caratteristiche sono destinate ad incrociarsi e quindi il metodo di soluzione appena illustrato non è efficace.

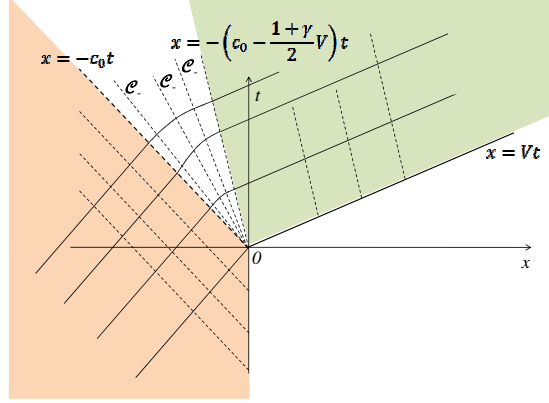


Figura 8: Le regioni adiacenti ad E , sono stati costanti. Le caratteristiche C_- in E costituiscono un fascio di rette centrate nell'origine.

4 Flusso bidimensionale stazionario

Consideriamo adesso un flusso omoentropico stazionario bidimensionale

$$\mathbf{u}(x, y) = u(x, y) \mathbf{e}_x + v(x, y) \mathbf{e}_y. \quad (40)$$

Il sistema di equazioni è

$$\begin{cases} (\rho u)_x + (\rho v)_y = 0, \\ u u_x + v u_y + \frac{c^2}{\rho} \rho_x = 0, \\ u v_x + v v_y + \frac{c^2}{\rho} \rho_y = 0. \end{cases}$$

Eliminando ρ_x e ρ_y , si giunge a questa equazione

$$(c^2 - u^2) u_x - uv(u_y + v_x) + (c^2 - v^2) v_y = 0,$$

dove c^2 si esprime tramite il teorema di Bernulli (e non in termini di ρ) cioè

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} (u^2 + v^2), \quad (41)$$

dove c_0^2 è il valore della velocità del suono quando la velocità del fluido è annullata in maniera omoentropica. Il flusso è omoentropico e quindi irrotazionale, cioè

$$u_y - v_x = 0.$$

Abbiamo pertanto questo sistema iperbolico

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c^2 - u^2 & -uv \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x + \underbrace{\begin{pmatrix} -uv & c^2 - v^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_y = 0.$$

Siccome \mathbb{A} è invertibile, moltiplicando a sinistra per \mathbb{A}^{-1} , otteniamo¹²

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x + \underbrace{\frac{1}{c^2 - u^2} \begin{pmatrix} -2uv & c^2 - v^2 \\ u^2 - c^2 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{B}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_y = 0,$$

ovvero un sistema nella forma (17). I due autovalori di \mathbb{B} sono

$$\lambda_{\pm} = \frac{-uv \pm c\sqrt{u^2 + v^2 - c^2}}{c^2 - u^2}, \quad (42)$$

ed i relativi autovettori di \mathbb{B}^T sono

$$\begin{aligned} \lambda_+ &\rightarrow \begin{pmatrix} c^2 - u^2 \\ -(uv + c\sqrt{u^2 + v^2 - c^2}) \end{pmatrix}, \\ \lambda_- &\rightarrow \begin{pmatrix} c^2 - u^2 \\ -(uv - c\sqrt{u^2 + v^2 - c^2}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notiamo che il sistema è iperbolico (nel senso della definizione 1) se il flusso è supersonico. Noi quindi faremo l'ipotesi

$$u^2 + v^2 > c^2.$$

Per quel che riguarda gli invarianti di Riemann, abbiamo

$$\begin{cases} \frac{\partial R_{\pm}}{\partial u} = c^2 - u^2, \\ \frac{\partial R_{\pm}}{\partial v} = -(uv \pm c\sqrt{u^2 + v^2 - c^2}), \end{cases}$$

cioè¹³

$$R_{\pm} = \int (c^2 - u^2) du - \int (uv \pm c\sqrt{u^2 + v^2 - c^2}) dv, \quad (43)$$

e

$$dR_{\pm} = (c^2 - u^2) du - (uv \pm c\sqrt{u^2 + v^2 - c^2}) dv = 0. \quad (44)$$

¹²Ricordiamo che c^2 non è costante ma è una funzione di u e v data dalla (41).

¹³Si ricordi che $c = c(u, v)$ è data dalla (41).

Concentriamoci sull'equazione delle caratteristiche. In analogia col caso precedente leggiamo pensiamo a quest'ultime come curve del tipo $y(x)$. Quindi le due famiglie \mathcal{C}_\pm si ottengono risolvendo

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \lambda_\pm \stackrel{(42)}{=} \frac{-uv \pm c\sqrt{u^2 + v^2 - c^2}}{c^2 - u^2}, \\ y(x_o) = y_o. \end{cases} \quad (45)$$

Introducendo

$$U = \frac{u}{c}, \quad V = \frac{v}{c}, \quad (46)$$

la (45)₁ si riscrive come

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-UV \pm \sqrt{U^2 + V^2 - 1}}{1 - U^2} = \frac{-UV \pm \sqrt{U^2 V^2 - (1 - U^2)(1 - V^2)}}{1 - U^2},$$

ovvero, ponendo

$$B = UV, \quad A = (1 - U^2) \quad \text{e} \quad C = (1 - V^2), \quad (47)$$

come

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2B \left(\frac{dy}{dx} \right) + C = 0. \quad (48)$$

Se adesso parametrizziamo le caratteristiche delle famiglie \mathcal{C}_\pm in funzione del parametro s , ascissa curvilinea, cioè

$$\mathcal{C}_\pm : \begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases}$$

abbiamo $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}$, intendendo con $y'(s) = \frac{dy(s)}{ds}$ e con $x'(s) = \frac{dx(s)}{ds}$. Sostituendo allora nella (48) otteniamo

$$Ay'^2 + 2Bx'y' + Cx'^2 = 0.$$

Ricordando adesso le (46) e (47), la precedente equazione dà luogo a

$$\left(\frac{u}{c}y' - \frac{v}{c}x' \right)^2 = x'^2 + y'^2. \quad (49)$$

Ora, la peculiarità della parametrizzazione tramite l'ascissa curvilinea è che il vettore tangente alla curva ha lunghezza uno, ovvero

$$|t| = 1, \quad \text{con} \quad t = x'(s) e_x + y'(s) e_y.$$

Allora dalla (49) ricaviamo

$$(uy' - vx')^2 = c^2, \quad \Rightarrow \quad uy' - vx' = \pm c.$$

$\text{Ma} (uy' - vx')$ è la componente (verticale) di $\mathbf{u} \wedge \mathbf{t}$, essendo \mathbf{u} il campo di velocità (40). Del resto

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{t} = |\mathbf{u}| \underbrace{|\mathbf{t}|}_1 \sin \mu \mathbf{e}_z .$$

L'angolo μ è dunque l'angolo fra il vettore velocità e le caratteristiche. Più in generale, siccome siamo in condizioni stazionarie, μ è l'angolo fra le linee di campo del vettore \mathbf{u} (che sono anche le traiettorie delle particelle) e le caratteristiche. Tale angolo viene detto **angolo di Mach**. Ricordando la definizione del numero di Mach, $\text{Ma} = \frac{|\mathbf{u}|}{c}$, da un semplice confronto si deduce¹⁴

$$|\mathbf{u}| \sin \mu = \pm c, \quad \Rightarrow \quad \sin \mu = \pm \frac{1}{\text{Ma}}, \quad (50)$$

cioè

$$\mu = \pm \arcsin \left(\frac{1}{\text{Ma}} \right), \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < \mu < \frac{\pi}{2}.$$

Quindi, in ogni punto, le due caratteristiche \mathcal{C}_+ e \mathcal{C}_- formano lo stesso angolo (in valore assoluto) con la linea di flusso, uno però positivo ed uno negativo (si veda la figura 9). In tale contesto, la caratteristica \mathcal{C}_+ viene anche detta **linea di Mach positiva**, mentre la caratteristica \mathcal{C}_- **linea di Mach negativa**. Per la precisione, le linee di Mach sono definite come quelle curve che, punto per punto, formano un angolo pari a μ e $-\mu$ con le linee di corrente. In tal caso dunque linee di Mach e caratteristiche coincidono.

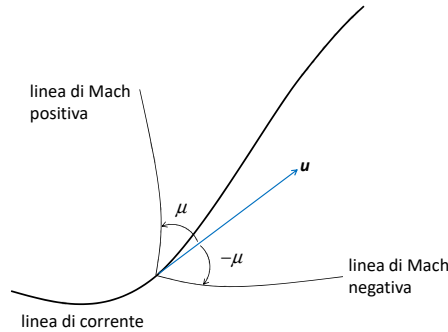


Figura 9: Caratteristiche o linee di Mach.

Passiamo adesso a calcolare gli invarianti di Riemann. Determinare quest'ultimi in termini delle variabili u e v è complicato. Conviene fare un cambio di variabili

$$(u, v) \longleftrightarrow (q, \theta)$$

¹⁴Notiamo che affinché la teoria fin qui sviluppata sia consistente è necessario che $\frac{1}{\text{Ma}} \leq 1$, ovvero che il flusso sia supersonico.

ponendo

$$\begin{cases} u = q \cos \theta, \\ v = q \sin \theta, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \arctan \frac{v}{u}, \\ q = \sqrt{u^2 + v^2}. \end{cases} \quad (51)$$

Quindi, tenendo conto del fatto che

$$du = \cos \theta dq - q \sin \theta d\theta, \quad dv = \sin \theta dq + q \cos \theta d\theta,$$

sostituendo nella (44) si ha

$$dR_{\pm} = c^2 \left[\pm \sqrt{\text{Ma}^2 - 1} dq + q d\theta \right] \left(-\sin \theta \mp \cos \theta \sqrt{\text{Ma}^2 - 1} \right) = 0,$$

da cui banalmente discende

$$d\theta = \mp \sqrt{\text{Ma}^2 - 1} \frac{dq}{q}, \quad (52)$$

dove

$$\text{Ma}^2 = \frac{q^2}{c^2} \stackrel{(41)}{=} \frac{q^2}{c_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} q^2}. \quad (53)$$

L'integrazione della (52), una volta sostituita in essa la (53) diventa particolarmente laboriosa. Conviene dunque esprimere dq/q in termini di $d\text{Ma}$ e di Ma . Per far ciò si ricorre ancora alla (41) che riscriviamo come

$$\frac{q^2}{\text{Ma}^2} = c_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} q^2, \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\text{Ma}^2} = \frac{c_0^2}{q^2} - \frac{\gamma - 1}{2}, \\ q^2 = \frac{c_0^2}{\frac{1}{\text{Ma}^2} + \frac{\gamma - 1}{2}}, \end{cases} \quad (54)$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{dq}{q} &= \frac{1}{c_0^2} \frac{q^2}{\text{Ma}^2} \frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} \stackrel{(54)}{=} \frac{1}{c_0^2} \left(c_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} q^2 \right) \frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} \\ &\stackrel{(54)}{=} \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2} \frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}}. \end{aligned}$$

Riprendendo la (52) si ha

$$d\theta = \mp \frac{\sqrt{\text{Ma}^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2} \frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}}.$$

I due invarianti di Riemann sono dunque

$$R_{\pm} = \theta \pm \int \frac{\sqrt{\text{Ma}^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma}^2} \frac{d\text{Ma}}{\text{Ma}} = \theta \pm \nu(\text{Ma}),$$

dove ν (Ma) viene detta **funzione di Prandtl-Meyer**

$$\nu(\text{Ma}) = \frac{1}{\lambda} \arctan\left(\lambda \sqrt{\text{Ma}^2 - 1}\right) - \arctan \sqrt{\text{Ma}^2 - 1}, \quad (55)$$

dove¹⁵

$$\lambda^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

L'andamento di ν (Ma) è riportato in figura 10

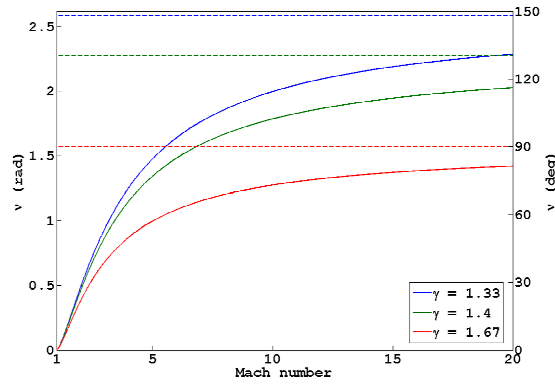


Figura 10: Funzione di Prandtl-Meyer (55).

Si possono anche dare gli invarianti di Riemann in termini dell'angolo di Mach (50). Infatti, ricordando la nota formula

$$\arctan \delta + \arctan \frac{1}{\delta} = \frac{\pi}{2},$$

si ha

$$\nu(\mu) = f(\mu) - \frac{\pi}{2}, \quad (56)$$

dove

$$f(\mu) = \mu + \frac{1}{\lambda} \arctan\left(\frac{\lambda}{\tan \mu}\right), \quad (57)$$

che è definita per $\mu \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Quindi,

$$\text{caratteristica } \mathcal{C}_+ \rightarrow R_+ = \theta + \nu(\mu) = \theta + f(\mu) - \frac{\pi}{2},$$

$$\text{caratteristica } \mathcal{C}_- \rightarrow R_- = \theta - \nu(\mu) = \theta - f(\mu) + \frac{\pi}{2}.$$

¹⁵Si osservi che $0 < \lambda < 1$.

Siccome $\lambda < 1$, se consideriamo dapprima $\mu \in (0, \pi/2)$, la funzione $f(\mu)$ è monotona decrescente (così come lo è $\nu(\mu)$) ed è compresa

$$\frac{\pi}{2} < f(\mu) < \frac{\pi}{2\lambda},$$

mentre la ν è compresa fra

$$0 < \nu(\mu) < \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right).$$

Viceversa, se $\mu \in (-\pi/2, 0)$, la funzione $f(\mu)$ e $\nu(\mu)$ sono ancora monotone decrescenti e sono comprese fra

$$-\frac{\pi}{2\lambda} < f(\mu) < -\frac{\pi}{2}, \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + 1 \right) < \nu(\mu) < -\pi.$$

Per concludere, vediamo come esprimere l'equazione delle caratteristiche (45), in termini degli angoli θ e μ . Ricordando la (50) e la (51), abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{-\frac{uv}{c^2} \pm \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{c^2} - 1}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ &= \frac{-\frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \mu} \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \mu} - 1}}{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \mu}} = \frac{-\frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \mu} \pm \frac{1}{\tan \mu}}{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \mu}} \\ &= \frac{\sin \mu \cos \mu \pm \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \mu - \cos^2 \theta} = \frac{\sin 2\theta \pm \sin 2\mu}{\cos 2\theta + \cos 2\mu} = \\ &= -\frac{2 \left(\frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} \pm \frac{\tan \mu}{\tan^2 \mu + 1} \right)}{\frac{\tan^2 \theta - 1}{\tan^2 \theta + 1} + \frac{\tan^2 \mu - 1}{\tan^2 \mu + 1}} = \frac{\tan \theta \mp \tan \mu}{\tan \theta \tan \mu - 1} \\ &= \tan(\theta \mp \mu). \end{aligned}$$

Il risultato $\frac{dy}{dx} = \tan(\theta \mp \mu)$, conferma quanto anticipato in precedenza: le due linee caratteristiche formano angoli $+\mu$ e $-\mu$ rispetto al flusso. L'interpretazione grafica è mostrata in figura 11.

Riassumendo, abbiamo

$$\text{caratteristica } \mathcal{C}_+ \rightarrow \begin{cases} R_+ = \theta + \nu(\mu), \\ \frac{dy}{dx} = \tan(\theta - \mu), \end{cases} \quad (58)$$

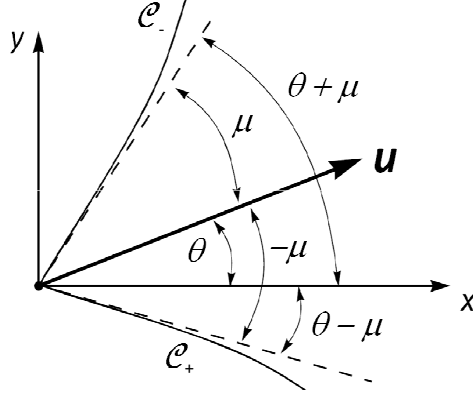


Figura 11: L'angolo che le linee di flusso formano con l'orizzontale è θ . L'angolo che la caratteristica C_- forma rispetto all'orizzontale è $\theta + \mu$, mentre quello formato dalla C_+ è $\theta - \mu$.

$$\text{caratteristica } C_- \rightarrow \begin{cases} R_- = \theta - \nu(\mu), \\ \frac{dy}{dx} = \tan(\theta + \mu). \end{cases} \quad (59)$$

4.1 Flusso di Prandtl-Meyer

L'esempio di flusso bidimensionale stazionario che analizziamo è il flusso supersonico attorno ad un angolo convesso (usualmente detto flusso di Prandtl-Meyer). Il flusso giunge all'angolo (situato nell'origine del SdR) dal semispazio $x < 0, y > 0$. La deviazione dall'orizzontale comincia ad $x = 0$, come mostrato in figura 12 ed il profilo dell'ostacolo per $x > 0$ è dato dalla funzione¹⁶ $y = F(x)$. Il numero di Mach è uniforme pari a Ma_1 ed l'angolo di Mach

$$\mu_1 = \arcsin\left(\frac{1}{Ma_1}\right).$$

Tale flusso presenta una forte analogia con quello analizzato nella sezione 3. Si comincia con l'osservare che le traiettorie delle particelle sono linee rette parallele all'asse x . La regione

$$\Theta_1 = \left\{ y \geq 0; \ x \leq \frac{y}{\tan \mu_1} \right\},$$

è dunque uno stato costante, limitato in basso dall'asse negativo delle x e a destra dalla retta caratteristica della famiglia C_- data dall'equazione $y = x \tan \mu_1$. Le caratteristiche C_+ (rette con pendenza $-\mu_1$) propagano inalterato l'invariante R_+ nella regione a

¹⁶Facciamo l'ipotesi che $F(0) = F'(0) = 0$ e che $F(x) < 0$ e $F'(x) < 0, \forall x > 0$.

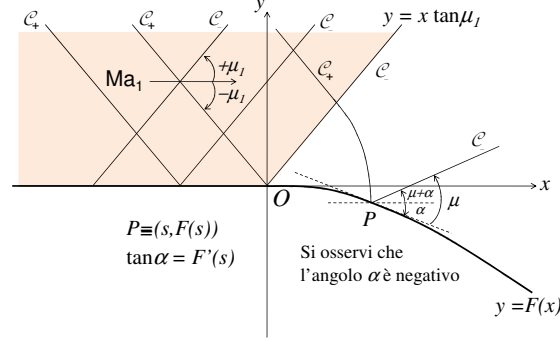


Figura 12: Nella regione Θ_1 le caratteristiche \mathcal{C}_- formano un angolo $-\mu_1$ con l'orizzontale e le caratteristiche \mathcal{C}_+ un angolo μ_1 . Si osservi che l'angolo α è negativo.

destra della retta $y = x \tan \mu_1$, ovvero nella regione

$$S_+ = \{x > 0; F(x) < y < x \tan \mu_1\},$$

che, evidente, è un'onda semplice dove l'invariante di Riemann R_+ è uniformemente uguale al valore che ha nello stato stazionario Θ_1 , ovvero

$$R_+ = \nu(\mu_1), \quad \forall (x, y) \in \Theta_1. \quad (60)$$

Quindi, sfruttando la (58) abbiamo

$$\theta + \nu(\mu) = \nu(\mu_1). \quad (61)$$

Le caratteristiche della famiglia \mathcal{C}_- sono rette nella regione S_+ . Supponiamo adesso che le \mathcal{C}_+ intercettino l'ostacolo (come avviene nel punto $P \equiv (s, F(s))$ di figura 12). Le particelle di fluido scorrono tangenzialmente all'ostacolo e quindi la pendenza, in P , rispetto all'asse x delle traiettorie è $\alpha(s)$ (ovviamente α è negativo), cioè

$$\theta|_P = \alpha(s), \quad \text{con} \quad \tan \alpha(s) = F'(s), \quad s > 0. \quad (62)$$

Adesso consideriamo la caratteristica della famiglia \mathcal{C}_- che parte dal punto P . Sfruttando la (59)₂, l'equazione di tale retta è

$$\mathcal{C}_- : \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \tan(\alpha(s) + \mu), \\ y(P) = F(s), \end{cases} \Rightarrow y - F(s) = (x - s) \tan(\alpha(s) + \mu), \quad (63)$$

dove μ è costante lungo tale retta. Valutando la (61) in P abbiamo

$$\nu(\mu)|_P = \nu(\mu_1) - \alpha(s), \quad (64)$$

Se adesso valutiamo R_- lungo la caratteristica \mathcal{C}_- che fuoriesce dal punto P abbiamo

$$\theta - \nu(\mu) = \theta|_P - \nu(\mu)|_P = \alpha(s) - \nu(\mu)|_P \stackrel{(64)}{=} 2\alpha(s) - \nu(\mu_1),$$

ovvero lungo tutta la retta (63) si ha

$$\theta - \nu(\mu) = 2\alpha(s) - \nu(\mu_1). \quad (65)$$

Quindi, mettendo insieme le (61), (62), (63) e la (65) abbiamo il seguente sistema¹⁷

$$\begin{cases} \nu(\mu) = \nu(\mu_1) - \alpha(s), & \Rightarrow \mu = \nu^{-1}(\nu(\mu_1) + |\alpha(s)|), \\ \theta = \alpha(s), \\ \tan \alpha(s) = F'(s), \\ y - F(s) = (x - s) \tan(\alpha(s) + \mu), \end{cases} \quad (66)$$

che è l'analogo del (35). In particolare, dalle ultime due si esprime (quando possibile) $\alpha(s)$ ed s in termini di x e y che sostituite nelle prime due danno μ e θ in termini di x e t .

Due osservazioni sono adesso doverose. Notiamo dapprima che, in virtù del fatto che $F'(0) = 0$, quando $s = 0$ abbiamo $\alpha = 0$ e $\mu = \mu_1$, sì che la caratteristica \mathcal{C}_- data da $y = x \tan \mu_1$ coincide proprio col bordo destro dello stato costante Θ_1 .

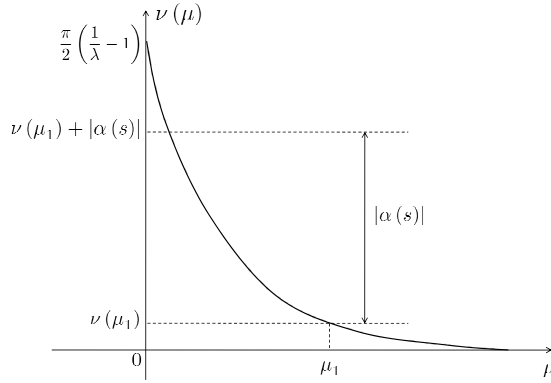


Figura 13: Grafico di $\nu(\mu)$. E' evidente la condizione di compatibilità: affinché la $(66)_1$ abbia senso è necessario che $\nu(\mu_1) + |\alpha(s)| < \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right)$.

Come secondo fatto, osserviamo che il sistema (66) è soggetto ad un vincolo di compatibilità come il sistema (35). Riferendoci infatti alla figura 13, notiamo che la

¹⁷Si tenga presente che $\alpha(s) < 0$, per ogni $s > 0$.

(66)₁ è invertibile soltanto se

$$\nu(\mu_1) + |\alpha(s)| < \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right). \quad (67)$$

Quindi se

$$|\alpha| > \alpha_{\max} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) - \nu(\mu_1),$$

l'equazione (66)₁ non è risolubile. Supponiamo che \hat{s} sia l'ascissa per cui

$$F'(\hat{s}) = \tan \alpha_{\max}.$$

Per $s > \hat{s}$, la (66)₁ non ammette soluzioni. Dal punto di vista fisico, questo significa che si viene a formare una regione vuota fra il bordo dell'ostacolo e la retta \mathcal{C}_- che parte dal punto di coordinate $(\hat{s}, F(\hat{s}))$ con pendenza $\mu - \alpha_{\max}$, cioè

$$y - F(\hat{s}) = (x - \hat{s}) \tan(-\alpha_{\max} + \mu(\hat{s})),$$

dove $\mu(\hat{s})$ si determina risolvendo $-\alpha_{\max} = \nu(\mu(\hat{s})) - \nu(\mu_1)$. La situazione è del tutto analoga al secondo caso del paragrafo 3.1.

In conclusione analizziamo il caso

$$F(x) = -Vx, \quad \text{con } V > 0,$$

che è simile a quello illustrati nella sezione 3.2. Infatti, per ogni ascissa $s > 0$,

$$\tan \alpha = -V, \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\arctan V,$$

e quindi la (66)₁ implica che $\nu(\mu)$ non dipende più dall'ascissa s (ovvero dal punto di partenza della caratteristica \mathcal{C}_-) ma è costante, cioè¹⁸

$$\mu = \mu_2, \quad \text{con } \mu_2 = \nu^{-1}(\nu(\mu_1) - \alpha) = \nu^{-1}(\nu(\mu_1) + \arctan V), \quad (68)$$

con $\mu_2 < \mu_1$, come mostrato dalla figura 14. Non solo, ma la (66)₂ comporta che anche $\theta = \alpha$ uniformemente.

Dunque la regione

$$\Theta_2 = \{x > 0; \underbrace{-Vx}_{\tan \alpha} < y < x \tan(\alpha + \mu_2)\},$$

è uno stato costante, ovvero

$$\forall (x, y) \in \Theta_2 \rightarrow \begin{cases} \theta = \alpha, \\ \mu = \mu_2. \end{cases}$$

¹⁸Si assume che la condizione di compatibilità (67) sia soddisfatta, cioè

$$\nu(\mu_1) + \arctan V < \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right).$$

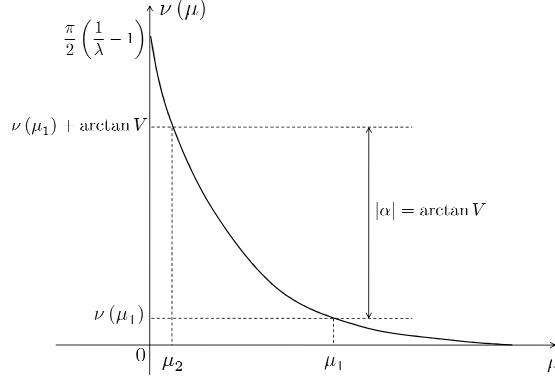


Figura 14: In evidenza $\mu_2 = \nu^{-1}(\nu(\mu_1) - \alpha)$. Si noti che $\mu_2 < \mu_1$ ed il fatto che la condizione di compatibilità (67) sia verificata.

Se in Θ_2 calcoliamo, applicando la (58), l'invariante R_+ otteniamo

$$R_+ = \alpha + \nu(\mu_2) \stackrel{(68)}{=} \alpha + \nu(\nu^{-1}(\nu(\mu_1) - \alpha)) = \nu(\mu_1),$$

che è esattamente lo stesso valore di R_+ nello stato costante Θ_1 (si veda la (60)). Inoltre, $\theta = \alpha$, implica che le linee di flusso sono parallele alla parete dell'ostacolo in tutto Θ_2 (v. figura 15). Non solo, ma $\mu = \mu_2$ comporta che anche il numero di Mach è uniforme in tutta la regione Θ_2

$$\text{Ma}_2 \stackrel{(50)}{=} \frac{1}{\sin \mu_2}.$$

La retta che limita dal sopra Θ_2 , $y = x \tan(\alpha + \mu_2)$, ha una pendenza minore¹⁹ della retta $y = x \tan \mu_1$, che limita da destra lo stato costante Θ_1 . I due stati costanti non sono quindi adiacenti, ma sono separati da un'onda semplice dove le caratteristiche \mathcal{C}_- sono rette che fuoriescono dall'origine (si veda la figura 15). Tale regione viene usualmente detta **espansione di Prandtl-Meyer**.

Nella regione di espansione abbiamo dunque tale sistema

$$\begin{cases} y = x \tan(\alpha + \mu), \\ \theta + \nu(\mu) = \nu(\mu_1), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -\alpha + \arctan \frac{y}{x}, \\ \theta = \nu(\mu_1) - \nu\left(-\alpha + \arctan \frac{y}{x}\right). \end{cases}$$

Nel caso in cui l'angolo sia concavo, cioè $F'(x) > 0$, la situazione è completamente differente. Le caratteristiche si incrociano e quindi il metodo di soluzione illustrato non è applicabile.

¹⁹Dalla figura 14 risulta evidente che $\mu_2 < \mu_1$. Inoltre $\mu_2 + \alpha = \mu_2 - |\alpha| < \mu_2 < \mu_1$.

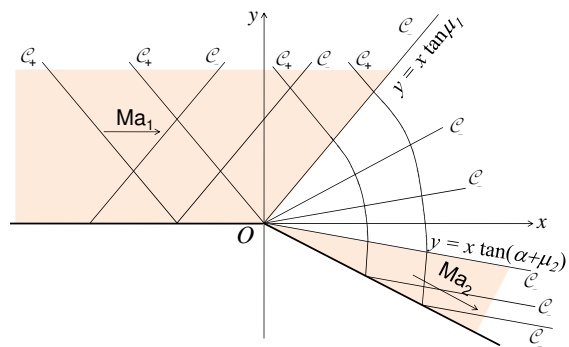


Figura 15: Nella figura sono evidenziati i due stati costanti e l'onda semplice dove le caratteristiche \mathcal{C}_- sono un fascio di rette uscenti dall'origine.