

Programma di Complementi di Algebra A.A.  
2019/2020  
Teoria dei Numeri

1. Conseguenze della fattorizzazione in  $\mathbb{Z}$ . Esistono infiniti primi. Radici  $n$ -esime di interi. Primi di Fermat e di Mersenne.
2. Teorema di Wilson. Se  $n \in \mathbb{N}$  è composto allora  $(n - 1)! \not\equiv -1 \pmod{n}$ . Terne pitagoriche.
3. L'equazione diofantea  $x^4 + y^4 = z^2$  non ha soluzioni non banali. Equazione di Fermat per esponente 4.
4. L'equazione  $x^2 - dy^2 = 1$  ha infinite soluzioni, per ogni  $d \in \mathbb{N}$  non quadrato.
5. Problema di Frobenius. Esistenza di un minimo intero non rappresentabile.
6. Teorema di Sylvester.
7. Valutazioni  $p$ -adiche. Calcolo di  $\nu_p(n!)$ .
8. Se  $f$  è moltiplicativa, allora  $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$  è moltiplicativa.
9. Funzioni moltiplicative. Calcolo delle funzioni  $\tau(n) = |\{d \mid d \mid n\}|$  e  $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ . Caratterizzazione dei numeri perfetti pari.
10. Anello delle funzioni aritmetiche. Funzione di Möbius.
11.  $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{1,n}$ .
12. Formula di inversione di Möbius. La convoluzione di funzioni moltiplicative è moltiplicativa.
13.  $\varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$ .
14.  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .
15. Valutazione di  $\sum_{i \leq x} \varphi(i)$ .

16. Calcolo della probabilità che due interi siano coprimi.
17. La serie dei reciproci dei primi è divergente. Funzioni  $\theta$  e  $\psi$  di Čebichev.
18. Teorema di Čebichev. Postulato di Bertrand.
19. Ogni naturale si scrive come somma di quattro quadrati.