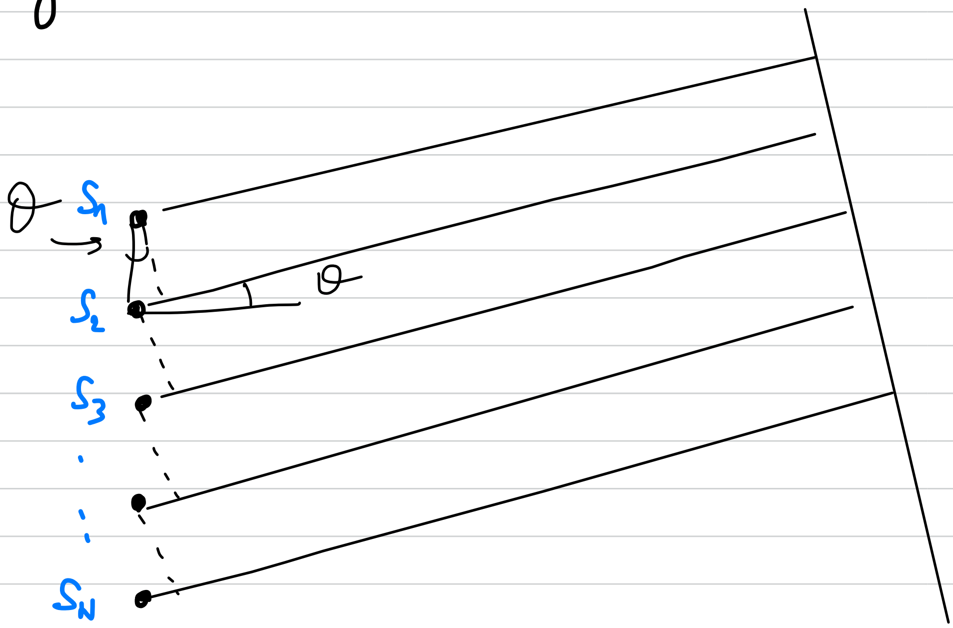
lezione del 30 settembre 2019

Consideriamo adesso di avere N sorgenti equidistanti e di voler calcolare l'intensità risultante a grande distanza nella direzione individuata dall'angolo θ



Il campo elettrico risultante lo si ottiene considerando la somma:

$$E_1 e^{i(\omega t+\phi_1)} + E e^{i(\omega t+\phi_2)} + E e^{i(\omega t+\phi_3)} + \dots E_N e^{i(\omega t+\phi_N)}$$

per quanto già visto prima

$$\phi_2 = \phi_1 + k d \sin\theta$$

$$\phi_3 = \phi_2 + k d \sin\theta = \phi_1 + 2 k d \sin\theta$$

$$\phi_4 = \phi_3 + kd\sin\theta = \phi_1 + 3\,kd\sin\theta$$

$$\vdots$$

$$\phi_N = \phi_{N-1} + kd\sin\theta = \phi_1 + (N-1)kd\sin\theta$$

per brevità di notazione chiamiamo

$$\boxed{kd\sin\theta = \delta}$$

inoltre supponiamo che l'ampiezza dei campi sia uguale

$E_1 = E_2 = E_3 = \dots E_N = E_0$

Se prendiamo $\phi_1 = 0$ e consideriamo il caso di sorgenti uguali tali quindi che l'ampiezza dei campi sia uguale:

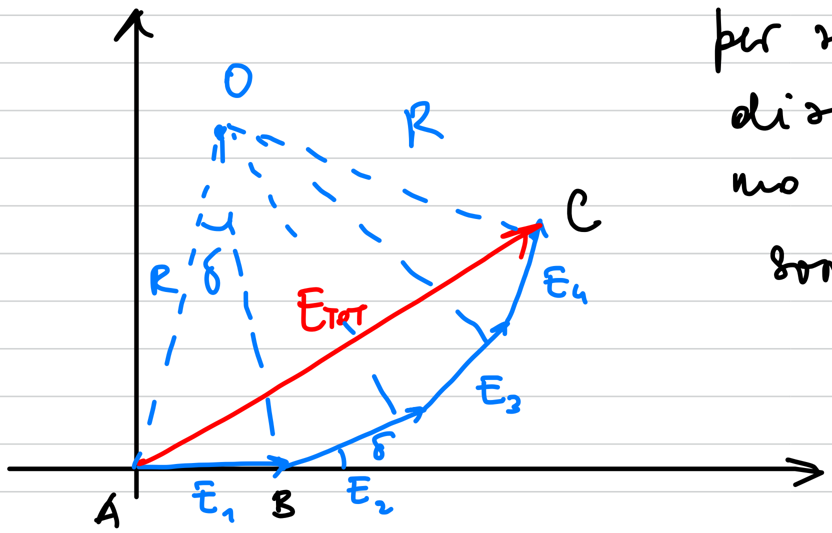
$E_1 = E_2 = E_3 = \dots E_N = E_0$

avremo:

$$E_0 e^{i\omega t} + E_0 e^{i(\omega t+\delta)} + E_0 e^{i(\omega t+2\delta)} + \dots E_0 e^{i(\omega t+(N-1)\delta)}$$

Possiamo quindi calcolare il campo

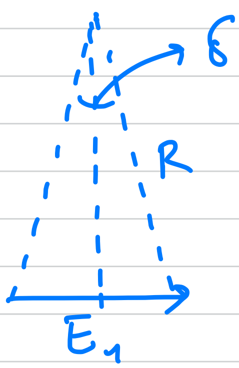
risultante come la somma dei vettori nel piano complesso



per semplicità nel disegno consideriamo il caso di 4 sorgenti

Tutti i vertici dei vettori stanno su di una circonferenza di centro O e raggio R

Consideriamo il triangolo AOB :

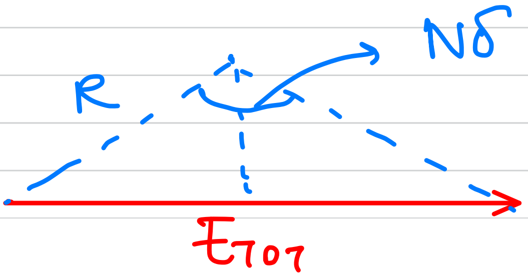


$$\frac{E_1}{2} = R \sin \delta/2$$

$E_1 = E_0$ tutte ampiezze uguali

e quindi $$R = \frac{E_0}{2 \sin \delta/2}$$

Consideriamo adesso il triangolo AOC :



$$\frac{E_{TOT}}{2} = R \sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)$$

e quindi sostituendo il valore di R

nella funzione di E_0 trovato abbiamo:

$$\frac{E_{TOT}}{R} = \frac{E_0}{2\sin\frac{\delta}{2}} \sin\frac{N\delta}{2}$$

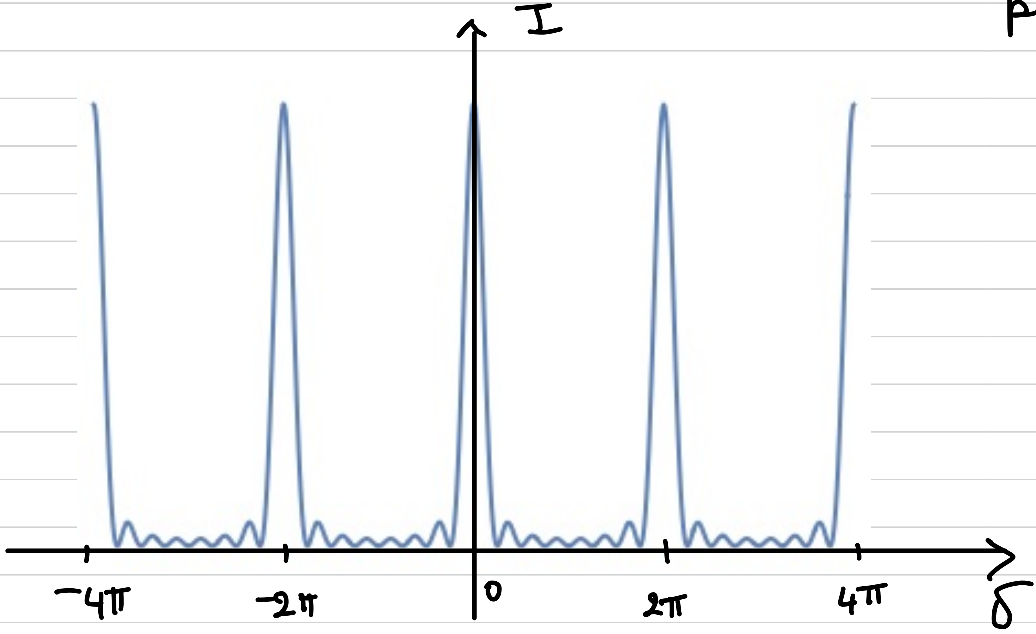
e infine

$$E_{TOT} = E_0 \frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\delta/2}$$

l'intensità risultante da un insieme di N sorgenti è quindi data da

$$\boxed{I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\frac{\delta}{2}}} \qquad (1)$$

Facciamo il grafico della funzione (1) per N=8



E' una funzione periodica con massimi assoluti per $\delta = m \cdot 2\pi$

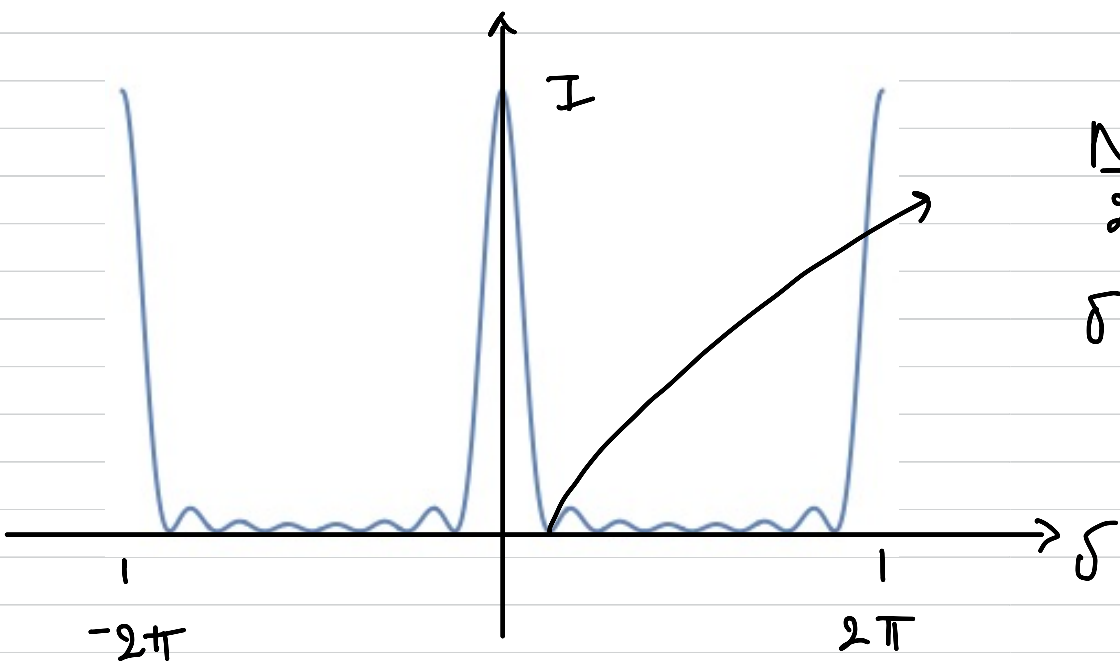
in particolare per $\delta = 0$

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2 \delta/2} \approx I_0 \frac{\left(\frac{N\delta}{2}\right)^2}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} = N^2 I_0$$

nei massimi assoluti quindi $I_{max} = N^2 I_0$

$I_{max} = N^2 I_0$ per $\delta = 2\pi m$

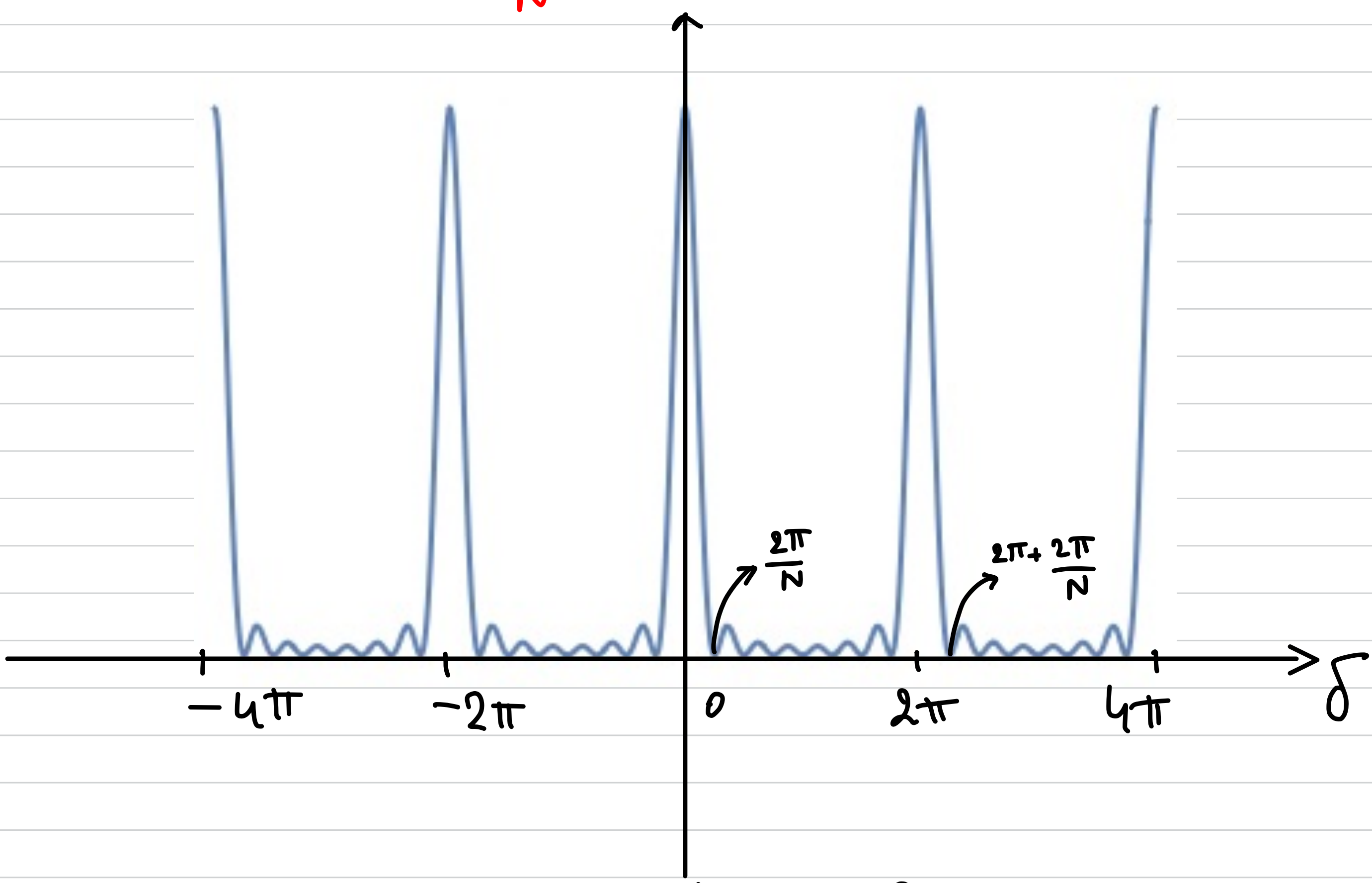
fra 2 massimi principali ci sono N−2 massimi secondari e N−1 minimi in cui $I = 0$. In particolare il primo minimo lo si ottiene per



$$\frac{N\delta}{2} = \pi$$

$$\delta = \frac{2\pi}{N}$$

Si ha il primo 0 dopo un massimo per $\delta = 2\pi m + \frac{2\pi}{N} \rightarrow \delta = 2\pi\left(m + \frac{1}{N}\right)$



Ricordando che $\delta = k d \sin\theta$

otteniamo:

$I = I_{max} = N^2 I_0$ $\quad k d \sin\theta = 2\pi m \rightarrow d \sin\theta = m\lambda$

primo minimo $I = 0$ $\quad k d \sin\theta = 2\pi\left(m + \frac{1}{N}\right) \quad d \sin\theta = \lambda\left(m + \frac{1}{N}\right)$

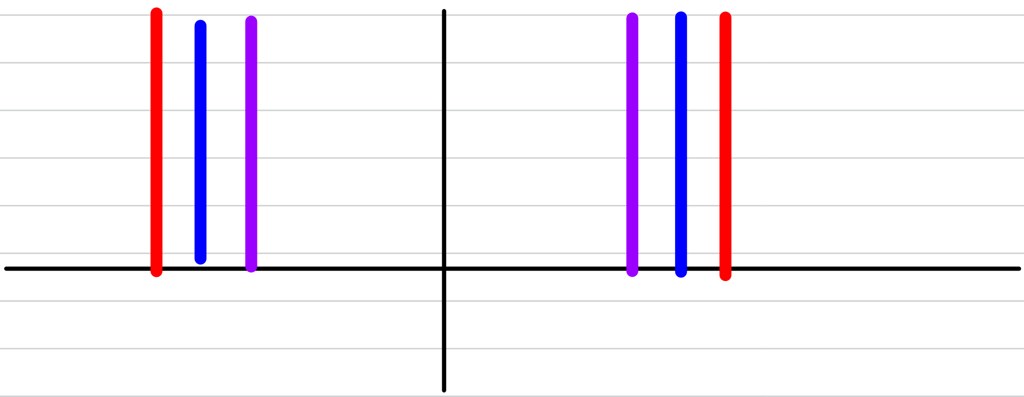
definisce la larghezza del massimo

Dalla condizione di interferenza costruttiva massima

$$d \sin\theta = m\lambda$$

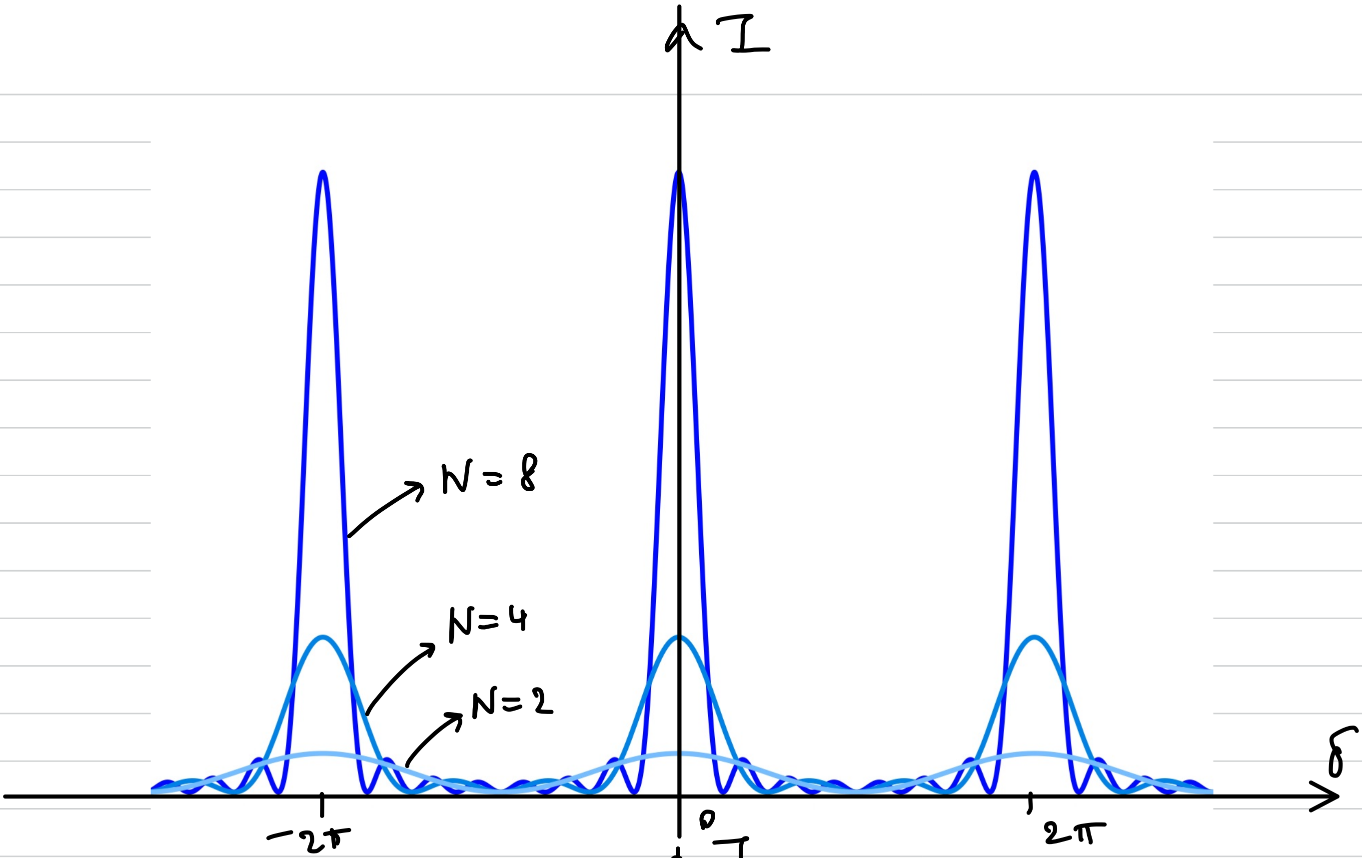
1. la posizione dei massimi dipende da λ tranne che per $m=0$ (dove si ha interferenza costruttiva per $\forall \lambda$)

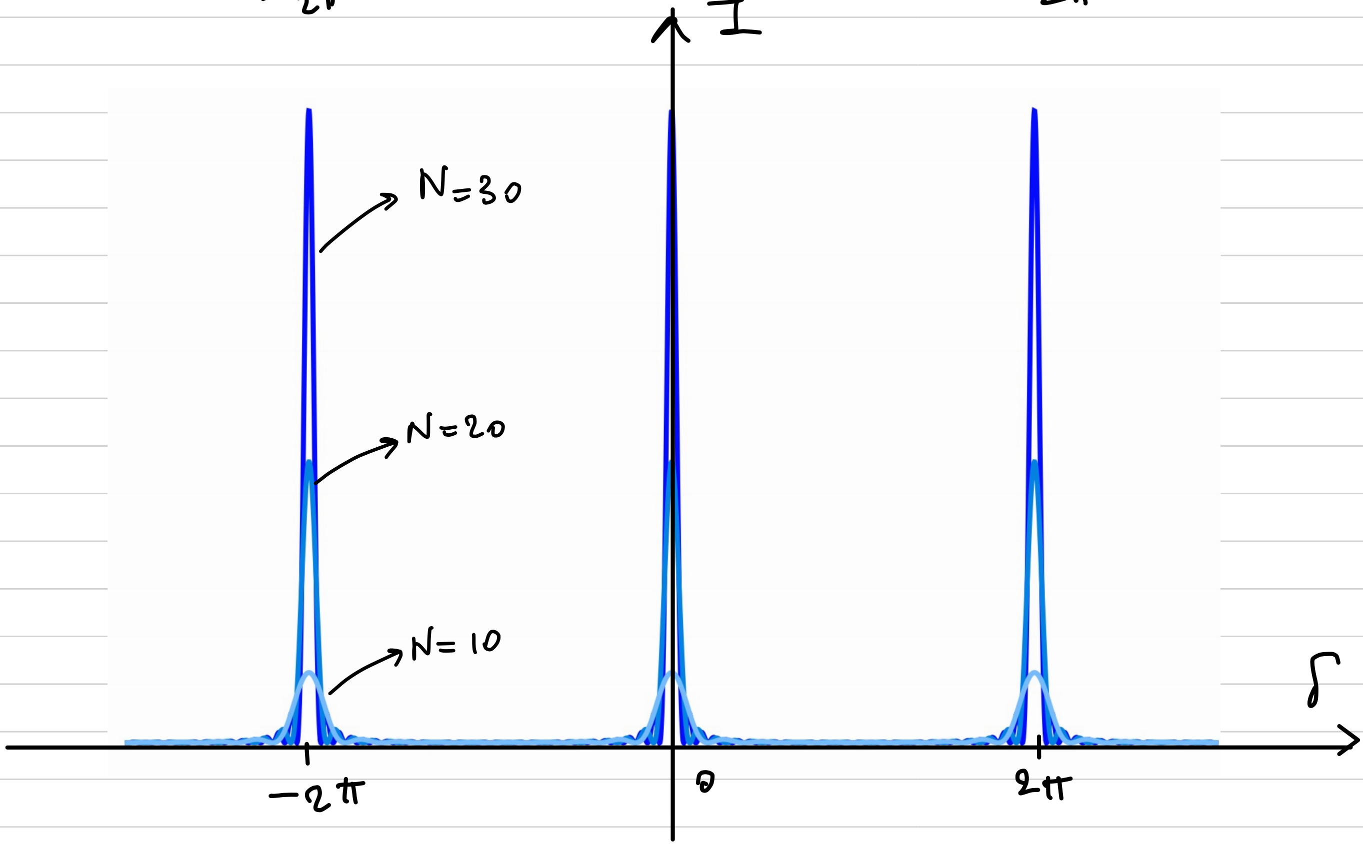
poiché $\sin\theta$ è una funzione crescente si ha interferenza con angoli minori per lunghezze d'onda minori



2. per avere max con $m \neq 0$ deve essere $d > \lambda$

(infatti $\sin\theta = \dfrac{m\lambda}{d} \leq 1$)

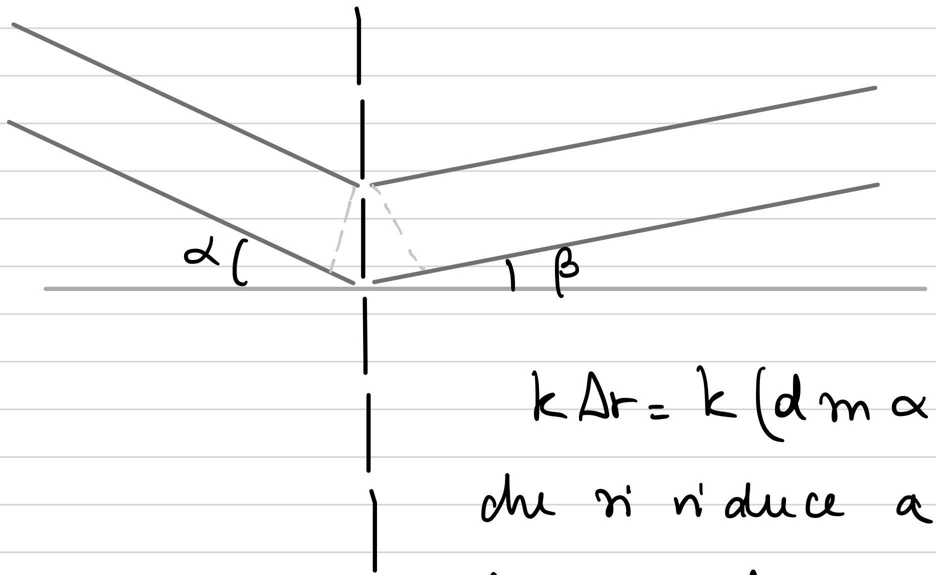




All'aumentare del numero N di sorgenti, i picchi di interferenza si stringono e la loro intensità aumenta come N^2

RETICOLO DI DIFFRAZIONE

è uno strumento che consente di osservare l'interferenza da N sorgenti coerenti equispaziate. La sua versione più semplice è quella di una lamina con N fenditure equispaziate



$$k\Delta r = k(d\sin\alpha + d\sin\beta)$$

che si riduce a $kd\sin\beta$

per incidenza normale ($\alpha = 0$)

Se consideriamo un reticolo di diffrazione illuminato da un'onda piana si ottiene l'interferenza di N sorgenti coerenti grazie al principio di HUYGENS-FRESNEL secondo cui ogni punto di un fronte d'onda che si propaga può essere considerato come sorgente secondaria di onde sferiche. Ed il fronte d'onda a tempi successivi è dato dall'inviluppo di esse

Condizione di interferenza costruttiva per un reticolo con un fascio di luce collimata che incide con angolo θ_i

$$\boxed{d(\sin\theta_i + \sin\theta) = m\lambda}$$

Con incidenza normale ($\theta_i = \pi/2$) *

$$\boxed{d\sin\theta = m\lambda}$$

D'ora in poi considereremo sempre il secondo caso e cioè quello di incidenza normale

* gli angoli sono sempre riferiti rispetto alla normale alla superficie del reticolo di diffrazione

Alcune grandezze che caratterizzano il comportamento di un reticolo di diffrazione sono:

- DISPERSIONE ANGOLARE
- POTERE RISOLVENTE
- FREE SPECTRAL RANGE

Dispersione Angolare:

Dato un ordine m del reticolo, si chiama dispersione angolare $D = \Delta\theta_m / \Delta\lambda$ la variazione dell'angolo θ a cui si ha interferenza costruttiva quando la lunghezza d'onda varia di una quantità $\Delta\lambda$.

Dalla relazione $d \sin\theta = m\lambda$
e differenziando si ottiene:

$$\lambda = \frac{d \sin\theta}{m}$$

e quindi derivando rispetto a θ

$$\frac{d\lambda}{d\theta} = \frac{d \cos\theta}{m}$$

e quindi passando da variazioni infinitesime ad intervalli:

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta\theta_m} = \frac{d\cos\theta}{m}$$

ed infine

$$\boxed{D = \frac{\Delta\theta_m}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}}$$

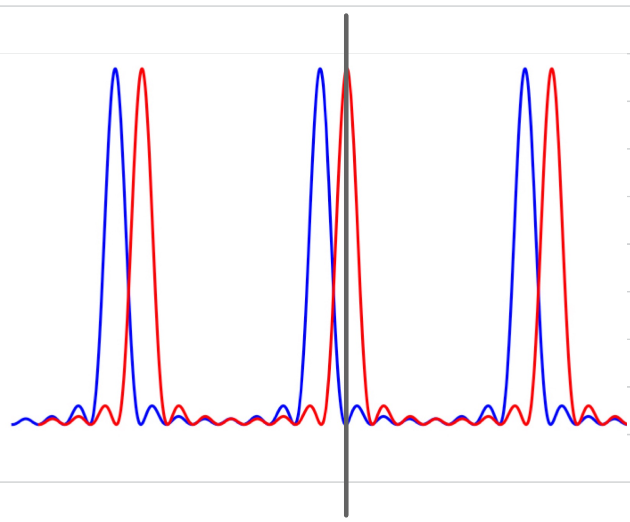
- la dispersione aumenta all'aumentare dell'ordine m
- la dispersione aumenta al diminuire della distanza d fra 2 fenditure (PASSO RETICOLARE)

Mazzoldi par. 14.6

Potere risolvente $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$

questa quantità ci dice, data una lunghezza d'onda λ, quanto è il minimo incremento $\Delta\lambda$ per poter osservare la riga $\lambda+\Delta\lambda$ risolta (e così ben separata).

Come prima cosa è quindi necessario definire un criterio che ci dica quando posso considerare risolte 2 righe dello spettro. Si utilizza il criterio di Rayleigh, secondo cui λ e $\lambda+\Delta\lambda$ sono risolte quando il massimo di interferenza per la lunghezza d'onda $\lambda+\Delta\lambda$ corrisponde al primo minimo per la lunghezza d'onda λ



condizione di massimo per $\lambda+\Delta\lambda$:

$$m(\lambda+\Delta\lambda) = d \sin\theta$$

condizione I minimo per λ:

$$\left(m+\frac{1}{N}\right)\lambda = d \sin\theta$$

$$\begin{cases} m(\lambda + \Delta\lambda) = d\cos\theta \\ \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda = d\cos\theta \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad m(\lambda+\Delta\lambda) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda$$

$$m\,\Delta\lambda = \frac{\lambda}{N}$$

e quindi

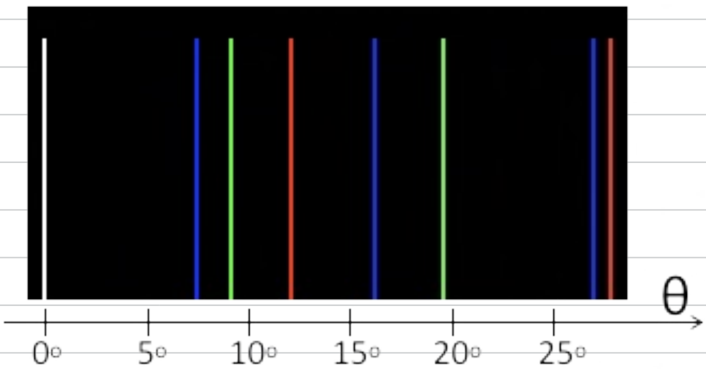
$$\boxed{R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm}$$

Il potere risolvente aumenta all'aumentare dell'ordine (m) e all'aumentare del numero di fenditure ILLUMINATE (N)

Free Spectral Range $FSR = \Delta\lambda$

è il massimo intervallo di lunghezze d'onda osservabile prima di avere sovrapposizione fra 2 ordini successivi. Si trova richiedendo che all'angolo θ si abbia un massimo all'ordine m per la lunghezza d'onda $\lambda + \Delta\lambda$ e all'ordine $(m+1)$ per la lunghezza d'onda λ:

$$\begin{cases} d \sin\theta = m(\lambda + \Delta\lambda) \\ d \sin\theta = (m+1)\lambda \end{cases}$$



$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda$$

$$m\Delta\lambda = \lambda$$

$$\boxed{FSR = \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}}$$

- il Free Spectral Range diminuisce all'aumentare di m (dove la dispersione angolare è maggiore)
- il Free Spectral Range aumenta per lunghezze d'onda maggiori