

Parte I

Termodinamica dei fluidi Comprimibili

In questo capitolo affronteremo lo studio dei flussi comprimibili inviscidi, cioè privi di viscosità.

1 Primo e secondo principio della termodinamica

Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ il dominio occupato dal fluido e sia $W_t \subset D$, un dominio materiale. Si assume che il fluido è soggetto a forze di massa conservative, cioè $\mathbf{b} = -\nabla U$, con, al solito, U energia potenziale.

Definizione 1. Si dice *energia cinetica del fluido contenuto in W_t* , la quantità

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{W_t} \rho \mathbf{u}^2 d^3 \mathbf{x}.$$

Si introduce adesso:

- La potenza totale (energia meccanica per unità di tempo) prodotta su tutto W_t dalle forze di superficie, cioè

$$\mathcal{P}_i = \int_{W_t} \mathbb{T} \cdot \mathbb{D} d^3 \mathbf{x},$$

dove $\mathbb{T} \cdot \mathbb{D} = \sum_{i,j=1}^3 t_{ij} d_{ij}$, e dove $\mathbb{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$.

- La potenza prodotta dalle forze \mathbf{F} che agiscono su ∂W_t , ovvero

$$\mathcal{P}_e = \int_{\partial W_t} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} ds.$$

Vale il seguente

Teorema 1. (Teorema dell'energia meccanica) Se l'energia potenziale U non dipende dal tempo allora

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{K} + \mathcal{U}) = -\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_e, \quad (1)$$

dove

$$\mathcal{U} = \int_{W_t} \rho U d^3 x. \quad (2)$$

Dim. Semplicemente applicando l'equazione di moto si ottiene

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} = -\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_e + \int_{W_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d^3\mathbf{x}.$$

Ora, siccome U non dipende dal tempo,

$$\int_{W_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d^3\mathbf{x} = - \int_{W_t} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla U d^3\mathbf{x} = - \int_{W_t} \rho \frac{DU}{Dt} d^3\mathbf{x} = - \frac{d\mathcal{U}}{dt},$$

con \mathcal{U} dato da (2). La (1) è una conseguenza ovvia.

□

Si introducono adesso:

- Il **flusso di calore** $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, ovvero l'energia (termica) che fluisce nell'unità di tempo attraverso l'unità di superficie, sì che il calore che entra o fuoriesce da W_t nell'unità di tempo (potenza termica acquisita o persa da W_t) è

$$Q = - \int_{\partial W_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds,$$

essendo \mathbf{n} la normale esterna a ∂W_t . Notiamo che se $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} > 0$, cioè \mathbf{q} ed \mathbf{n} allineati (flusso di calore uscente) abbiamo $Q < 0$. Se $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} < 0$, cioè quando \mathbf{q} ed \mathbf{n} hanno direzioni opposte (ovvero il flusso di calore entra in W_t) allora Q è positivo.

- La densità di sorgenti, o pozzi, di calore $r(\mathbf{x}, t)$. Quindi il calore prodotto (assorbito) in W_t nell'unità di tempo a causa di queste sorgenti (pozzi) distribuiti su W_t stesso è

$$R = \int_{W_t} r d^3\mathbf{x}.$$

Primo Principio della Termodinamica. Esiste una funzione $e(\mathbf{x}, t)$, detta **energia interna specifica** (ovvero per unità di massa), per cui l'energia interna del fluido contenuto in W_t è

$$\mathcal{E} = \int_{W_t} \rho e d^3\mathbf{x},$$

e, per ogni W_t , vale la seguente relazione

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{E} + \mathcal{K} + \mathcal{U}) = R + Q + \mathcal{P}_e.$$

□

Applicando la (1) si ottiene

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathcal{P}_i + R + Q, \quad (3)$$

da cui si ottiene la forma locale del primo principio della termodinamica, anche detto **equazione di conservazione dell'energia**

$$\rho \frac{De}{Dt} = \mathbb{T} \cdot \mathbb{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + r. \quad (4)$$

Osservazione 1. Se $\mathbb{T} = -p\mathbb{I}$, allora $\mathbb{T} \cdot \mathbb{D} = -p\nabla \cdot \mathbf{u}$. Se supponiamo p uniforme (cioè non dipendente dalle variabili spaziali) allora

$$\mathcal{P}_i = -p \int_{W_t} \nabla \cdot \mathbf{u} d^3 \mathbf{x}.$$

Se ora calcoliamo la variazione nel tempo del volume racchiuso entro W_t , che denotiamo ancora con W_t , cioè $W_t = \int_{W_t} d^3 \mathbf{x}$, abbiamo

$$\frac{dW_t}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{W_t} d^3 \mathbf{x} \right) = \frac{d}{dt} \left(\int_{W_0} J d^3 \boldsymbol{\xi} \right),$$

dove W_0 è l'immagine di W_t nella configurazione di riferimento, J il determinante Jacobiano e $\boldsymbol{\xi}$ le variabili spaziali nella configurazione di riferimento. Ricordando che $\frac{dJ}{dt} = J\nabla \cdot \mathbf{u}$, si ha

$$\frac{dW_t}{dt} = \int_{W_0} \frac{dJ}{dt} d^3 \boldsymbol{\xi} = \int_{W_0} (\nabla \cdot \mathbf{u}) J d^3 \boldsymbol{\xi} = \int_{W_t} \nabla \cdot \mathbf{u} d^3 \mathbf{x}.$$

Dunque $\mathcal{P}_i = -p \frac{dW_t}{dt}$, e la (3) acquisisce questa forma

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -p \frac{dW_t}{dt} + Q + R$$

che è l'usuale forma

$$d\mathcal{E} = -pdW_t + \delta Q,$$

dove δQ (ovvero $Q + R$) rappresenta il calore scambiato (assorbito o rilasciato) nell'unità di tempo e $-pdW_t$ è il lavoro fatto dal sistema (se $dW_t > 0$, ovvero espansione, e quindi negativo) o fatto sul sistema (se $dW_t < 0$, ovvero compressione, e quindi positivo) nell'unità di tempo.

Si assume adesso che in ogni punto del dominio D e per ogni istante di tempo t , sia definita la **temperatura assoluta** $T(\mathbf{x}, t)$ e che essa sia sempre maggiore di zero.

Secondo Principio della Termodinamica. Esiste una funzione $s(\mathbf{x}, t)$, detta **entropia specifica** (ovvero per unità di massa), per cui l'entropia del fluido contenuto in W_t è

$$\mathcal{S} = \int_{W_t} \rho s d^3 \mathbf{x},$$

e, per ogni W_t , vale la seguente disuguaglianza

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} \geq - \int_{\partial W_t} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} ds + \int_{W_t} \frac{r}{T} d^3 \mathbf{x}, \quad (5)$$

detta *disuguaglianza di Clausius - Duhem*.

□

Passando alla forma locale, la (5) si trasforma in

$$\rho \frac{Ds}{Dt} \geq -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) + \frac{r}{T}, \quad (6)$$

oppure in

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} \geq -\nabla \cdot \mathbf{q} + r + \frac{1}{T} \nabla T \cdot \mathbf{q}. \quad (7)$$

Vediamo adesso una formulazione equivalente della (6).

Definizione 2. Si dice *tasso di dissipazione o rate di dissipazione*,

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \rho T \frac{Ds}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} - r - \frac{1}{T} \nabla T \cdot \mathbf{q}.$$

Quindi anzichè richiedere che la disuguaglianza (6) sia sempre verificata, **una formulazione equivalente del secondo principio della termodinamica è la seguente**

$$\varphi(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad (8)$$

per qualsiasi processo sperimentato dal fluido.

In particolare, ricordando la (4), abbiamo

$$\begin{aligned} \varphi &= \rho T \frac{Ds}{Dt} - \underbrace{(-\nabla \cdot \mathbf{q} + r)}_{\rho \frac{De}{Dt} - \mathbb{T} \cdot \mathbb{D}} - \frac{1}{T} \nabla T \cdot \mathbf{q} \\ &= \mathbb{T} \cdot \mathbb{D} - \rho \left(\frac{De}{Dt} - T \frac{Ds}{Dt} \right) - \frac{1}{T} \nabla T \cdot \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Si introducono quindi:

- La **dissipazione intrinseca**

$$\varphi_1(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \mathbb{T} \cdot \mathbb{D} - \rho \left(\frac{De}{Dt} - T \frac{Ds}{Dt} \right), \\ \rho T \frac{Ds}{Dt} - (-\nabla \cdot \mathbf{q} + r). \end{cases} \quad (9)$$

- La **dissipazione termica**

$$\varphi_2(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{T} \nabla T \cdot \mathbf{q}. \quad (10)$$

Si usa poi dare una formulazione più restrittiva della (8), richiedendo che

$$\varphi_1(\mathbf{x}, t) \geq 0, \quad \text{e} \quad \varphi_2(\mathbf{x}, t) \geq 0. \quad (11)$$

Definizione 3. Un processo si dice reversibile se $\varphi_1 \equiv 0$, $\varphi_2 \equiv 0$, $\forall \mathbf{x} \in D$ e $\forall t$.

Osservazione 2. In un processo reversibile $\varphi_1 \equiv 0$, e quindi la (9)₂ implica

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + r.$$

Quindi $\rho T \frac{Ds}{Dt}$ rappresenta l'energia temica acquisibile/cedibile in maniera reversibile nell'unità di tempo. Ora, in un processo qualsiasi, $(-\nabla \cdot \mathbf{q} + r)$ rappresenta il “rate” di calore ceduto/acquisito dal corpo. Quindi $\varphi_1 \geq 0$, implica $(-\nabla \cdot \mathbf{q} + r) \leq \rho T \frac{Ds}{Dt}$, ovvero esiste un “tetto massimo” all'energia temica che può essere ceduta/acquisita dal sistema nell'unità di tempo: tale “tetto massimo” è proprio $\rho T \frac{Ds}{Dt}$, cioè il calore ceduto/acquisito reversibilmente.

La suddetta interpretazione di φ_2 , cioè come differenza fra energia acquisibile/cedibile in maniera reversibile e energia effettivamente acquisita/ceduta, è valida anche se consideriamo la (9)₂. Se poniamo $w = \rho \left(\frac{De}{Dt} - T \frac{Ds}{Dt} \right)$, abbiamo

$$\varphi_1 = \mathbb{T} \cdot \mathbb{D} - w \geq 0.$$

In un processo reversibile $w = T \cdot D$, e quindi w rappresenta l'energia meccanica dissipata nell'unità di tempo (potenza) reversibilmente (per esempio immagazzinata sotto forma di energia potenziale elastica). In un processo qualsiasi, $\varphi_1 \geq 0$ implica che non tutta l'energia meccanica dissipata viene immagazzinata sotto forma di energia restituibile.

Osservazione 3. La condizione $\varphi_2 \geq 0$, implica che \mathbf{q} e ∇T non possono essere allineati. In particolare, se

$$\mathbf{q} = -K \nabla T, \quad (12)$$

con $K \geq 0$ (legge di Fourier), allora $\varphi_2 = K |\nabla T|^2$, e la condizione $\varphi_2 \geq 0$ è verificata. Notiamo poi che la (12) implica la classica formulazione del secondo principio: il calore fluisce dalle zone a temperatura più elevata verso quelle a temperature più bassa.

2 Relazioni termodinamiche per fluidi a due variabili di stato

Si introduce il volume specifico

$$\tau = \frac{1}{\rho}, \quad (13)$$

la cui evoluzione è

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\tau} \frac{D\tau}{Dt}. \quad (14)$$

Si considera adesso un fluido e si ipotizza che le sue proprietà fisiche siano tali da soddisfare un certo numero di assunzioni che indicheremo nel seguito (sia in questa che nella prossima sezione). Si comincia quindi con il formulare la prima assunzione (o assioma):

Assunzione 1. *Il tensore degli stress di Cauchy è isotropo: $\mathbb{T} = -p\mathbb{I}$, con p detta **pressione termodinamica** o semplicemente **pressione**.*

E' ovvio che l'assunzione 1, come quelle che seguiranno, non possono essere dimostrate. La loro validità risiede soltanto nelle verifiche sperimentali dirette o indirette.

Le variabili che definiscono lo stato dinamico del fluido sono:

- il campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, 3 componenti;
- la pressione $p(\mathbf{x}, t)$, uno scalare;
- il volume specifico $\tau(\mathbf{x}, t)$, uno scalare;
- l'energia interna $e(\mathbf{x}, t)$, uno scalare;
- la temperatura $T(\mathbf{x}, t)$, uno scalare;
- l'entropia $s(\mathbf{x}, t)$, uno scalare.

Dunque le variabili sono 8 mentre abbiamo a disposizione 5 equazioni più una disequazione. Emerge evidente la necessità di legare fra loro alcune variabili.

Definizione 4. *Le 5 variabili: pressione p , volume specifico τ , energia interna e , temperatura T ed entropia specifica s , vengono dette **variabili termodinamiche**.*

Assunzione 2. *Le variabili termodinamiche indipendenti sono solamente 2. In particolare, esiste una relazione, chiamata **legge di stato**, che lega esplicitamente l'energia interna e alle variabili s e τ , cioè*

$$e = e(s, \tau). \quad (15)$$

Vediamo come, proprio in virtù dell'assunzioni 1, 2, sia possibile esprimere anche p e la temperatura T in funzione di s e τ . Abbiamo infatti il seguente:

Teorema 2. *Se le assunzioni 1 e 2 sono verificate, allora*

$$T = \frac{\partial e}{\partial s}, \implies T = T(s, \tau), \quad (\text{relazione di Gibbs}), \quad (16)$$

$$p = -\frac{\partial e}{\partial \tau}, \implies p = p(s, \tau). \quad (17)$$

Dim. Si parte dalle (9)₁ considerando che, in virtù della (15),

$$\frac{De}{Dt} = \frac{\partial e}{\partial s} \frac{Ds}{Dt} + \frac{\partial e}{\partial \tau} \frac{D\tau}{Dt},$$

e si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -p \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial e}{\partial s} - T \right) \frac{Ds}{Dt} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial e}{\partial \tau} \frac{D\tau}{Dt} \\ &\stackrel{(14)}{=} -\frac{1}{\tau} \left(p + \frac{\partial e}{\partial \tau} \right) \frac{D\tau}{Dt} - \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial e}{\partial s} - T \right) \frac{Ds}{Dt} \geq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Ora, la (18) deve valere per qualsiasi processo e quindi, affinché sia soddisfatta, è necessario che sia la (16) che la (17) siano soddisfatte.

□

Sorgono adesso due domande:

- D. 1 -** Come si determina, a partire da dati sperimentali, la legge di stato? Infatti, la teoria fino ad ora sviluppata, è una teoria generale che non ci dà informazioni su come ricavare le equazioni di stato.
- D. 2 -** E' possibile, anziché τ ed s , considerare una nuova coppia di variabili indipendenti? In particolare, abbiamo appena visto che, data $e = e(s, \tau)$, si riesce ad esprimere T e p in termini di s e τ , sfruttando proprio la funzione di stato $e(s, \tau)$. Ora se cambiamo variabili termodinamiche come facciamo ad esprimere le rimanenti variabili termodinamiche in termini delle due prescelte? In altri termini, qual'è la nuova funzione di stato?

Concentrandoci adesso sulla domanda **D. 2** e vediamo come, supponendo che e abbia opportune proprietà di convessità, si possano considerare come variabili termodinamiche indipendenti la coppia τ e T oppure la coppia p e T .

Teorema 3. *Se l'energia interna e è convessa rispetto ad s , allora si può considerare τ e la temperatura T come variabili indipendenti ed esprimere p ed s in termini di τ e T .*

La nuova funzione di stato è $\psi = \psi(T, \tau)$, così definita

$$\psi = e - Ts,$$

usualmente detta **energia libera di Helmholtz**, che appunto consente di determinare s e p in termini di T e τ . Infatti

$$p = -\frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \implies p = p(T, \tau), \quad (19)$$

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}, \implies s = s(T, \tau). \quad (20)$$

Dim. Se e è convessa rispetto ad s , cioè $\frac{\partial^2 e}{\partial s^2} > 0$, allora la (16) è invertibile rispetto ad s (proprio perché $\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial^2 e}{\partial s^2} > 0$). Quindi possiamo esprimere s in termini di T e τ , cioè $s = s(T, \tau)$. E' quindi evidente che, sfruttando la (17), potremo scrivere

$$p = - \left. \frac{\partial e}{\partial \tau} \right|_{s=s(T, \tau)},$$

e così esprimere anche p in termini di s e T . Con questo abbiamo dimostrato la prima parte del teorema. Tuttavia in tale dimostrazione, non abbiamo fatto ricorso ad alcuna funzione di stato, dalla quale ricavare, come nel teorema 2, p e s . Per trovare la nuova funzione di stato si introduce la trasformata di Legendre¹ di e rispetto ad s , ovvero

$$\psi(T, \tau) = e(s(T, \tau), \tau) - Ts(T, \tau).$$

Abbiamo dunque

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} = \underbrace{\left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)}_T \frac{\partial s}{\partial T} - s - T \frac{\partial s}{\partial T} = -s,$$

ad analogamente

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \underbrace{\left(\frac{\partial e}{\partial s} \right)}_T \frac{\partial s}{\partial \tau} + \underbrace{\frac{\partial e}{\partial \tau}}_{-p} - T \frac{\partial s}{\partial \tau} = -p.$$

□

Vediamo subito una conseguenza di (20).

Corollario 1. Se l'energia interna e è convessa rispetto ad s , allora considerando $s = s(T, \tau)$, posto

$$c_V(T, \tau) = T \frac{\partial s(T, \tau)}{\partial T}, \quad (21)$$

questo si interpreta fisicamente come il **calore specifico a volume costante del fluido**.

Dim. Ricordando la (4) e la (9)₁, potremo scrivere

$$\rho \frac{De}{Dt} = \underbrace{\mathbb{T} \cdot \mathbb{D}}_{\varphi_1 + \rho \left(\frac{De}{Dt} - T \frac{Ds}{Dt} \right)} - \nabla \cdot \mathbf{q} + r,$$

quindi

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \varphi_1 - \nabla \cdot \mathbf{q} + r. \quad (22)$$

¹In un certo senso $e(s, \tau)$ è una sorta di “energia poenziale” da cui, facendo la derivata, derivano le “forze”. Se adesso cambiamo le variabili, ed una variabile diventa proprio la $\frac{\partial e}{\partial s}$, la nuova energia potenziale si ottiene la trasformata di Legendre di e .

Ricordando ora la (20), cioè $s = s(T, \tau)$, si ha

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial T} \frac{DT}{Dt} + \frac{\partial s}{\partial \tau} \frac{D\tau}{Dt},$$

e dunque la (22) diventa

$$\rho \left(T \frac{\partial s}{\partial T} \right) \frac{DT}{Dt} = -\rho T \frac{\partial s}{\partial \tau} \frac{D\tau}{Dt} + \varphi_1 - \nabla \cdot \mathbf{q} + r,$$

che l'equazione di evoluzione della temperatura del fluido, dove gli ultimi due termini rappresentano il calore acquisito/ceduto nell'unità di tempo mentre i primi due il calore prodotto/assorbito dalla dissipazione e da compressioni/espansioni. Siccome poi $\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)$ viene calcolata considerando τ costate, $\left(T \frac{\partial s}{\partial T} \right)$ rappresenta proprio il c_V , calore specifico a volume costante.

□

Analizziamo adesso il caso in cui la (17) è invertibile rispetto a τ , sì che

$$\tau = \tau(s, p).$$

Ciò è possibile solo se e è convessa (o concava) rispetto a τ , cioè se $\frac{\partial^2 e}{\partial \tau^2}$ ha segno definito.

Teorema 4. *Se l'energia interna $\frac{\partial^2 e}{\partial \tau^2}$ ha segno definito, allora si può considerare s e la pressione p come variabili indipendenti ed esprimere τ e T in termini di s e p . La nuova funzione di stato è $h = h(s, p)$, così definita*

$$h(s, p) = e(s, \tau(s, p)) + p\tau(s, p), \quad (23)$$

detta **entalpia**, che consente di determinare τ e T in termini di s e p . Infatti

$$T = \frac{\partial h(s, p)}{\partial s}, \quad (24)$$

$$\tau = \frac{\partial h(s, p)}{\partial p}. \quad (25)$$

Dim. Si procede come nella dimostrazione del teorema 3, ovvero

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \underbrace{\frac{\partial e}{\partial s}}_{\substack{T \\ (16)}} + \underbrace{\frac{\partial e}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial s}}_{\substack{-p \\ (17)}} + p \frac{\partial \tau}{\partial s} = T,$$

$$\frac{\partial h}{\partial p} = \underbrace{\frac{\partial e}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial p}}_{\substack{-p \\ (17)}} + p \frac{\partial \tau}{\partial p} + \tau = \tau.$$

□

Vediamo infine come, supponendo e convessa in s e τ sia possibile selezionare T e p come variabili indipendenti.

Teorema 5. *Se l'energia interna e è convessa rispetto ad s e p , allora si può considerare la pressione p e la temperatura T come variabili indipendenti ed esprimere τ ed s in termini di p e T .*

La nuova funzione di stato è $g = g(T, p)$, così definita

$$g = \psi + p\tau = e - Ts + p\tau,$$

*usualmente detta **entalpia di Gibbs**, o **energia libera di Gibbs**, che appunto consente di determinare s e τ in termini di T e p . Infatti*

$$s = -\frac{\partial g}{\partial T}, \quad \Rightarrow \quad s = s(T, p), \quad (26)$$

$$\tau = \frac{\partial g}{\partial p}, \quad \Rightarrow \quad \tau = \tau(T, p). \quad (27)$$

□

La dimostrazione è del tutto analoga a quella del teorema 3 e viene lasciata per esercizio. Non solo, ma analogamente al corollario 1 è facile dimostrare il seguente

Corollario 2. *Se l'energia interna e è convessa rispetto ad s e τ , allora considerando $s = s(T, p)$, posto*

$$c_p(T, p) = T \frac{\partial s(T, p)}{\partial T}, \quad (28)$$

*questo si interpreta fisicamente come il **calore specifico a pressione costante del fluido**.*

□

Volendo ricapitolare, per rispondere alla **D. 2**, si conclude che:

- a). Si deve dare costitutivamente una legge di stato. Tale legge può essere

	variabili indipendenti	variabili “derivate”
$e = e(s, \tau)$	s, τ	$T = \frac{\partial e}{\partial s},$ $p = -\frac{\partial e}{\partial \tau},$
$\psi = \psi(T, \tau)$	T, τ	$s = -\frac{\partial \psi}{\partial T},$ $p = -\frac{\partial \psi}{\partial \tau},$
$h = h(s, p)$	s, p	$T = \frac{\partial h}{\partial s},$ $\tau = \frac{\partial h}{\partial p},$
$g = g(T, p)$	T, p	$s = -\frac{\partial g}{\partial T},$ $\tau = \frac{\partial g}{\partial p},$

Evidentemente le dipendenze proposte nel sovrastante schema sono quelle canoniche, ma, per esempio, se T, τ sono le variabili indipendenti nulla vieta di considerare e in funzione di T, τ . Avremo semplicemente $e(T, \tau) = e(s(T, \tau), \tau)$. Analogo discorso vale anche per le altre funzioni di stato.

- b). Dare una o l'altra forma della legge di stato è equivalente purché siano soddisfatti i requisiti di convessità. Infatti, tramite la trasformata di Legendre, si può passare da una all'altra.

A questo punto, e stiamo affrontando la domanda **D. 1**, sorge la questione di come formulare la legge di stato. Evidentemente, per validare le leggi di stato proposte è necessario collegarle a grandezze misurabili. Abbiamo già visto (corollari 1 e 2) che il c_V e c_p sono collegati a $\frac{\partial s(T, \tau)}{\partial T}$ e $\frac{\partial s(T, p)}{\partial T}$, rispettivamente. Inoltre, sperimentalmente, è “facile” fare misure sul fluido considerando come variabili indipendenti due a scelta tra pressione p , temperatura T e volume specifico τ . Quindi, oltre al c_V e c_p , ciò che si misura è:

- La variazione percentuale di pressione al variare della temperatura mantenendo il volume del fluido costante,

$$\alpha_T(T, \tau) = \frac{1}{p} \frac{\Delta p}{\Delta T} \Big|_{\tau=const.}, \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_T = \frac{1}{p} \frac{\partial p(T, \tau)}{\partial T}. \quad (29)$$

- La variazione percentuale di pressione al variare del volume mantenendo la temperatura del fluido costante,

$$\alpha_\tau(T, \tau) = \frac{1}{p} \frac{\Delta p}{\Delta \tau} \Big|_{T=const.}, \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_\tau = \frac{1}{p} \frac{\partial p(T, \tau)}{\partial \tau}. \quad (30)$$

- La variazione percentuale di volume al variare della temperatura mantenendo la pressione del fluido costante

$$\beta_T(T, p) = \frac{1}{\tau} \frac{\Delta \tau}{\Delta T} \Big|_{p=const.}, \quad \Leftrightarrow \quad \beta_T = \frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau(T, p)}{\partial T}. \quad (31)$$

- La variazione percentuale di volume al variare della pressione mantenendo la temperatura del fluido costante

$$\beta_p(T, p) = \frac{1}{\tau} \frac{\Delta \tau}{\Delta p} \Big|_{T=const.}, \quad \Leftrightarrow \quad \beta_p = \frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau(T, p)}{\partial p}. \quad (32)$$

Ricordando adesso che $\psi = \psi(T, \tau)$ e che $g = g(T, p)$, il teorema di Schwarz implica

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \tau} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial T}, \quad \xRightarrow[(20)]{(19)} \quad \frac{\partial}{\partial T} \underbrace{\left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right)}_{-p} = \frac{\partial}{\partial \tau} \underbrace{\left(\frac{\partial \psi}{\partial T} \right)}_{-s}, \\ &\Downarrow \\ \frac{\partial s(\tau, T)}{\partial \tau} &= \frac{\partial p(\tau, T)}{\partial T}, \end{aligned}$$

Riprendendo adesso la (29) abbiamo

$$\frac{\partial s(\tau, T)}{\partial \tau} = p(\tau, T) \alpha_T(\tau, T), \quad (33)$$

Osservazione 4. La (33) è solo un esempio di come collegare le derivate di s (oppure ψ oppure e o g) alle grandezze misurate. Infatti applicando ancora il teorema di Schwarz alla $g = g(T, p)$ otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial T \partial p} &= \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial T}, \quad \xRightarrow[(27)]{(26)} \quad \frac{\partial}{\partial T} \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial p} \right)}_{\tau} = \frac{\partial}{\partial p} \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial T} \right)}_{-s}, \\ &\Downarrow \\ \frac{\partial \tau(T, p)}{\partial T} &= - \frac{\partial s(T, p)}{\partial p}, \end{aligned}$$

da cui, grazie alla (32), deriviamo

$$\frac{\partial s(T, p)}{\partial p} = -\tau \beta_T. \quad (34)$$

Quindi, supponiamo di aver selezionato come variabili termodinamiche indipendenti T e τ , vediamo come, avendo misurato α_T , α_τ e c_V si riesca a ricostruire e vista come funzione di T e τ . Supponiamo innanzi tutto di ricostruire $p = p(T, \tau)$ grazie alla misura di α_τ e α_T . Se, $e = e(s, \tau)$, allora

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right) ds + \left(\frac{\partial e}{\partial \tau} \right) d\tau \stackrel{(16)}{=} T ds - p(T, \tau) d\tau, \quad (17)$$

ma, come detto, vogliamo e in funzione delle variabili termodinamiche selezionate, cioè T e τ . Quindi

$$e = e(T, \tau) = e(s(T, \tau), \tau),$$

da cui

$$\begin{aligned} de &= \underbrace{T \left(\frac{\partial s(T, \tau)}{\partial T} dT + \frac{\partial s(T, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right)}_{ds} - p(T, \tau) d\tau \\ &\stackrel{(21)}{=} \underbrace{\left(T \frac{\partial s(T, \tau)}{\partial T} \right) dT}_{c_V(T, \tau)} + \left(T \frac{\partial s(T, \tau)}{\partial \tau} - p(T, \tau) \right) d\tau \\ &\stackrel{(33)}{=} c_V(T, \tau) dT + \underbrace{\left(T \frac{\partial s(T, \tau)}{\partial \tau} \right) d\tau}_{T p \alpha_T} - p(T, \tau) d\tau \\ &= c_V(T, \tau) dT + p(T, \tau) [T \alpha_T(T, \tau) - 1] d\tau, \end{aligned} \quad (35)$$

2.1 Fluido di Gay-Lussac o gas perfetto

Supponiamo di fissare T e τ come variabili termodinamiche indipendenti, di aver misurato $\alpha_T(T, \tau)$, $\alpha_\tau(T, \tau)$ e che queste siano date da

$$\alpha_T(T, \tau) = \frac{\mathfrak{r}}{\tau p}, \quad (36)$$

$$\alpha_\tau(T, \tau) = -\frac{\mathfrak{r} T}{\tau^2 p}, \quad (37)$$

dove \mathfrak{r} è una costante. Supponiamo inoltre di aver misurato² $c_V(T)$.

²Vedremo più avanti che, se α_T e α_τ sono quelli delle (36) e (37), allora c_V può, al massimo, dipendere soltanto dalla temperatura T .

Per prima cosa dobbiamo ricostruire $p = p(T, \tau)$. Avremo

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\partial p(T, \tau)}{\partial T} dT + \frac{\partial p(T, \tau)}{\partial \tau} d\tau \stackrel{(29)}{=} (\alpha_T p) dT + (\alpha_\tau p) d\tau \\ &\stackrel{(36)}{=} \frac{\tau}{\tau} dT - \frac{\tau T}{\tau^2} d\tau, \end{aligned} \quad (37)$$

da cui si deduce immediatamente

$$p(T, \tau) = \frac{\tau T}{\tau}, \quad (38)$$

detta **legge di Gay-Lussac** o legge del **gas perfetto**.

Osservazione 5. *L'espressione classica della legge del gas perfetto è*

$$pV = NRT, \quad (39)$$

dove R è la costante dei gas e N è il numero di moli di gas. Quindi, se M è la massa totale di fluido e M_{mol} la sua massa molare

$$N = \frac{M}{M_{mol}},$$

per cui la (39) diventa la (38). Infatti

$$p \underbrace{\left(\frac{V}{M} \right)}_{\tau} = \underbrace{\left(\frac{R}{M_{mol}} \right)}_{\tau} T.$$

Applicando adesso la (35) otteniamo

$$\begin{aligned} de &= c_V(T, \tau) dT + \underbrace{p}_{\frac{\tau T}{\tau}} [T\alpha_T(T, \tau) - 1] d\tau \\ &\stackrel{(36)}{=} c_V(T, \tau) dT + p \underbrace{\left[T \frac{\tau}{\tau p} - 1 \right]}_{=0} d\tau. \end{aligned} \quad (38)$$

e quindi $e = e(T)$. Quindi, coerentemente con questo modello, il c_V può al più dipendere soltanto dalla temperatura T , cioè $c_V(T)$ o, altrimenti, essere costante. Alla fine giungiamo all'espressione cercata di e

$$e(T) = \int c_V(T) dT. \quad (40)$$

Vogliamo determinare l'espressione di s in termini di T e τ . Si parte da

$$ds = \frac{\partial s}{\partial T} dT + \frac{\partial s}{\partial \tau} d\tau, \Rightarrow Tds = \left(T \frac{\partial s}{\partial T} \right) dT + \left(T \frac{\partial s}{\partial \tau} \right) d\tau.$$

Ricordando la (21) e la (33) si ha

$$\begin{aligned} T ds(T, \tau) &= c_V(T) dT + T p(\tau, T) \alpha_T(\tau, T) d\tau \\ &\stackrel{(38)}{=} c_V(T) dT + \frac{\mathfrak{r}T}{\tau} d\tau, \\ &\stackrel{(36)}{=} \end{aligned}$$

e dunque

$$ds(T, \tau) = \frac{c_V(T)}{T} dT + \frac{\mathfrak{r}}{\tau} d\tau. \quad (41)$$

Quindi, considerando “condizioni iniziali” (T_0, τ_0) ,

$$s(T, \tau) - s_0 = \int_{T_0}^T \frac{c_V(T')}{T'} dT' + \mathfrak{r} \ln \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right).$$

In particolare, se c_V è costante (cioè non dipende da T) allora

$$s(T, \tau) - s_0 = c_V \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + \mathfrak{r} \ln \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right). \quad (42)$$

In questo caso, siccome si può provare

$$c_p - c_V = \mathfrak{r}, \implies \mathfrak{r} = c_V(\gamma - 1), \quad (43)$$

dove

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V}, \quad (44)$$

la (42) diventa

$$s(T, \tau) - s_0 = c_V \ln \left[\frac{T}{T_0} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (45)$$

Se invece vogliamo esprimere $s = s(T, p)$, sfruttando la (38), otteniamo

$$s(T, p) - s_0 = c_V \ln \left[\frac{p}{p_0} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^\gamma \right]. \quad (46)$$

Proposizione 1. Se c_V è costante e p, τ, T sono legate dalla (38), allora vale la (43).

Dim. Si considera $s = s(T, p)$, per cui

$$\begin{aligned} T ds(T, p) &= \left(T \frac{\partial s(T, p)}{\partial T} \right) dT + \left(T \frac{\partial s(T, p)}{\partial p} \right) dp \\ &\stackrel{(28)}{=} c_p dT - T \tau \beta_T dp. \\ &\stackrel{(34)}{=} \end{aligned}$$

Calcolando β_T in base alla definizione (31) ed alla (38) abbiamo

$$T \tau \beta_T = \frac{\mathfrak{r}T}{p} = \tau,$$

e quindi

$$Tds(T, p) = c_p dT - \tau dp. \quad (47)$$

Ora, riprendiamo la (41) ed esprimiamola in termini di T e p ,

$$\begin{aligned} Tds(T, p) &= c_V dT + \underbrace{\left(\frac{\tau T}{p} \right)}_p d\tau(p, T) \\ &= \left(c_V + p \frac{\partial \tau}{\partial T} \right) dT + p \frac{\partial \tau}{\partial p} dp. \end{aligned} \quad (48)$$

Quindi, confrontando (47) con (48) otteniamo

$$\begin{aligned} c_p &= c_V + p \frac{\partial \tau(T, p)}{\partial T}, \xrightarrow{(38)} c_p = c_V + \tau, \\ -\tau &= p \frac{\partial \tau(T, p)}{\partial p}, \xrightarrow{(38)} -\tau = -\tau, \end{aligned}$$

e quindi la (43) è dimostrata.

□

In particolare, dalla (45) si ottiene

$$T = \hat{T}_o \tau^{1-\gamma} e^{s/c_V}, \quad \text{con} \quad \hat{T}_o = T_0 \tau_0^{\gamma-1} e^{-s_0/c_V},$$

da cui si ricava l'espressione originale della legge di stato

$$e = e(s, \tau) = c_V \hat{T}_o \tau^{1-\gamma} e^{s/c_V}.$$

3 Fluido perfetto comprimibile: equazioni costitutive

Consideriamo, oltre alle già enunciate assunzioni 1 e 2, anche le seguenti:

Assunzione 3. *Il c_V è costante e vale la legge (38).*

La conseguenza immediata dell'assunzione 3 è

$$e = c_V T \underset{(40)}{=} \underset{(43)}{\frac{c_V}{\tau}} p \tau \underset{(44)}{=} \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}. \quad (49)$$

Assunzione 4. *La dissipazione intrinseca (9) è nulla, cioè $\varphi_1 \equiv 0$, così come lo è la dissipazione temica (10), cioè $\varphi_2 \equiv 0$. Inoltre si assume che la densità r di sorgenti/pozzi di calore sia nulla: $r \equiv 0$.*

Una prima conseguenza dell'assunzione 4, della (11), che deve valere per ogni processo sperimentato dal fluido, e della (10) è che $\mathbf{q} \equiv 0$: il flusso di calore nel fluido è

costantemente e uniformemente nullo. Se a ciò aggiungiamo il fatto che $r \equiv 0$, la (9)₂ implica (e questo è la seconda conseguenza dell'assunzione 4)

$$\frac{Ds}{Dt} = 0, \quad (50)$$

ovvero l'entropia è conservata lungo il moto delle singole particelle, cioè

$$s = s(\xi), \quad \xi \quad \begin{array}{l} \text{coordinata lagrangiana} \\ \text{che denota le particelle} \\ \text{del fluido.} \end{array} \quad (51)$$

Definizione 5. Si dice che il moto del fluido è **isoentropico** se vale la (51). Nel caso in cui $s(\xi) \equiv \text{costante}$, $\forall \xi$, ovvero

$$\nabla s \equiv 0,$$

allora il moto (o più in generale il processo) è detto **omoentropico**.

Se il flusso è isoentropico, ricordando la (46), abbiamo

$$p\tau^\gamma = A(\xi), \quad \stackrel{(13)}{\Leftrightarrow} \quad p = A(\xi) \rho^\gamma, \quad (52)$$

dove la funzione $A(\xi)$ è una funzione che dipende da $s(\xi)$. Invece, nel caso di flussi omoentropici vale

$$p\tau^\gamma = A, \quad (53)$$

siccome $A(\xi) = A = \text{costante}$. La (13) e le (52), (53) implicano dunque

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho(\xi, p) = \left(\frac{p}{A(\xi)} \right)^{1/\gamma}, & \text{flussi isoentropici,} \\ \rho(p) = \left(\frac{p}{A} \right)^{1/\gamma}, & \text{flussi omoentropici.} \end{array} \right. \quad (54)$$

Osservazione 6. Si rimarca che, in generale, nel caso di flussi isoentropici $s = s(\mathbf{x}, t)$. Infatti, passando alle variabili euleriane \mathbf{x} , t , si ha $\xi = \xi(\mathbf{x}, t)$, da cui $s(\mathbf{x}, t) = s(\xi(\mathbf{x}, t))$.

Proposizione 2. Un fluido ideale che soddisfa le assunzioni 1-4 è un fluido barotropico solo se il flusso è omoentropico. In tal caso

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla h, \quad (55)$$

essendo h l'entalpia definita dalla (23).

Dim. Ricordando le (24), (25), si ha

$$\frac{Dh}{Dt} = \underbrace{T}_{\frac{\partial h}{\partial s}} \frac{Ds}{Dt} + \underbrace{\tau}_{\frac{\partial h}{\partial p}} \frac{Dp}{Dt} = T \frac{Ds}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt}.$$

Adesso la (50) ed il fatto che il flusso sia omoentropico

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{1}{\rho(p)} \frac{Dp}{Dt} \Rightarrow h(p) = h_0 + \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p')},$$

da cui la (55) discende banalmente. Applicando infine (54)₂, si ha

$$h(p) = \hat{h}_0 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \underbrace{\left(\frac{A}{p}\right)^{1/\gamma}}_{1/\rho} p = \hat{h}_0 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho(p)}. \quad (56)$$

□

4 Equazioni di moto del fluido perfetto comprimibile

Scriviamo adesso il sistema di equazioni che regolano la dinamica del fluido perfetto comprimibile, ovvero di quel fluido per cui le assunzioni 1 - 4 sono verificate.

Conservazione della massa.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

Conservazione del momento (in assenza di forze di massa).

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p = -\nabla \cdot (p\mathbb{I}), \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (p\mathbb{I}), \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p. \end{cases} \quad (57)$$

In particolare, ricordando che

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + (\nabla \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u}, \quad (58)$$

si ha

$$\mathbf{u} \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right).$$

Per cui moltiplicando scalarmente per \mathbf{u} la (57), e tenendo presente che

$$\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right),$$

si ottiene

$$\rho \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \right]}_{\frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right)} = -\mathbf{u} \cdot \nabla p. \quad (59)$$

Conservazione dell'energia interna.

Si parte dalla (4) e, tenendo conto delle assunzioni 1 e 4, si ha

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (60)$$

Sommando quindi insieme la (60) e la (59) si ottiene

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = -\nabla \cdot (p\mathbf{u}),$$

che scriveremo anche come

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 + \rho e \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 + \rho e \right) = -\nabla \cdot (p\mathbf{u}). \quad (61)$$

Introducendo l'energia totale per unità di massa

$$w = \frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 + \rho e \stackrel{(49)}{=} \frac{\rho}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{p}{\gamma - 1}, \quad (62)$$

la (61) si riscrive come

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot (w + p\mathbf{u}) = 0.$$

Il sistema di equazioni di conservazione massa, momento ed energia si riscrive così

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbb{I}) = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot (w + p\mathbf{u}) = 0, \end{cases}$$

con w dato dalla (62).

5 Fluido perfetto comprimibile: teorema di Bernulli, vorticità e teorema di Kelvin

Vediamo adesso come si deduce il teorema di Bernulli, l'equazione per la vorticità ed il teorema di Kelvin per un fluido perfetto comprimibile (ovvero un fluido che soddisfa le assunzioni 1 - 4). Si parte dalla (57)₂ e tenendo conto della (58) abbiamo

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{b}, \quad (63)$$

dove $\omega = \nabla \wedge \mathbf{u}$, e \mathbf{b} denota le forze di massa. Si suppone inoltre che quest'ultime siano conservative, cioè $\mathbf{b} = -\nabla \mathcal{U}$, essendo \mathcal{U} l'energia potenziale. Adesso, riprendendo l'entalpia h , che leggiamo come³

$$h(\mathbf{x}, t) = h(s(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t)),$$

e sfruttando le (24), (25) si ha

$$\nabla h = \underbrace{T}_{\frac{\partial h}{\partial s}} \nabla s + \underbrace{\frac{1}{\rho}}_{\frac{\partial h}{\partial p}} \nabla p, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla h - T \nabla s. \quad (64)$$

La (63) si riscrive

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) + \omega \wedge \mathbf{u} = -\nabla h - \nabla \mathcal{U} + T \nabla s, \quad (65)$$

da cui discendono il **teorema di Bernulli** (nelle sue tre versioni), l'**equazione per la vorticità** ed il **teorema di Kelvin**. Condizione necessaria affinché questi risultati valgano è, come vedremo, che il flusso sia omoentropico. In tal caso, infatti, il fluido è barotropico (si veda la proposizione 2) ed i teoremi di Bernulli e Kelvin, nonché l'equazione per la vorticità, sono semplici conseguenze.

5.1 Tre versioni del teorema di Bernulli

Prima versione. Se il flusso è: **stazionario** ($\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \equiv 0$), **omoentropico** ($\nabla s \equiv 0$) e **irrotazionale** ($\omega \equiv 0$), allora

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + h + \mathcal{U} \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{u}^2}{2} + h + \mathcal{U} = \text{costante}.$$

Seconda versione. Se il flusso è: **stazionario** ($\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \equiv 0$) e **omoentropico** ($\nabla s \equiv 0$), allora

$$\frac{\mathbf{u}^2}{2} + h + \mathcal{U} = F(\xi),$$

con ξ coordinata lagrangiana.

In particolare, siccome siamo in condizioni stazionarie, le traiettorie delle particelle e le linee di flusso coincidono, si dice anche

$$\frac{\mathbf{u}^2}{2} + h + \mathcal{U} \quad \text{costante lungo} \\ \text{le linee di flusso.}$$

³Si rimarca ancora che il fatto che $\frac{Ds}{Dt} = 0$, non implica che s sia costante in \mathbf{x} e in t . Come puntualizzato nell'osservazione 6 abbiamo $s(\mathbf{x}, t)$ anche se la (50) è verificata.

La dimostrazione di tale versione è banale. Infatti⁴

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + h + \mathcal{U} \right) = \mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + h + \mathcal{U} \right) = -\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}) = 0.$$

Terza versione. Se il flusso è: **potenziale** ($\mathbf{u} = \nabla \phi$) e **omoentropico** ($\nabla s \equiv 0$), allora

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + h + \mathcal{U} = C(t). \quad (66)$$

Se il flusso è potenziale allora è irrotazionale e la (65) diventa

$$\nabla \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + h + \mathcal{U} \right] = 0,$$

da cui la (66) discende immediatamente.

5.2 Equazione per la vorticità $\boldsymbol{\omega}$ e teorema di Kelvin

Facendo il rotore di (65) si ottiene⁵

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \wedge (T \nabla s),$$

da cui, ricordando che $\nabla \wedge (T \nabla s) = \nabla T \wedge \nabla s$, si ha

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla T \wedge \nabla s.$$

Se il flusso è **omoentropico** allora si ottiene la classica equazione

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

Passiamo adesso il teorema di Kelvin. Si considera una curva chiusa materiale $C(t)$ (che quindi sarà l'immagine al tempo t della curva C_0 nella configurazione di riferimento). La circuitazione lungo $C(t)$ è definita come

$$\Gamma(t) = \oint_{C(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}.$$

⁴Si ricorda che siamo in condizioni stazionarie per cui

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} + h + \mathcal{U} \right) = 0.$$

⁵Si applica la nota formula

$$\nabla \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

Procediamo con un'uninteressante relazione generale per l'evoluzione di $\Gamma(t)$ (che poi condurrà al teorema di Kelvin)

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\oint_{C(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} \right) = \frac{d}{dt} \left(\oint_{C_0} \sum_{i,j=1}^3 u_i(\boldsymbol{\xi}, t) \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} d\xi_j \right) \\
&= \oint_{C_0} \left(\sum_{i,j=1}^3 \frac{du_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} + u_i(\boldsymbol{\xi}, t) \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \right) d\xi_j \\
&= \oint_{C(t)} \underbrace{\frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{x}}_{\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}} + \oint_{C_0} \sum_{i,j=1}^3 u_i(\boldsymbol{\xi}, t) \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} d\xi_j .
\end{aligned}$$

Quindi, siccome $\oint_{C_0} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} = \frac{1}{2} \oint_{C_0} d\mathbf{u}^2 = 0$, si ha(64)

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma(t)}{dt} &= \oint_{C(t)} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{x} \stackrel{(57)_2}{=} - \oint_{C(t)} \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\mathbf{x} \\
&\stackrel{(64)}{=} - \underbrace{\oint_{C(t)} \nabla h \cdot d\mathbf{x}}_{=0} + \oint_{C(t)} T \nabla s \cdot d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

cioè

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \oint_{C(t)} T \nabla s \cdot d\mathbf{x} ,$$

e, se la regione è semplicemente connessa,

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \int_{\Sigma} \nabla T \wedge \nabla s \cdot \mathbf{n} dS ,$$

essendo Σ una superficie il cui bordo è $C(t)$. Deduciamo dunque che la circolazione è conservata (teorema di Kelvin) nel caso in cui il flusso sia omoentropico ($\nabla s \equiv 0$) oppure nel caso in cui la temperatura del fluido sia uniforme ($\nabla T \equiv 0$) e la regione dove si svolge il flusso sia semplicemente connessa.

6 Numero di Mach ed comprimibilità del fluido

Supponiamo di avere il fluido perfetto comprimibile sia in uno stato di riferimento in cui la pressione è uniforme e vale p_0 , la densità è uniforme e vale $\rho_0 = \rho(p_0)$ e la velocità è nulla $\mathbf{u} \equiv 0$. Supponiamo poi di variare la pressione e di ottenere un campo di pressione stazionario $p(\mathbf{x})$, una velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ed una nuova densità $\rho(\mathbf{x})$. Ci domandiamo: in che misura la nuova densità ρ differirà da ρ_0 ? E' chiaro che se $\rho \approx \rho_0$ il fluido potrà considerarsi praticamente incomprimibile.

Assumendo assenza di forze di massa e che il fluido sia omoentropico e irrotazionale la prima versione del teorema di Bernulli implica

$$\frac{\mathbf{u}^2}{2} + h = h_0, \quad (67)$$

dove, ricordando la (56),

$$h_0 = \hat{h}_0 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho(p_0)}, \quad h_0 = \hat{h}_0 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho(p)}.$$

Quindi,

$$h - h_0 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right) = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 - \frac{p}{p_0} \frac{\rho_0}{\rho} \right),$$

e, sfruttando la (54)₂,

$$h - h_0 = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (68)$$

Definizione 6. Si dice *velocità del suono* la quantità

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}.$$

In caso di flussi omoentropici (54)₂,

$$c^2 = A\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho}.$$

Definizione 7. Si dice *numero di Mach*

$$\text{Ma} = \frac{|\mathbf{u}|}{c}.$$

Sfruttando la definizione 6 e la (68), la relazione (67) diventa

$$\frac{\mathbf{u}^2}{2} = h_0 - h = \frac{c_0^2}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \right],$$

dove $c_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0$. Utilizzando poi la definizione 7

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \text{Ma}^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Quindi se $\text{Ma} \ll 1$, abbiamo che $\rho \approx \rho_0$ e gli effetti dovuti alla comprimibilità del fluido sono trascurabili.