L1. – Esercizi su: ***Logica proposizionale***.

Esercizio L1.1

Siano α, β formule della logica proposizionale. Posto

$$\varphi_1 \coloneqq (\alpha \wedge (\neg\alpha)) \vee \beta$$

e

$$\varphi_2 \coloneqq (\alpha \to (\beta \to \alpha)) \wedge \beta$$

si dica, motivando la risposta, se

(i) φ_1 è conseguenza logica di φ_2 ;

(ii) φ_2 è conseguenza logica di φ_1 ;

(iii) φ_1 e φ_2 sono logicamente equivalenti.

Esercizio L1.2

Siano a, b, c, d, e, f variabili proposizionali, e sia

$$\varphi \coloneqq \big((a \to (b \wedge d)) \wedge ((c \vee d) \to e) \wedge ((b \wedge e) \to f)\big) \to (a \to f)$$

Si dica, motivando la risposta,

(i) se φ è soddisfacibile;

(ii) se $\neg\varphi$ è soddisfacibile;

(iii) se φ è una tautologia;

(iv) se $\neg\varphi$ è una tautologia.

Esercizio L1.3

Siano x, y, z e t variabili proposizionali, e sia

$$\alpha \coloneqq (x \to y) \wedge (y \to (z \to t)) \wedge (y \to z)\,;$$

$$\beta \coloneqq x \to t.$$

Si dica, motivando la risposta:

(i) se β è conseguenza logica di α;
(ii) se α e β sono logicamente equivalenti.

Esercizio L1.4

Nel maniero di Shelbyville c’è stato un omicidio. Accurate indagini hanno permesso di appurare senza possiblità di errore che

(i) se l’omicidio è avvenuto a mezzanotte, allora certamente è vero almeno uno dei seguenti fatti: l’omicidio non è avvenuto in biblioteca, o il maggiordomo è innocente;

(ii) se il maggiordomo è colpevole, l’arma del delitto è un coltello;

(iii) se l’arma del delitto è un coltello e l’omicidio è avvenuto in biblioteca, allora l’omicidio è avvenuto a mezzanotte.

Scegliendo opportune variabili proposizionali (che vanno esplicitamente dichiarate), si formalizzino i risultati delle indagini e si dimostri che: se l’omicidio è avvenuto in biblioteca, allora il maggiordomo è innocente.

Esercizio L1.5

Siano p, q, r, x, y e z variabili proposizionali, e sia

$$\varphi_1 := (z \to r) \wedge (r \to p) \wedge (p \to y) \wedge (x \to q) \wedge (q \vee r \vee z)\,;$$

$$\varphi_2 := (x \vee y \vee p) \wedge \neg(q \wedge r \wedge z)\,;$$

$$\psi := x \to y.$$

Si dica, motivando la risposta, se ψ è conseguenza logica di $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

Esercizio L1.6

I matematici stanno studiando certi particolari numeri naturali, che vengono detti *numeri trunzi*. Non preciseremo qui la definizione di “trunzo” per un numero naturale; ci basterà sapere che è stato dimostrato che:

(i) se 3 è un numero trunzo, anche 4 e 6 sono numeri trunzi;

(ii) se almeno uno fra il 5 e il 6 è un numero trunzo, allora 1 non è un numero trunzo;

(iii) se non è trunzo né il 3 né il 5, allora 2 è un numero trunzo.

Definendo opportune variabili proposizionali per formalizzare i fatti esposti in (i), (ii) e (iii), si dica, motivando la risposta, se dalle (i), (ii) e (iii) si può dedurre come conseguenza logica (oppure no) che

(°) se 1 è un numero trunzo, anche 2 lo è.

Esercizio L1.7

Siano α, β formule della logica proposizionale. Posto

$$\varphi_1 \coloneqq (\alpha \vee (\neg\alpha)) \wedge \beta$$

e

$$\varphi_2 \coloneqq (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \wedge \beta$$

si dica, motivando la risposta, se

(i) φ_1 è conseguenza logica di φ_2 ;

(ii) φ_2 è conseguenza logica di φ_1 ;

(iii) φ_1 e φ_2 sono logicamente equivalenti.

Esercizio L1.8

Siano a, b, c, d, e, f variabili proposizionali, e sia

$$\varphi \coloneqq \big((b \rightarrow (c \wedge e)) \wedge ((d \vee e) \rightarrow f) \wedge ((c \wedge f) \rightarrow a)\big) \rightarrow (b \rightarrow a)$$

Si dica, motivando la risposta,

(i) se φ è soddisfacibile;

(ii) se $\neg\varphi$ è soddisfacibile;

(iii) se φ è una tautologia;

(iv) se $\neg\varphi$ è una tautologia.

Esercizio L1.9

Siano p, q, r, s, t e w variabili proposizionali. Si dica, motivando la risposta, se il seguente insieme K di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi una valutazione di verità che lo soddisfa:

$$\mathrm{K} \coloneqq \{\{p, \neg q\},\ \{r, \neg s\},\ \{\neg r, \neg s, \neg t\},\ \{t, \neg w\},\ \{w\},\ \{q, \neg r\},\ \{r, s, t\},\ \{\neg p\},\ \{p, q, w\}\}$$

Esercizio L1.10

Siano A, B, C, D, E, F, G variabili proposizionali. Si dica, motivando la risposta, se il seguente insieme di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi un'interpretazione che lo soddisfa:

$$\{\{\mathrm{A}, \neg\mathrm{B}\},\ \{\mathrm{C}, \neg\mathrm{D}\},\ \{\neg\mathrm{C}, \neg\mathrm{D}, \neg\mathrm{E}, \neg\mathrm{F}\},\ \{\mathrm{E}, \neg\mathrm{G}\},\ \{\neg\mathrm{F}, \mathrm{G}\},\ \{\mathrm{B}, \neg\mathrm{C}\},\ \{\mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}\},$$
$$\{\neg\mathrm{A}, \mathrm{F}\},\ \{\mathrm{D}, \neg\mathrm{E}\},\ \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{G}\}\}$$

Esercizio L1.11

Siano x, y, z e t variabili proposizionali, e sia

$\alpha := (x \to t) \wedge (t \to (z \to y)) \wedge (t \to z)$;

$\beta := x \to y$.

Si dica, motivando la risposta:

(i) se β è conseguenza logica di α;
(ii) se α e β sono logicamente equivalenti.

Esercizio L1.12

Nel maniero di Shelbyville c’è stato un omicidio. Accurate indagini hanno permesso di appurare senza possiblità di errore che

(i) se l’omicidio è avvenuto in biblioteca, allora certamente è vero almeno uno dei seguenti fatti: l’omicidio non è avvenuto a mezzanotte, o il maggiordomo è colpevole;

(ii) se il maggiordomo non è colpevole, l’arma del delitto è un coltello;

(iii) se l’arma del delitto è un coltello e l’omicidio è avvenuto a mezzanotte, allora l’omicidio è avvenuto in biblioteca.

Scegliendo opportune variabili proposizionali (che vanno esplicitamente dichiarate), si formalizzino i risultati delle indagini e si dimostri che: se l’omicidio è avvenuto a mezzanotte, allora il maggiordomo è colpevole.

Esercizio L1.13

Siano α, β formule della logica proposizionale. Posto

$$\psi_1 := \alpha \vee (\beta \wedge (\neg\beta))$$

e

$$\psi_2 := \alpha \wedge (\alpha \to (\beta \to \alpha))$$

si dica, motivando la risposta, se

(i) ψ_1 è conseguenza logica di ψ_2 ;

(ii) ψ_2 è conseguenza logica di ψ_1 ;

(iii) ψ_1 e ψ_2 sono logicamente equivalenti.

Esercizio L1.14

Siano a, b, c, h e k variabili proposizionali. Si stabilisca, motivando la risposta, se

$$(a \vee b) \wedge (b \rightarrow h) \wedge k \wedge (((a \rightarrow c) \wedge b) \vee h) \vDash h \wedge k\,.$$

Esercizio L1.15

Siano p, q, r, s, t e w variabili proposizionali. Si dica, motivando la risposta, se il seguente insieme K di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi una valutazione di verità che lo soddisfa:

$$\mathrm{K} \coloneqq \{\{p, \neg q\},\ \{r, \neg s\},\ \{\neg p, \neg q, \neg t\},\ \{t, \neg w\},\ \{w\},\ \{s, \neg p\},\ \{p, q, t\},\ \{\neg r\},\ \{r, s, w\}\}$$

Esercizio L1.16

Siano p, q, r, s, t e w variabili proposizionali. Si dica, motivando la risposta, se il seguente insieme K di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi una valutazione di verità che lo soddisfa:

$$\mathrm{K} \coloneqq \{\{p, \neg q\},\ \{q\},\ \{t, \neg w\},\ \{r, \neg s\},\ \{\neg p, \neg r, \neg s\},\ \{w, \neg r\},\ \{p, r, s\},\ \{\neg t\},\ \{q, t, w\}\}$$

Esercizio L1.17

Siano A, B, C, D, E, F, G variabili proposizionali. Si dica, motivando la risposta, se il seguente insieme di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi un’interpretazione che lo soddisfa:

$$\{\{\mathrm{A}, \neg\mathrm{B}\},\ \ \{\mathrm{C}, \neg\mathrm{D}\},\ \ \{\neg\mathrm{A}, \neg\mathrm{B}, \neg\mathrm{F}, \neg\mathrm{G}\},\ \ \{\mathrm{E}, \neg\mathrm{F}\},\ \ \{\neg\mathrm{E}, \mathrm{G}\},\ \ \{\neg\mathrm{A}, \mathrm{D}\},\ \ \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{F}, \mathrm{G}\},$$
$$\{\neg\mathrm{C}, \mathrm{F}\},\ \ \{\mathrm{B}, \neg\mathrm{G}\},\ \ \{\mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}\}\}$$

Esercizio L1.18

Siano a, b, c, d, e, f variabili proposizionali, e sia

$$\varphi \coloneqq ((c \rightarrow (d \wedge f)) \wedge ((e \vee f) \rightarrow a) \wedge ((c \wedge f) \rightarrow b)) \rightarrow (c \rightarrow b)$$

Si dica, motivando la risposta,

(i) se φ è soddisfacibile;

(ii) se $\neg\varphi$ è soddisfacibile;

(iii) se φ è una tautologia;

(iv) se $\neg\varphi$ è una tautologia.

Esercizio L1.19

Siano a, b, p, q, s e t variabili proposizionali, e sia

$\varphi_1 \coloneqq (a \to q) \wedge (p \to b) \wedge (s \to t) \wedge (t \to p) \wedge (q \vee s \vee t)$;

$\varphi_2 \coloneqq (a \vee b \vee p) \wedge \neg(q \wedge s \wedge t)$;

$\psi \coloneqq a \to b$.

Si dica, motivando la risposta, se ψ è conseguenza logica di $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

Esercizio L1.20

I glottologi stanno studiando certi caratteristiche fonetiche delle lettere, alcune delle quali sono state classificate come *lettere grufie*. Non preciseremo qui la definizione di “grufia” per una lettera; ci basterà sapere che:

(i) se “f” è una lettera grufia, anche “g” e “i” sono lettere grufie;

(ii) se almeno una fra la “h” e la “i” è una lettera grufia, allora “d” non è una lettera grufia;

(iii) se non è grufia né la “f” né la “h”, allora “e” è una lettera grufia.

Definendo opportune variabili proposizionali per formalizzare i fatti esposti in (i), (ii) e (iii), si dica, motivando la risposta, se dalle (i), (ii) e (iii) si può dedurre come conseguenza logica (oppure no) che

(°) se “d” è una lettera grufia, anche “e” lo è.

Esercizio L1.21

Siano α, β formule della logica proposizionale. Posto

$$\psi_1 \coloneqq \alpha \vee (\beta \wedge (\neg\beta))$$

e

$$\psi_2 \coloneqq \alpha \wedge (\beta \to (\alpha \to \beta))$$

si dica, motivando la risposta, se

(i) ψ_1 è conseguenza logica di ψ_2 ;

(ii) ψ_2 è conseguenza logica di ψ_1 ;

(iii) ψ_1 e ψ_2 sono logicamente equivalenti.

Esercizio L1.22

Siano a, b, c, x e y variabili proposizionali. Si stabilisca, motivando la risposta, se

$$(a \to b) \wedge (a \vee x) \wedge y \wedge ((a \wedge (x \to c)) \vee b) \vDash b \wedge y\,.$$

Esercizio L1.23

Siano a, b, c, d, p e q variabili proposizionali. Si dica, motivando la risposta, se il seguente insieme K di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi una valutazione di verità che lo soddisfa:

$$\mathrm{K} := \{\{a, \neg b\},\ \{b\},\ \{a, c, d\},\ \{p, \neg q\},\ \{c, \neg d\},\ \{\neg a, \neg c, \neg d\},\ \{q, \neg c\},\ \{\neg p\},\ \{b, p, q\}\}$$