L1. – Soluzione degli esercizi su: ***Logica proposizionale***.

Esercizio L1.1

Siano α, β formule della logica proposizionale. Posto

$$\varphi_1 := (\alpha \wedge (\neg\alpha)) \vee \beta$$

e

$$\varphi_2 := (\alpha \to (\beta \to \alpha)) \wedge \beta$$

si dica, motivando la risposta, se

(i) φ_1 è conseguenza logica di φ_2 ;

(ii) φ_2 è conseguenza logica di φ_1 ;

(iii) φ_1 e φ_2 sono logicamente equivalenti.

Soluzione – Scriviamo la tabella che esprime i valori di verità di φ_1 e φ_2 in funzione dei valori di verità di α e β :

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge (\neg\alpha)$	$(\alpha \wedge (\neg\alpha)) \vee \beta$	$\beta \to \alpha$	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$	$(\alpha \to (\beta \to \alpha)) \wedge \beta$
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1

Poiché ogni valutazione di verità che rende vera φ_2 rende vera anche φ_1, φ_1 è conseguenza logica di φ_2 ; poiché ogni valutazione di verità che rende vera φ_1 rende vera anche φ_2, φ_2 è conseguenza logica di φ_1 ; poiché φ_1 è conseguenza logica di φ_2 e φ_2 è conseguenza logica di φ_1, φ_1 e φ_2 sono logicamente equivalenti.

Più brevemente, ma meno meccanicamente: poiché $\alpha \wedge (\neg\alpha)$ è una contraddizione (cioè è insoddisfacibile), φ_1 è logicamente equivalente a β; poiché $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ è una tautologia, φ_2 è logicamente equivalente a β. Dunque φ_1 e φ_2 sono fra loro logicamente equivalenti perché entrambe logicamente equivalenti a β .

Esercizio L1.2

Siano a, b, c, d, e, f variabili proposizionali, e sia

$$\varphi := \big((a \to (b \wedge d)) \wedge ((c \vee d) \to e) \wedge ((b \wedge e) \to f)\big) \to (a \to f)$$

Si dica, motivando la risposta,

(i) se φ è soddisfacibile;

(ii) se $\neg\varphi$ è soddisfacibile;

(iii) se φ è una tautologia;

(iv) se $\neg\varphi$ è una tautologia.

Soluzione – La φ è un'implicazione, quindi è certamente vera se la sua premessa è falsa; tale premessa è una congiunzione, quindi è falsa in ogni interpretazione che rende falso uno dei tre termini congiunti. Possiamo rendere falso $(a \to (b \wedge d)$ valutando a vero e b falso; qualunque valore di verità la nostra valutazione assegni poi alle variabili c, d, e e f, la φ risulterà vera. Dunque φ è soddisfacibile, da cui immediatamente possiamo dedurre che $\neg\varphi$ non è una tautologia.

Resta da stabilire se φ è una tautologia, ossia se $\neg\varphi$ non è soddisfacibile. Poiché

$$\neg\varphi \equiv \big((a \to (b \wedge d)) \wedge ((c \vee d) \to e) \wedge ((b \wedge e) \to f)\big) \wedge \neg(a \to f)$$

possiamo usare per $\neg\varphi$ la notazione "per clausole", nella quale essa si scrive come

$$\{\{\neg a, b\},\ \{\neg a, d\},\ \{\neg c, e\},\ \{\neg d, e\},\ \{\neg b, \neg e, f\},\ \{a\},\ \{\neg f\}\}\,.$$

Applichiamo l'algoritmo di Davis-Putnam per stabilire se $\neg\varphi$ è soddisfacibile:

pivot a:

clausole non contenenti né a né $\neg a$: $\{\neg c, e\}, \{\neg d, e\}, \{\neg b, \neg e, f\}, \{\neg f\}$;

Ris$_a(\{\neg a, b\}, \{a\}) = \{b\}$;
Ris$_a(\{\neg a, d\}, \{a\}) = \{d\}$;

$$\{\{\neg c, e\},\ \{\neg d, e\},\ \{\neg b, \neg e, f\},\ \{\neg f\},\ \{b\},\ \{d\}\}$$

pivot b:

clausole non contenenti né b né $\neg b$: $\{\neg c, e\}, \{\neg d, e\}, \{\neg f\}, \{d\}$;

Ris$_b(\{\neg b, \neg e, f\}, \{b\}) = \{\neg e, f\}$;

$$\{\{\neg c, e\},\ \{\neg d, e\},\ \{\neg f\},\ \{d\},\ \{\neg e, f\}\}\,;$$

pivot d:

clausole non contenenti né d né $\neg d$: $\{\neg c, e\}, \{\neg f\}, \{\neg e, f\}$;

Ris$_d(\{\neg d, e\}, \{d\}) = \{e\}$;

$$\{\{\neg c, e\},\ \{\neg f\},\ \{\neg e, f\},\ \{e\}\}\,;$$

Poiché $\{e\} \subset \{\neg c, e\}$, la clausola $\{\neg c, e\}$ può essere soppressa (cfr. oss. 2.9.7 negli appunti di logica), e siamo ricondotti a considerare l'insieme di clausole

$$\{\{\neg f\},\ \{\neg e, f\},\ \{e\}\}\,;$$

pivot e:

clausole non contenenti né e né $\neg e$: $\{\neg f\}$;

Ris$_e(\{\neg e, f\}, \{e\}) = \{f\}$;

$$\{\{\neg f\},\ \{f\}\}\,;$$

pivot f:

Ris$_f(\{\neg f\}, \{f\}) = []$;

$$\{[]\}\,.$$

Siamo giunti a un insieme di clausole non soddisfacibile (perché vi compare la clausola vuota): dunque $\neg\varphi$ non è soddisfacibile, e φ è una tautologia.

Esercizio L1.3

Siano x, y, z e t variabili proposizionali, e sia

$$\alpha := (x \to y) \wedge (y \to (z \to t)) \wedge (y \to z)\,;$$

$$\beta := x \to t.$$

Si dica, motivando la risposta:

(i) se β è conseguenza logica di α;
(ii) se α e β sono logicamente equivalenti.

Soluzione – Poiché α è congiunzione di enunciati l'ultimo dei quali è $y \to z$ e poiché né y né z compaiono in β, possiamo dire immediatamente che α e β ***non*** sono logicamente equivalenti: infatti qualunque valutazione di verità per la quale siano falsi x e z e vero y soddisfa β ma non soddisfa α.

Adesso verifichiamo se β è conseguenza logica di α, trasformando $\alpha \wedge \neg\beta$ in un insieme di clausole e controllando con l'algoritmo di Davis-Putnam se l'insieme di clausole così ottenuto è soddisfacibile (se non lo è, possiamo concludere che $\alpha \vDash \beta$).
Scriviamo α in forma normale congiuntiva:

$$\alpha \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg z \vee t) \wedge (\neg y \vee z)\,;$$

scriviamo la negazione di β in forma normale congiuntiva:

$$\beta \equiv x \wedge \neg t;$$

scriviamo $\alpha \wedge \neg\beta$ in forma normale congiuntiva:

$$\alpha \wedge \neg\beta \equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg z \vee t) \wedge (\neg y \vee z) \wedge x \wedge \neg t\,;$$

scriviamo l'insieme di clausole che vogliamo controllare se è soddisfacibile:

$$\{\{\neg x, y\}, \{\neg y, \neg z, t\}, \{\neg y, z\}, \{x\}, \{\neg t\}\}.$$

pivot x:

clausole non contenenti né x né $\neg x$: $\{\neg y, \neg z, t\}$, $\{\neg y, z\}$, $\{\neg t\}$;

$\mathrm{Ris}_x(\{\neg x, y\}, \{x\}) = \{y\}$;

$$\{\{\neg y, \neg z, t\}, \{\neg y, z\}, \{\neg t\},\ \{y\}\}$$

pivot y:

clausole non contenenti né y né $\neg y$: $\{\neg t\}$;

$\mathrm{Ris}_y(\{\neg y, \neg z, t\}, \{y\}) = \{\neg z, t\}$;
$\mathrm{Ris}_y(\{\neg y, z\}, \{y\}) = \{z\}$;

$$\{\{\neg t\}, \{\neg z, t\}, \{z\}\};$$

pivot z:

clausole non contenenti né z né $\neg z$: $\{\neg t\}$;

$\mathrm{Ris}_z(\{\neg z, t\}, \{z\}) = \{t\}$;

$$\{\{\neg t\}, \{t\}\}.$$

pivot t:

$\mathrm{Ris}_t(\{\neg t\}, \{t\}) = []$;

$$\{[]\}$$

Dunque l'insieme di clausole da cui siamo partiti non è soddisfacibile, e possiamo concludere che $\alpha \vDash \beta$.

Esercizio L1.4

Nel maniero di Shelbyville c’è stato un omicidio. Accurate indagini hanno permesso di appurare senza possiblità di errore che

(i) se l’omicidio è avvenuto a mezzanotte, allora certamente è vero almeno uno dei seguenti fatti: l’omicidio non è avvenuto in biblioteca, o il maggiordomo è innocente;

(ii) se il maggiordomo è colpevole, l’arma del delitto è un coltello;

(iii) se l’arma del delitto è un coltello e l’omicidio è avvenuto in biblioteca, allora l’omicidio è avvenuto a mezzanotte.

Scegliendo opportune variabili proposizionali (che vanno esplicitamente dichiarate), si formalizzino i risultati delle indagini e si dimostri che: se l’omicidio è avvenuto in biblioteca, allora il maggiordomo è innocente.

Soluzione – Poniamo

$m :=$ l’omicidio è avvenuto a mezzanotte;

$b :=$ l’omicidio è avvenuto in biblioteca;

$i :=$ il maggiordomo è innocente;

$c :=$ l’arma del delitto è un coltello.

Dobbiamo dimostrare che

$$\{m \to ((\neg b) \vee i),\ \ (\neg i) \to c,\ \ (c \wedge b) \to m\} \vDash b \to i$$

ossia che

$$(m \to ((\neg b) \vee i)) \wedge ((\neg i) \to c) \wedge ((c \wedge b) \to m) \vDash b \to i\,.$$

Ciò equivale a dimostrare che la formula

$$\varphi := (m \to ((\neg b) \vee i)) \wedge ((\neg i) \to c) \wedge ((c \wedge b) \to m) \wedge \neg(b \to i)$$

non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in forma normale congiuntiva, la trasformiamo in un insieme di clausole $\mathcal{K}$ e applichiamo l’algoritmo di Davis-Putnam:

$$\varphi \equiv (\neg m \vee ((\neg b) \vee i)) \wedge (\neg(\neg i) \vee c) \wedge (\neg(c \wedge b) \vee m) \wedge (b \wedge \neg i) \equiv$$

$$\equiv (\neg m \vee \neg b \vee i) \wedge (i \vee c) \wedge (\neg c \vee \neg b \vee m) \wedge b \wedge \neg i$$

$$\mathcal{K} := \{\{\neg m, \neg b, i\},\ \ \{i, c\},\ \ \{\neg c, \neg b, m\},\ \ \{b\},\ \ \{\neg i\}\}$$

pivot b:

clausole non contenenti né b né $\neg b$: $\{i, c\}$, $\{\neg i\}$;

$\mathrm{Ris}_b(\{\neg m, \neg b, i\}, \{b\}) = \{\neg m, i\}$;
$\mathrm{Ris}_b(\{\neg c, \neg b, m\}, \{b\}) = \{\neg c, m\}$;

$$\{\{i, c\},\ \ \{\neg i\},\ \ \{\neg m, i\},\ \ \{\neg c, m\}\}$$

pivot i:

clausole non contenenti né i né $\neg i$: $\{\neg c, m\}$;

$\text{Ris}_i(\{i, c\}, \{\neg i\}) = \{c\}$;
$\text{Ris}_i(\{\neg m, i\}, \{\neg i\}) = \{\neg m\}$;

$$\{\{c\},\ \ \{\neg m\},\ \ \{\neg c, m\}\}$$

pivot c:

clausole non contenenti né c né $\neg c$: $\{\neg m\}$;

$\text{Ris}_c(\{c\}, \{\neg c, m\}) = \{m\}$;

$$\{\{\neg m\},\ \{m\}\}$$

pivot m:

clausole non contenenti né m né $\neg m$: nessuna ;

$\text{Ris}_m(\{\neg m\}, \{m\}) = []$;

$$\{[]\}$$

Abbiamo ottenuto un insieme di clausole non soddisfacibile (perché vi appare la clausola vuota): pertanto nemmeno l'insieme di clausole dal quale siamo partiti è soddisfacibile; dunque $b \to i$ è conseguenza logica di $\{m \to ((\neg b) \vee i),\ (\neg i) \to c,\ (c \wedge b) \to m\}$, come si voleva.

Esercizio L1.5

Siano p, q, r, x, y e z variabili proposizionali, e sia

$\varphi_1 := (z \to r) \wedge (r \to p) \wedge (p \to y) \wedge (x \to q) \wedge (q \vee r \vee z)$;
$\varphi_2 := (x \vee y \vee p) \wedge \neg(q \wedge r \wedge z)$;
$\psi := x \to y$.

Si dica, motivando la risposta, se ψ è conseguenza logica di $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

Soluzione – Si ha che

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \psi$$

se e soltanto se $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \neg\psi$ non è soddisfacibile. D'altro lato,

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \neg\psi =$$

$$= (z \to r) \wedge (r \to p) \wedge (p \to y) \wedge (x \to q) \wedge (q \vee r \vee z) \wedge (x \vee y \vee p) \wedge \neg(q \wedge r \wedge z) \wedge \neg(x \to y) \equiv$$

$$\equiv (\neg z \vee r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg p \vee y) \wedge (\neg x \vee q) \wedge (q \vee r \vee z) \wedge (x \vee y \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg z) \wedge (x \wedge \neg y)\,.$$

Quest'ultima formula è in FNC e si traduce nel seguente insieme di clausole:

$$\mathcal{K} := \{\{r, \neg z\},\ \{p, \neg r\},\ \{\neg p, y\},\ \{\neg x, q\},\ \{q, r, z\},\ \{x, y, p\},\ \{\neg q, \neg r, \neg z\},\ \{x\},\ \{\neg y\}\}$$

Utilizziamo l'algoritmo di Davis-Putnam per decidere se esso è soddisfacibile.

Osserviamo subito che la clausola $\{x, y, p\}$ può essere soppressa perché include la clausola $\{x\}$ (cfr. oss. 2.9.7 negli appunti di logica), cosicché considereremo anziché $\mathcal{K}$ il seguente insieme di clausole:

$$\{\{r, \neg z\},\ \{p, \neg r\},\ \{\neg p, y\},\ \{\neg x, q\},\ \{q, r, z\},\ \{\neg q, \neg r, \neg z\},\ \{x\},\ \{\neg y\}\}$$

Pivot x:

clausole non contenenti né x né $\neg x$: $\{r, \neg z\}$, $\{p, \neg r\}$, $\{\neg p, y\}$, $\{q, r, z\}$, $\{\neg q, \neg r, \neg z\}$, $\{\neg y\}$;

$\text{Ris}_x(\{\neg x, q\}, \{x\}) = \{q\}$;

$$\{\{r, \neg z\},\ \{p, \neg r\},\ \{\neg p, y\},\ \{q, r, z\},\ \{\neg q, \neg r, \neg z\},\ \{\neg y\},\ \{q\}\}$$

Poiché $\{q\} \subset \{q, r, z\}$, la clausola $\{q, r, z\}$ può essere soppressa, e siamo ricondotti a considerare l'insieme di clausole

$$\{\{r, \neg z\},\ \{p, \neg r\},\ \{\neg p, y\},\ \{\neg q, \neg r, \neg z\},\ \{\neg y\},\ \{q\}\}$$

Pivot q:

clausole non contenenti né q né $\neg q$: $\{r, \neg z\}$, $\{p, \neg r\}$, $\{\neg p, y\}$, $\{\neg y\}$;

$\text{Ris}_q(\{\neg q, \neg r, \neg z\}, \{q\}) = \{\neg r, \neg z\}$;

$$\{\{r, \neg z\},\ \{p, \neg r\},\ \{\neg p, y\},\ \{\neg y\},\ \{\neg r, \neg z\}\}$$

Pivot y:

clausole non contenenti né y né $\neg y$: $\{r, \neg z\}$, $\{p, \neg r\}$, $\{\neg r, \neg z\}$;

$\text{Ris}_y(\{\neg p, y\}, \{\neg y\}) = \{\neg p\}$;

$$\{\{r, \neg z\},\ \{p, \neg r\},\ \{\neg r, \neg z\},\ \{\neg p\}\}$$

Pivot p:

clausole non contenenti né p né $\neg p$: $\{r, \neg z\}$, $\{\neg r, \neg z\}$;

$\text{Ris}_p(\{p, \neg r\}, \{\neg p\}) = \{\neg r\}$;

$$\{\{r, \neg z\},\ \{\neg r, \neg z\},\ \{\neg r\}\}$$

Poiché $\{\neg r\} \subset \{\neg r, \neg z\}$, la clausola $\{\neg r, \neg z\}$ può essere soppressa, e siamo ricondotti a considerare l'insieme di clausole

$$\{\{r, \neg z\},\ \{\neg r\}\}$$

Pivot r:

$\mathrm{Ris}_r(\{r, \neg z\}, \{\neg r\}) = \{\neg z\}$

$$\{\{\neg z\}\}$$

Pivot z:

$$\{\}\,.$$

Avendo ottenuto l’insieme vuoto di clausole, possiamo concludere che K è soddisfacibile. Dunque ψ non è conseguenza logica di $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

Possiamo anche costruire (procedendo “a ritroso”) una valutazione di verità v che soddisfa K (e quindi soddisfa φ_1 e φ_2 ma non soddisfa ψ). Basta porre

$$v(z) := 0\,; \quad v(y) := 0\,; \quad v(x) := 1; \quad v(r) := 0\,; \quad v(q) := 1\,; \quad v(p) := 0\,.$$

Esercizio L1.6

I matematici stanno studiando certi particolari numeri naturali, che vengono detti *numeri trunzi*. Non preciseremo qui la definizione di “trunzo” per un numero naturale; ci basterà sapere che è stato dimostrato che:

(i) se 3 è un numero trunzo, anche 4 e 6 sono numeri trunzi;

(ii) se almeno uno fra il 5 e il 6 è un numero trunzo, allora 1 non è un numero trunzo;

(iii) se non è trunzo né il 3 né il 5, allora 2 è un numero trunzo.

Definendo opportune variabili proposizionali per formalizzare i fatti esposti in (i), (ii) e (iii), si dica, motivando la risposta, se dalle (i), (ii) e (iii) si può dedurre come conseguenza logica (oppure no) che

(°) se 1 è un numero trunzo, anche 2 lo è.

Soluzione – Introduciamo le seguenti variabili proposizionali:

$a :=$ “3 è un numero trunzo” ; $b :=$ “4 è un numero trunzo” ;
$c :=$ “6 è un numero trunzo” ; $d :=$ “5 è un numero trunzo” ;
$x :=$ “1 è un numero trunzo” ; $y :=$ “2 è un numero trunzo” .

Le (i), (ii), (iii) e (°) si possono allora scrivere come

(i) $a \to (b \wedge c)$; ovvero, in forma normale congiuntiva: $(\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c)$;

(ii) $(c \vee d) \to (\neg x)$; ovvero, in FNC: $(\neg c \vee \neg x) \wedge (\neg d \vee \neg x)$;

(iii) $(\neg a \wedge \neg d) \to y$; ovvero, in FNC: $a \vee d \vee y$;

(°) $x \to y$; ovvero, in FNC: $\neg x \vee y$.

Ci viene chiesto di stabilire se è vero che

$$\{(\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c),\ \ (\neg c \vee \neg x) \wedge (\neg d \vee \neg x),\ \ a \vee d \vee y\} \vDash \neg x \vee y$$

e ciò avviene se e soltanto se non è soddisfacibile la formula (già in FNC)

$$(\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg c \vee \neg x) \wedge (\neg d \vee \neg x) \wedge (a \vee d \vee y) \wedge x \wedge \neg y\,.$$

Trasformando tale formula in un insieme di clausole, possiamo applicare l’algoritmo di Davis-Putnam:

$$\{\{\neg a, b\},\ \ \{\neg a, c\},\ \{\neg c, \neg x\},\ \ \{\neg d, \neg x\},\ \ \ \{a, d, y\},\ \ \ \{x\},\ \ \{\neg y\}\}.$$

Pivot x:

clausole non contenenti né x né $\neg x$: $\{\neg a, b\}$, $\{\neg a, c\}$, $\{a, d, y\}$, $\{\neg y\}$;

$\text{Ris}_x(\{\neg c, \neg x\}, \{x\}) = \{\neg c\}$;
$\text{Ris}_x(\{\neg d, \neg x\}, \{x\}) = \{\neg d\}$;

$$\{\{\neg a, b\},\ \ \{\neg a, c\},\ \ \ \{a, d, y\},\ \ \{\neg y\},\ \{\neg c\},\ \ \{\neg d\}\}$$

Pivot c:

clausole non contenenti né c né $\neg c$: $\{\neg a, b\}$, $\{a, d, y\}$, $\{\neg y\}$, $\{\neg d\}$;

$\text{Ris}_c(\{\neg a, c\}, \{\neg c\}) = \{\neg a\}$;

$$\{\{\neg a, b\},\ \ \ \{a, d, y\},\ \ \{\neg y\},\ \ \{\neg d\},\ \{\neg a\}\}$$

La clausola $\{\neg a, b\}$ può essere soppressa perché include l’altra clausola $\{\neg a\}$ (cfr. oss. 2.9.7 negli appunti di logica). Siamo dunque ricondotti a considerare l’insieme di clausole

$$\{\{a, d, y\},\ \ \{\neg y\},\ \ \{\neg d\},\ \{\neg a\}\}$$

Pivot a:

clausole non contenenti né a né $\neg a$: $\{\neg y\}$, $\{\neg d\}$;

$\text{Ris}_a(\{a, d, y\}, \{\neg a\}) = \{d, y\}$;

$$\{\{\neg y\},\ \ \{\neg d\},\ \ \ \{d, y\}\}$$

Pivot d:

clausole non contenenti né d né $\neg d$: $\{\neg y\}$;

$\text{Ris}_d(\{\neg d\}, \{d, y\}) = \{y\}$;

$$\{\{\neg y\},\ \ \{y\}\}$$

Pivot y:

$\text{Ris}_y(\{\neg y\}, \{y\}) = [\,]$;

$$\{[\,]\}.$$

Abbiamo ottenuto un insieme di clausole non soddisfacibile (perché vi appare la clausola vuota): pertanto nemmeno l'insieme di clausole dal quale siamo partiti è soddisfacibile; dunque (°) è conseguenza logica delle (i), (ii) e (iii).

Esercizio L1.7

Siano α, β formule della logica proposizionale. Posto

$$\varphi_1 := (\alpha \vee (\neg\alpha)) \wedge \beta$$

e

$$\varphi_2 := (\alpha \to (\beta \to \alpha)) \wedge \beta$$

si dica, motivando la risposta, se

(i) φ_1 è conseguenza logica di φ_2 ;
(ii) φ_2 è conseguenza logica di φ_1 ;
(iii) φ_1 e φ_2 sono logicamente equivalenti.

Soluzione – Scriviamo la tabella che esprime i valori di verità di φ_1 e φ_2 in funzione dei valori di verità di α e β :

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \vee (\neg\alpha)$	$(\alpha \vee (\neg\alpha)) \wedge \beta$	$\beta \to \alpha$	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$	$(\alpha \to (\beta \to \alpha)) \wedge \beta$
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1

Poiché ogni valutazione di verità che rende vera φ_2 rende vera anche φ_1, φ_1 è conseguenza logica di φ_2 ; poiché ogni valutazione di verità che rende vera φ_1 rende vera anche φ_2, φ_2 è conseguenza logica di φ_1 ; poiché φ_1 è conseguenza logica di φ_2 e φ_2 è conseguenza logica di φ_1, φ_1 e φ_2 sono logicamente equivalenti.

Esercizio L1.8

Siano a, b, c, d, e, f variabili proposizionali, e sia

$$\varphi := \big((b \to (c \wedge e)) \wedge ((d \vee e) \to f) \wedge ((c \wedge f) \to a)\big) \to (b \to a)\,.$$

Si dica, motivando la risposta,

(i) se φ è soddisfacibile;
(ii) se $\neg\varphi$ è soddisfacibile;
(iii) se φ è una tautologia;
(iv) se $\neg\varphi$ è una tautologia.

Soluzione – La φ è un’implicazione, quindi è certamente vera se la sua premessa è falsa; tale premessa è una congiunzione, quindi è falsa in ogni interpretazione che rende falso uno tei termini congiunti. Possiamo rendere falso $(b \to (c \wedge e)$ valutando b vero e c falso; qualunque valore di verità si assegni poi alle variabili a, d, e e f, la φ risulterà vera. Dunque φ è soddisfacibile, da cui immediatamente possiamo dedurre che $\neg\varphi$ non è una tautologia.

Resta da stabilire se φ è una tautologia, ossia se $\neg\varphi$ non è soddisfacibile. Poiché

$$\neg\varphi \equiv \big((b \to (c \wedge e)) \wedge ((d \vee e) \to f) \wedge ((c \wedge f) \to a)\big) \wedge \neg(b \to a)$$

possiamo usare per $\neg\varphi$ la notazione “per clausole”, nella quale essa si scrive come

$$\{\{\neg b, c\},\ \{\neg b, e\},\ \{\neg d, f\},\ \{\neg e, f\},\ \{\neg c, \neg f, a\},\ \{b\},\ \{\neg a\}\}\,.$$

Applichiamo l’algoritmo di Davis-Putnam per stabilire se $\neg\varphi$ è soddisfacibile:

pivot a:

clausole non contenenti né a né $\neg a$: $\{\neg b, c\}, \{\neg b, e\}, \{\neg d, f\}, \{\neg e, f\}, \{b\}$;

$\mathrm{Ris}_a(\{\neg c, \neg f, a\}, \{\neg a\}) = \{\neg c, \neg f\}$;

$$\{\{\neg b, c\},\ \{\neg b, e\},\ \{\neg d, f\},\ \{\neg e, f\},\ \{b\},\ \{\neg c, \neg f\}\}$$

pivot b:

clausole non contenenti né b né $\neg b$: $\{\neg d, f\}, \{\neg e, f\}, \{\neg c, \neg f\}$;

$\mathrm{Ris}_b(\{\neg b, c\}, \{b\}) = \{c\}$;
$\mathrm{Ris}_b(\{\neg b, e\}, \{b\}) = \{e\}$;

$$\{\{\neg d, f\},\ \{\neg e, f\},\ \{\neg c, \neg f\},\ \{c\},\ \{e\}\}$$

pivot c:

clausole non contenenti né c né $\neg c$: $\{\neg d, f\}, \{\neg e, f\}, \{e\}$;

$\mathrm{Ris}_c(\{\neg c, \neg f\}, \{c\}) = \{\neg f\}$;

$$\{\{\neg d, f\},\ \{\neg e, f\},\ \{e\},\ \{\neg f\}\}$$

pivot e:

clausole non contenenti né e né $\neg e$: $\{\neg d, f\}, \{\neg f\}$;

$\mathrm{Ris}_e(\{\neg e, f\}, \{e\}) = \{f\}$;

$$\{\{\neg d, f\},\ \{\neg f\},\ \{f\}\}$$

La clausola $\{\neg d, f\}$ può essere soppressa perché include l’altra clausola $\{f\}$ (cfr. oss. 2.9.7 negli appunti di logica). Siamo dunque ricondotti a considerare l’insieme di clausole

$$\{\{\neg f\},\ \{f\}\}$$

pivot f:

$\mathrm{Ris}_f(\{\neg f\}, \{f\}) = []$;

$$\{[]\}\,.$$

Abbiamo ottenuto un insieme di clausole non soddisfacibile (perché vi appare la clausola vuota): pertanto nemmeno l'insieme di clausole dal quale siamo partiti è soddisfacibile; dunque $\neg\varphi$ non è soddisfacibile, e φ è una tautologia.

Esercizio L1.9

Siano p, q, r, s, t e w variabili proposizionali. Si dica, motivando la risposta, se il seguente insieme K di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi una valutazione di verità che lo soddisfa:

$$\mathrm{K} := \{\{p, \neg q\},\ \{r, \neg s\},\ \{\neg r, \neg s, \neg t\},\ \{t, \neg w\},\ \{w\},\ \{q, \neg r\},\ \{r, s, t\},\ \{\neg p\},\ \{p, q, w\}\}$$

Soluzione – Osserviamo in primo luogo che la clausola $\{p,\ q,\ w\}$ può essere soppressa perché in K è presente la clausola $\{w\}$ in essa contenuta.

Adesso applichiamo l'algoritmo di Davis-Putnam all'insieme di clausole

$$\{\{p, \neg q\},\ \{r, \neg s\},\ \{\neg r, \neg s, \neg t\},\ \{t, \neg w\},\ \{w\},\ \{q, \neg r\},\ \{r, s, t\},\ \{\neg p\}\}.$$

Pivot p:

clausole non contenenti né p né $\neg p$: $\{r, \neg s\}$, $\{\neg r, \neg s, \neg t\}$, $\{t, \neg w\}$, $\{w\}$, $\{q, \neg r\}$, $\{r, s, t\}$;

$\mathrm{Ris}_p(\{p, \neg q\}, \{\neg p\}) = \{\neg q\}$;

$$\{\{r, \neg s\},\ \{\neg r, \neg s, \neg t\},\ \{t, \neg w\},\ \{w\},\ \{q, \neg r\},\ \{r, s, t\},\ \{\neg q\}\}$$

Pivot q:

clausole non contenenti né q né $\neg q$: $\{r, \neg s\}$, $\{\neg r, \neg s, \neg t\}$, $\{t, \neg w\}$, $\{w\}$, $\{r, s, t\}$;

$\mathrm{Ris}_q(\{q, \neg r\}, \{\neg q\}) = \{\neg r\}$;

$$\{\{r, \neg s\},\ \{\neg r, \neg s, \neg t\},\ \{t, \neg w\},\ \{w\},\ \{r, s, t\},\ \{\neg r\}\}$$

La clausola $\{\neg r,\ \neg s,\ \neg t\}$ può essere soppressa perché è presente la clausola $\{\neg r\}$ in essa contenuta (cfr. oss. 2.9.7 negli appunti di logica). Si considera dunque l'insieme di clausole

$$\{\{r, \neg s\},\ \{t, \neg w\},\ \{w\},\ \{r, s, t\},\ \{\neg r\}\}$$

Pivot r:

clausole non contenenti né r né $\neg r$: $\{t, \neg w\}$, $\{w\}$;

$\text{Ris}_r(\{r, \neg s\}, \{\neg r\}) = \{\neg s\}$;
$\text{Ris}_r(\{r, s, t\}, \{\neg r\}) = \{s, t\}$;

$$\{\{t, \neg w\},\ \{w\},\ \{\neg s\},\ \{s, t\}\}$$

Pivot s:

clausole non contenenti né s né $\neg s$: $\{t, \neg w\}$, $\{w\}$;

$\text{Ris}_s(\{\neg s\}, \{s, t\}) = \{t\}$;

$$\{\{t, \neg w\},\ \{w\},\ \{t\}\}$$

La clausola $\{t,\ \neg w\}$ può essere soppressa perché è presente la clausola $\{t\}$ in essa contenuta. Siamo così ricondotti a considerare l'insieme di clausole

$$\{\{w\},\ \{t\}\}\,.$$

Pivot w:

clausole non contenenti né w né $\neg w$: $\{t\}$;

Non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{t\}\}$$

Pivot t:

$$\{\}\,.$$

Avendo ottenuto l'insieme vuoto di clausole, possiamo concludere che K è soddisfacibile. Una valutazione v che soddisfa K si definisce sulle variabili procedendo "a ritroso" dall'ultimo insieme di clausole via via fino al primo. Si può porre

$$v(t) := 1,\ \ v(w) := 1,\ \ v(s) := 0,\ \ v(p) := 0,\ \ v(q) := 0 \ \text{ e } \ v(r) := 0\,.$$

Esercizio L1.10

Siano A, B, C, D, E, F, G variabili proposizionali. Si dica, motivando la risposta, se il seguente insieme di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi un'interpretazione che lo soddisfa:

$$\{\{A, \neg B\},\ \ \{C, \neg D\},\ \ \{\neg C, \neg D, \neg E, \neg F\},\ \ \{E, \neg G\},\ \ \{\neg F, G\},\ \ \{B, \neg C\},\ \ \{C, D, E, F\},$$
$$\{\neg A, F\},\ \ \{D, \neg E\},\ \ \{A, B, G\}\}$$

Soluzione – Applichiamo l'algoritmo di Davis-Putnam.

Pivot A:

clausole non contenenti né A né ¬A:

$$\{C, \neg D\}, \{\neg C, \neg D, \neg E, \neg F\}, \{E, \neg G\}, \{\neg F, G\}, \{B, \neg C\}, \{C, D, E, F\}, \{D, \neg E\};$$

$Ris_A(\{A, \neg B\}, \{\neg A, F\}) = \{\neg B, F\}$;
$Ris_A(\{A, B, G\}, \{\neg A, F\}) = \{B, F, G\}$;

$$\{\{C, \neg D\}, \{\neg C, \neg D, \neg E, \neg F\}, \{E, \neg G\}, \{\neg F, G\}, \{B, \neg C\}, \{C, D, E, F\}, \{D, \neg E\}, \{\neg B, F\}, \{B, F, G\}\}$$

Pivot B:

clausole non contenenti né B né ¬B: $\{C, \neg D\}, \{\neg C, \neg D, \neg E, \neg F\}, \{E, \neg G\}, \{\neg F, G\}, \{C, D, E, F\}, \{D, \neg E\}$;

$Ris_B(\{B, \neg C\}, \{\neg B, F\}) = \{\neg C, F\}$;
$Ris_B(\{B, F, G\}, \{\neg B, F\}) = \{F, G\}$;

$$\{\{C, \neg D\}, \{\neg C, \neg D, \neg E, \neg F\}, \{E, \neg G\}, \{\neg F, G\}, \{C, D, E, F\}, \{D, \neg E\}, \{\neg C, F\}, \{F, G\}\}$$

Pivot C:

clausole non contenenti né C né ¬C: $\{E, \neg G\}, \{\neg F, G\}, \{D, \neg E\}, \{F, G\}$;

$Ris_C(\{C, \neg D\}, \{\neg C, \neg D, \neg E, \neg F\}) = \{\neg D, \neg E, \neg F\}$;
$Ris_C(\{C, \neg D\}, \{\neg C, F\}) = \{\neg D, F\}$;
$Ris_C(\{C, D, E, F\}, \{\neg C, \neg D, \neg E, \neg F\}) = \{D, \neg D, E, \neg E, F, \neg F\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$Ris_C(\{C, D, E, F\}, \{\neg C, F\}) = \{D, E, F\}$;

$$\{\{E, \neg G\}, \{\neg F, G\}, \{D, \neg E\}, \{F, G\}, \{\neg D, \neg E, \neg F\}, \{\neg D, F\}, \{D, E, F\}\}$$

Pivot D:

clausole non contenenti né D né ¬D: $\{E, \neg G\}, \{\neg F, G\}, \{F, G\}$;

$Ris_D(\{D, \neg E\}, \{\neg D, \neg E, \neg F\}) = \{\neg E, \neg F\}$;
$Ris_D(\{D, \neg E\}, \{\neg D, F\}) = \{\neg E, F\}$;
$Ris_D(\{D, E, F\}, \{\neg D, \neg E, \neg F\}) = \{E, \neg E, F, \neg F\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$Ris_D(\{D, E, F\}, \{\neg D, F\}) = \{E, F\}$;

$$\{\{E, \neg G\}, \{\neg F, G\}, \{F, G\}, \{\neg E, \neg F\}, \{\neg E, F\}, \{E, F\}\}$$

Pivot E:

clausole non contenenti né E né ¬E: $\{\neg F, G\}, \{F, G\}$;

$Ris_E(\{E, \neg G\}, \{\neg E, \neg F\}) = \{\neg G, \neg F\}$;
$Ris_E(\{E, \neg G\}, \{\neg E, F\}) = \{\neg G, F\}$;
$Ris_E(\{E, F\}, \{\neg E, \neg F\}) = \{F, \neg F\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$Ris_E(\{E, F\}, \{\neg E, F\}) = \{F\}$;

$$\{\{\neg F, G\}, \{F, G\}, \{\neg F, \neg G\}, \{F, \neg G\}, \{F\}\}$$

Le clausole $\{F, G\}$ e $\{F, \neg G\}$ si possono sopprimere perché è presente la clausola $\{F\}$ in esse inclusa (cfr. oss. 2.9.7 negli appunti di logica). Siamo dunque ricondotti a considerare l'insieme di clausole

$$\{\{\neg F, G\}, \{\neg F, \neg G\}, \{F\}\}$$

Pivot F:

$\text{Ris}_\text{F}(\{\neg\text{F}, \text{G}\}, \{\text{F}\}) = \{\text{G}\}$;
$\text{Ris}_\text{F}(\{\neg\text{F}, \neg\text{G}\}, \{\text{F}\}) = \{\neg\text{G}\}$;

$$\{\{\text{G}\},\ \{\neg\text{G}\}\}$$

Pivot G:

$\text{Ris}_\text{G}(\{\text{G}\}, \{\neg\text{G}\}) = []$;

$$\{[]\}$$

Abbiamo ottenuto un insieme di clausole non soddisfacibile (perché vi appare la clausola vuota): pertanto nemmeno l'insieme di clausole dal quale siamo partiti è soddisfacibile.

Esercizio L1.11

Siano x, y, z e t variabili proposizionali, e sia

$\alpha := (x \to t) \wedge (t \to (z \to y)) \wedge (t \to z)$;

$\beta := x \to y$.

Si dica, motivando la risposta:

(i) se β è conseguenza logica di α;
(ii) se α e β sono logicamente equivalenti.

Soluzione – Poiché α è congiunzione di enunciati l'ultimo dei quali è $t \to z$ e poiché né t né z compaiono in β, possiamo dire immediatamente che α e β ***non*** sono logicamente equivalenti: infatti qualunque valutazione di verità per la quale siano falsi x e z e vero t soddisfa β ma non soddisfa α.

Adesso verifichiamo se β è conseguenza logica di α, trasformando $\alpha \wedge \neg\beta$ in un insieme di clausole e controllando con l'algoritmo di Davis-Putnam se l'insieme di clausole così ottenuto è soddisfacibile (se non lo è, possiamo concludere che $\alpha \vDash \beta$).
Scriviamo α in forma normale congiuntiva:

$\alpha \equiv (\neg x \vee t) \wedge (\neg t \vee \neg z \vee y) \wedge (\neg t \vee z)$;

scriviamo la negazione di β in forma normale congiuntiva:

$\beta \equiv x \wedge \neg y$;

scriviamo $\alpha \wedge \neg\beta$ in forma normale congiuntiva:

$\alpha \wedge \neg\beta \equiv (\neg x \vee t) \wedge (\neg t \vee \neg z \vee y) \wedge (\neg t \vee z) \wedge x \wedge \neg y$;

scriviamo l'insieme di clausole che vogliamo controllare se è soddisfacibile:

$$\{\{\neg x, t\}, \{y, \neg z, \neg t\}, \{z, \neg t\}, \{x\}, \{\neg y\}\}.$$

Applichiamo l'algoritmo di Davis e Putnam.

pivot x:

clausole non contenenti né x né $\neg x$: $\{y, \neg z, \neg t\}$, $\{z, \neg t\}$, $\{\neg y\}$;

$\mathrm{Ris}_x(\{\neg x, t\}, \{x\}) = \{t\}$;

$$\{\{y, \neg z, \neg t\}, \{z, \neg t\}, \{\neg y\},\ \{t\}\}$$

pivot y:

clausole non contenenti né y né $\neg y$: $\{z, \neg t\}$, $\{t\}$;

$\mathrm{Ris}_y(\{y, \neg z, \neg t\}, \{\neg y\}) = \{\neg z, \neg t\}$;

$$\{\{z, \neg t\}, \{t\}, \{\neg z, \neg t\}\};$$

pivot z:

clausole non contenenti né z né $\neg z$: $\{t\}$;

$\mathrm{Ris}_z(\{z, \neg t\}, \{\neg z, \neg t\}) = \{\neg t\}$;

$$\{\{t\}, \{\neg t\}\}.$$

pivot t:

$\mathrm{Ris}_t(\{t\}, \{\neg t\}) = []$;

$$\{[]\}$$

Dunque l’insieme di clausole da cui siamo partiti non è soddisfacibile, e possiamo concludere che $\alpha \vDash \beta$.

Esercizio L1.12

Nel maniero di Shelbyville c’è stato un omicidio. Accurate indagini hanno permesso di appurare senza possiblità di errore che

(i) se l’omicidio è avvenuto in biblioteca, allora certamente è vero almeno uno dei seguenti fatti: l’omicidio non è avvenuto a mezzanotte, o il maggiordomo è colpevole;

(ii) se il maggiordomo non è colpevole, l’arma del delitto è un coltello;

(iii) se l’arma del delitto è un coltello e l’omicidio è avvenuto a mezzanotte, allora l’omicidio è avvenuto in biblioteca.

Scegliendo opportune variabili proposizionali (che vanno esplicitamente dichiarate), si formalizzino i risultati delle indagini e si dimostri che: se l’omicidio è avvenuto a mezzanotte, allora il maggiordomo è colpevole.

Soluzione – Poniamo

$b :=$ l’omicidio è avvenuto in biblioteca;
$m :=$ l’omicidio è avvenuto a mezzanotte;
$c :=$ il maggiordomo è colpevole;
$k :=$ l’arma del delitto è un coltello.

Dobbiamo dimostrare che

$$\{b \to (\neg m \vee c),\ \ \neg c \to k,\ \ (k \wedge m) \to b\} \vDash m \to c\,.$$

Ciò equivale a dimostrare che la formula

$$(b \to (\neg m \vee c)) \wedge (\neg c \to k) \wedge ((k \wedge m) \to b) \wedge m \wedge \neg c$$

non è soddisfacibile. La scriviamo in forma normale congiuntiva

$$(\neg b \vee \neg m \vee c) \wedge (c \vee k) \wedge (\neg k \vee \neg m \vee b) \wedge m \wedge \neg c$$

e poi la trasformiamo in un insieme di clausole al quale applichiamo l’algoritmo di Davis e Putnam:

$$\{\{\neg b, c, \neg m\},\ \ \{c, k\},\ \ \{b, \neg m, \neg k\},\ \ \{m\},\ \ \{\neg c\}\}$$

pivot m:

clausole non contenenti né m né $\neg m$: $\{c, k\}$, $\{\neg c\}$;

$\text{Ris}_m(\{\neg b, c, \neg m\}, \{m\}) = \{\neg b, c\}$;
$\text{Ris}_m(\{b, \neg m, \neg k\}, \{m\}) = \{b, \neg k\}$;

$$\{\{c, k\}, \{\neg c\}, \{\neg b, c\}, \{b, \neg k\}\}$$

Pivot c:

clausole non contenenti né c né $\neg c$: $\{b, \neg k\}$;

$\text{Ris}_c(\{c, k\}, \{\neg c\}) = \{k\}$;
$\text{Ris}_c(\{\neg b, c\}, \{\neg c\}) = \{\neg b\}$;

$$\{\{b, \neg k\}, \{k\}, \{\neg b\}\}$$

pivot b:

clausole non contenenti né b né $\neg b$: $\{k\}$;

$\text{Ris}_b(\{b, \neg k\}, \{\neg b\}) = \{\neg k\}$;

$$\{\{k\}, \{\neg k\}\}$$

pivot k:

$\text{Ris}_k(\{k\}, \{\neg k\}) = []$;

$$\{[]\}$$

Abbiamo ottenuto un insieme di clausole non soddisfacibile (perché vi appare la clausola vuota): pertanto nemmeno l’insieme di clausole dal quale siamo partiti è soddisfacibile; dunque $m \to c$ è conseguenza logica di $\{b \to ((\neg m) \vee c), (\neg c) \to k, (k \wedge m) \to b\}$, come si voleva dimostrare.

Esercizio L1.13

Siano α, β formule della logica proposizionale. Posto

$$\psi_1 \coloneqq \alpha \vee (\beta \wedge (\neg\beta))$$

e

$$\psi_2 \coloneqq \alpha \wedge (\alpha \to (\beta \to \alpha))$$

si dica, motivando la risposta, se

(i) ψ_1 è conseguenza logica di ψ_2 ;

(ii) ψ_2 è conseguenza logica di ψ_1 ;

(iii) ψ_1 e ψ_2 sono logicamente equivalenti.

Soluzione – Scriviamo la tabella che esprime i valori di verità di ψ_1 e ψ_2 in funzione dei valori di verità di α e β :

α	β	$\neg\beta$	$\beta \wedge (\neg\beta)$	$\alpha \vee (\beta \wedge (\neg\beta))$	$\beta \to \alpha$	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$	$\alpha \wedge (\alpha \to (\beta \to \alpha))$
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1

Poiché ogni valutazione di verità che rende vera ψ_2 rende vera anche ψ_1, ψ_1 è conseguenza logica di ψ_2 ; poiché ogni valutazione di verità che rende vera ψ_1 rende vera anche ψ_2, ψ_2 è conseguenza logica di ψ_1 ; poiché ψ_1 è conseguenza logica di ψ_2 e ψ_2 è conseguenza logica di ψ_1, ψ_1 e ψ_2 sono logicamente equivalenti.

Esercizio L1.14

Siano a, b, c, h e k variabili proposizionali. Si stabilisca, motivando la risposta, se

$$(a \vee b) \wedge (b \to h) \wedge k \wedge (((a \to c) \wedge b) \vee h) \vDash h \wedge k\,.$$

Soluzione – Sappiamo che

$$(a \vee b) \wedge (b \to h) \wedge k \wedge (((a \to c) \wedge b) \vee h) \vDash h \wedge k$$

se e soltanto se la formula

$$\varphi \coloneqq (a \vee b) \wedge (b \to h) \wedge k \wedge (((a \to c) \wedge b) \vee h) \wedge \neg(h \wedge k)$$

non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in FNC e trasformiamola in un insieme di clausole. Si ha

$$\varphi \equiv (a \vee b) \wedge (\neg b \vee h) \wedge k \wedge (((\neg a \vee c) \wedge b) \vee h) \wedge (\neg h \vee \neg k) \equiv$$

$$\equiv (a \vee b) \wedge (\neg b \vee h) \wedge k \wedge (\neg a \vee c \vee h) \wedge (b \vee h) \wedge (\neg h \vee \neg k)$$

e questa scrittura dà luogo al seguente insieme di clausole:

$$\{\{a, b\}, \{\neg b, h\}, \{k\}, \{\neg a, c, h\}, \{b, h\}, \{\neg h, \neg k\}\}\,.$$

Applichiamo l'algoritmo di Davis e Putnam scegliendo come primo pivot k, che compare in una clausola di lunghezza minima.

Pivot k:

clausole non contenenti né k né $\neg k$: $\{a, b\}$, $\{\neg b, h\}$, $\{\neg a, c, h\}$, $\{b, h\}$;

$\mathrm{Ris}_k(\{k\}, \{\neg h, \neg k\}) = \{\neg h\}$;

$$\{\{a, b\}, \{\neg b, h\}, \{\neg a, c, h\}, \{b, h\}, \{\neg h\}\}$$

Pivot h:

clausole non contenenti né h né $\neg h$: $\{a, b\}$;

$\mathrm{Ris}_h(\{\neg b, h\}, \{\neg h\}) = \{\neg b\}$;
$\mathrm{Ris}_h(\{\neg a, c, h\}, \{\neg h\}) = \{\neg a, c\}$;
$\mathrm{Ris}_h(\{b, h\}, \{\neg h\}) = \{b\}$;

$$\{\{a, b\}, \{\neg b\}, \{\neg a, c\}, \{b\}\}$$

La clausola $\{a, b\}$ si può sopprimere perché è presente la clausola $\{b\}$ in essa inclusa (cfr. oss. 2.9.7 negli appunti di logica). Siamo dunque ricondotti a considerare l'insieme di clausole

$$\{\{\neg b\}, \{\neg a, c\}, \{b\}\}$$

Pivot b:

clausole non contenenti né b né $\neg b$: $\{\neg a, c\}$;

$\mathrm{Ris}_b(\{b\}, \{\neg b\}) = []$;

$$\{\{\neg a, c\}, []\}$$

Abbiamo ottenuto un insieme di clausole non soddisfacibile (perché vi appare la clausola vuota): pertanto nemmeno l'insieme di clausole dal quale siamo partiti è soddisfacibile; dunque $h \wedge k$ è conseguenza logica di $(a \vee b) \wedge (b \rightarrow h) \wedge k \wedge (((a \rightarrow c) \wedge b) \vee h)$.

Esercizio L1.15

Siano p, q, r, s, t e w variabili proposizionali. Si dica, motivando la risposta, se il seguente insieme K di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi una valutazione di verità che lo soddisfa:

$$\mathrm{K} := \{\{p, \neg q\},\ \{r, \neg s\},\ \{\neg p, \neg q, \neg t\},\ \{t, \neg w\},\ \{w\},\ \{s, \neg p\},\ \{p, q, t\},\ \{\neg r\},\ \{r, s, w\}\}$$

Soluzione – Utilizziamo l'algoritmo di Davis-Putnam.

Poiché $\{w\} \subset \{r,\ s,\ w\}$, la clausola $\{r,\ s,\ w\}$ può essere soppressa (cfr. oss. 2.9.7 negli appunti di logica), e siamo ricondotti a considerare l'insieme di clausole

$$\{\{p, \neg q\},\ \{r, \neg s\},\ \{\neg p, \neg q, \neg t\},\ \{t, \neg w\},\ \{w\},\ \{s, \neg p\},\ \{p, q, t\},\ \{\neg r\}\}.$$

Pivot r:

clausole non contenenti né r né $\neg r$: $\{p, \neg q\}$, $\{\neg p, \neg q, \neg t\}$, $\{t, \neg w\}$, $\{w\}$, $\{s, \neg p\}$, $\{p, q, t\}$;

Ris$_r(\{r, \neg s\}, \{\neg r\}) = \{\neg s\}$;

$$\{\{p, \neg q\},\ \{\neg p, \neg q, \neg t\},\ \{t, \neg w\},\ \{w\},\ \{s, \neg p\},\ \{p, q, t\},\ \{\neg s\}\}$$

Pivot s:

clausole non contenenti né s né $\neg s$: $\{p, \neg q\}$, $\{\neg p, \neg q, \neg t\}$, $\{t, \neg w\}$, $\{w\}$, $\{p, q, t\}$;

Ris$_s(\{s, \neg p\}, \{\neg s\}) = \{\neg p\}$;

$$\{\{p, \neg q\},\ \{\neg p, \neg q, \neg t\},\ \{t, \neg w\},\ \{w\},\ \{p, q, t\},\ \{\neg p\}\}$$

Pivot p:

clausole non contenenti né p né $\neg p$: $\{t, \neg w\}$, $\{w\}$;

Ris$_p(\{p, \neg q\}, \{\neg p\}) = \{\neg q\}$;
Ris$_p(\{p, q, t\}, \{\neg p\}) = \{q, t\}$;
Ris$_p(\{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q, \neg t\}) = \{\neg q, \neg t\}$ (si sopprime perché include la clausola $\{\neg q\}$ già ottenuta) ;
Ris$_p(\{p, q, t\}, \{\neg p, \neg q, \neg t\}) = \{q, t, \neg q, \neg t\}$ (si sopprime perché tautologia) ;

$$\{\{t, \neg w\},\ \{w\},\ \{\neg q\},\ \{q, t\}\}$$

Pivot q:

clausole non contenenti né q né $\neg q$: $\{t, \neg w\}$, $\{w\}$;

Ris$_q(\{\neg q\}, \{q, t\}) = \{t\}$;

$$\{\{t, \neg w\},\ \{w\},\ \{t\}\}$$

Pivot t:

clausole non contenenti né t né $\neg t$: $\{w\}$;

Non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{w\}\}$$

Pivot w:

$$\{\}\,.$$

Avendo ottenuto l’insieme vuoto di clausole, possiamo concludere che K è soddisfacibile. Una valutazione v che soddisfa K si definisce sulle variabili procedendo “a ritroso” dall’ultimo insieme di clausole via via fino al primo. Si può porre

$$v(w) := 1,\ \ v(t) := 1,\ \ v(q) := 0,\ \ v(p) := 0,\ \ v(s) := 0\ \ \text{e}\ \ v(r) := 0\,.$$

Esercizio L1.16

Siano p, q, r, s, t e w variabili proposizionali. Si dica, motivando la risposta, se il seguente insieme K di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi una valutazione di verità che lo soddisfa:

$$\mathrm{K} := \{\{p, \neg q\},\ \{q\},\ \{t, \neg w\},\ \{r, \neg s\},\ \{\neg p, \neg r, \neg s\},\ \{w, \neg r\},\ \{p, r, s\},\ \{\neg t\},\ \{q, t, w\}\}$$

Soluzione – Utilizziamo l’algoritmo di Davis e Putnam.

Osserviamo subito che la clausola $\{q,\ t,\ w\}$ può essere soppressa perché include l’altra clausola $\{q\}$ (cfr. oss. 2.9.7 negli appunti di logica), cosicché considereremo anziché K il seguente insieme di clausole:

$$\{\{p, \neg q\},\ \{q\},\ \{t, \neg w\},\ \{r, \neg s\},\ \{\neg p, \neg r, \neg s\},\ \{w, \neg r\},\ \{p, r, s\},\ \{\neg t\}\}$$

Pivot q:

clausole non contenenti né q né $\neg q$: $\{t, \neg w\}$, $\{r, \neg s\}$, $\{\neg p, \neg r, \neg s\}$, $\{w, \neg r\}$, $\{p, r, s\}$, $\{\neg t\}$;

$\text{Ris}_q(\{p, \neg q\}, \{q\}) = \{p\}$;

$$\{\{t, \neg w\},\ \{r, \neg s\},\ \{\neg p, \neg r, \neg s\},\ \{w, \neg r\},\ \{p, r, s\},\ \{\neg t\},\ \{p\}\}$$

Poiché $\{p\} \subset \{p, r, s\}$, la clausola $\{p, r, s\}$ può essere soppressa, e siamo ricondotti a considerare l’insieme di clausole

$$\{\{t, \neg w\},\ \{r, \neg s\},\ \{\neg p, \neg r, \neg s\},\ \{w, \neg r\},\ \{\neg t\},\ \{p\}\}$$

Pivot p:

clausole non contenenti né p né $\neg p$: $\{t, \neg w\}$, $\{r, \neg s\}$, $\{w, \neg r\}$, $\{\neg t\}$;

$\text{Ris}_p(\{\neg p, \neg r, \neg s\}, \{p\}) = \{\neg r, \neg s\}$;

$$\{\{t, \neg w\},\ \{r, \neg s\},\ \{w, \neg r\},\ \{\neg t\},\ \{\neg r, \neg s\}\}$$

Pivot t:

clausole non contenenti né t né $\neg t$: $\{r, \neg s\}$, $\{w, \neg r\}$, $\{\neg r, \neg s\}$;

$\text{Ris}_t(\{t, \neg w\}, \{\neg t\}) = \{\neg w\}$;

$$\{\{r, \neg s\},\ \{w, \neg r\},\ \{\neg r, \neg s\},\ \{\neg w\}\}$$

Pivot w:

clausole non contenenti né w né $\neg w$: $\{r, \neg s\}$, $\{\neg r, \neg s\}$;

$\text{Ris}_w(\{w, \neg r\}, \{\neg w\}) = \{\neg r\}$;

$$\{\{r, \neg s\},\ \{\neg r, \neg s\},\ \{\neg r\}\}$$

Poiché $\{\neg r\} \subset \{\neg r, \neg s\}$, la clausola $\{\neg r, \neg s\}$ può essere soppressa, e siamo ricondotti a considerare l’insieme di clausole

$$\{\{r, \neg s\},\ \{\neg r\}\}$$

Pivot r:

$\text{Ris}_r(\{r, \neg s\}, \{\neg r\}) = \{\neg s\}$;

$$\{\{\neg s\}\}$$

Pivot s:

$$\{\}\ .$$

Avendo ottenuto l’insieme vuoto di clausole, possiamo concludere che K è soddisfacibile. Una valutazione v che soddisfa K si definisce sulle variabili procedendo “a ritroso” dall’ultimo insieme di clausole via via fino al primo. Si può porre

$$v(s) := 0,\quad v(r) := 0,\quad v(w) := 0,\quad v(t) := 0,\quad v(p) := 1 \quad \text{e} \quad v(q) := 1\ .$$

Esercizio L1.17

Siano A, B, C, D, E, F, G variabili proposizionali. Si dica, motivando la risposta, se il seguente insieme di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi un'interpretazione che lo soddisfa:

$$\{\{A, \neg B\},\ \{C, \neg D\},\ \{\neg A, \neg B, \neg F, \neg G\},\ \{E, \neg F\},\ \{\neg E, G\},\ \{\neg A, D\},\ \{A, B, F, G\},\ \{\neg C, F\},\ \{B, \neg G\},\ \{C, D, E\}\}$$

Soluzione – Applichiamo l'algoritmo di Davis-Putnam:

Pivot A:

clausole non contenenti né A né ¬A: $\{C, \neg D\}, \{E, \neg F\}, \{\neg E, G\}, \{\neg C, F\}, \{B, \neg G\}, \{C, D, E\}$;

$\mathrm{Ris}_A(\{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg B, \neg F, \neg G\}) = \{\neg B, \neg F, \neg G\}$;
$\mathrm{Ris}_A(\{A, \neg B\}, \{\neg A, D\}) = \{\neg B, D\}$;
$\mathrm{Ris}_A(\{A, B, F, G\}, \{\neg A, \neg B, \neg F, \neg G\}) = \{B, F, G, \neg B, \neg F, \neg G\}$ (si sopprime perché tautologia);
$\mathrm{Ris}_A(\{A, B, F, G\}, \{\neg A, D\}) = \{B, D, F, G\}$;

$$\{\{C, \neg D\}, \{E, \neg F\}, \{\neg E, G\}, \{\neg C, F\}, \{B, \neg G\}, \{C, D, E\}, \{\neg B, \neg F, \neg G\}, \{\neg B, D\}, \{B, D, F, G\}\}$$

Pivot B:

clausole non contenenti né B né ¬B: $\{C, \neg D\}, \{E, \neg F\}, \{\neg E, G\}, \{\neg C, F\}, \{C, D, E\}$;

$\mathrm{Ris}_B(\{B, \neg G\}, \{\neg B, \neg F, \neg G\}) = \{\neg F, \neg G\}$;
$\mathrm{Ris}_B(\{B, \neg G\}, \{\neg B, D\}) = \{D, \neg G\}$;
$\mathrm{Ris}_B(\{B, D, F, G\}, \{\neg B, \neg F, \neg G\}) = \{D, F, G, \neg F, \neg G\}$ (si sopprime perché tautologia);
$\mathrm{Ris}_B(\{B, D, F, G\}, \{\neg B, D\}) = \{D, F, G\}$;

$$\{\{C, \neg D\},\ \{E, \neg F\},\ \{\neg E, G\},\ \{\neg C, F\},\ \{C, D, E\},\ \{\neg F, \neg G\},\ \{D, \neg G\},\ \{D, F, G\}\}$$

Pivot C:

clausole non contenenti né C né ¬C: $\{E, \neg F\}, \{\neg E, G\}, \{\neg F, \neg G\}, \{D, \neg G\}, \{D, F, G\}$;

$\mathrm{Ris}_C(\{C, \neg D\}, \{\neg C, F\}) = \{\neg D, F\}$;
$\mathrm{Ris}_C(\{C, D, E\}, \{\neg C, F\}) = \{D, E, F\}$;

$$\{\{E, \neg F\},\ \{\neg E, G\},\ \{\neg F, \neg G\},\ \{D, \neg G\},\ \{D, F, G\},\ \{\neg D, F\},\ \{D, E, F\}\}$$

Pivot D:

clausole non contenenti né D né ¬D: $\{E, \neg F\}, \{\neg E, G\}, \{\neg F, \neg G\}$;

$\mathrm{Ris}_D(\{D, \neg G\}, \{\neg D, F\}) = \{F, \neg G\}$;
$\mathrm{Ris}_D(\{D, F, G\}, \{\neg D, F\}) = \{F, G\}$;
$\mathrm{Ris}_D(\{D, E, F\}, \{\neg D, F\}) = \{E, F\}$;

$$\{\{E, \neg F\},\ \{\neg E, G\},\ \{\neg F, \neg G\},\ \{F, \neg G\},\ \{F, G\},\ \{E, F\}\}$$

Pivot E:

clausole non contenenti né E né ¬E: $\{\neg F, \neg G\}, \{F, \neg G\}, \{F, G\}$;

$\mathrm{Ris}_E(\{E, \neg F\}, \{\neg E, G\}) = \{\neg F, G\}$;
$\mathrm{Ris}_E(\{E, F\}, \{\neg E, G\}) = \{F, G\}$ (si sopprime perché già presente);

$$\{\{\neg F, \neg G\},\ \{F, \neg G\},\ \{F, G\},\ \{\neg F, G\}\}$$

Pivot F:

$\text{Ris}_F(\{\neg F, \neg G\}, \{F, \neg G\}) = \{\neg G\}$;
$\text{Ris}_F(\{\neg F, \neg G\}, \{F, G\}) = \{\neg G, G\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\text{Ris}_F(\{\neg F, G\}, \{F, \neg G\}) = \{G, \neg G\}$ (si sopprime perché tautologia) ;
$\text{Ris}_F(\{\neg F, G\}, \{F, G\}) = \{G,\}$;

$$\{\{\neg G\}, \{G\}\}$$

Pivot G:

$$\{[]\}$$

Abbiamo ottenuto un insieme di clausole non soddisfacibile (perché vi appare la clausola vuota): pertanto nemmeno l'insieme di clausole dato è soddisfacibile.

Esercizio L1.18

Siano a, b, c, d, e, f variabili proposizionali, e sia

$$\varphi := \big((c \to (d \wedge f)) \wedge ((e \vee f) \to a) \wedge ((c \wedge f) \to b)\big) \to (c \to b)$$

Si dica, motivando la risposta,

(i) se φ è soddisfacibile;

(ii) se $\neg\varphi$ è soddisfacibile;

(iii) se φ è una tautologia;

(iv) se $\neg\varphi$ è una tautologia.

Soluzione – La φ è un'implicazione, quindi è certamente vera se la sua premessa è falsa; tale premessa è una congiunzione, quindi è falsa in ogni interpretazione che rende falso uno tei termini congiunti. Possiamo rendere falso $(c \to (d \wedge f)$ valutando c vero e d falso; qualunque valore di verità la nostra valutazione assegni poi alle variabili a, b, e ed f, la φ risulterà vera. Dunque φ è soddisfacibile, da cui immediatamente possiamo dedurre che $\neg\varphi$ non è una tautologia.

Resta da stabilire se φ è una tautologia, ossia se $\neg\varphi$ non è soddisfacibile. Poiché

$$\neg\varphi \equiv \big((c \to (d \wedge f)) \wedge ((e \vee f) \to a) \wedge ((c \wedge f) \to b)\big) \wedge \neg(c \to b)$$

possiamo usare per $\neg\varphi$ la notazione "per clausole", nella quale essa si scrive come

$$\{\{\neg c, d\},\ \{\neg c, f\},\ \{\neg e, a\},\ \{\neg f, a\},\ \{b, \neg c, \neg f\},\ \{c\},\ \{\neg b\}\}\,.$$

Applichiamo l'algoritmo di Davis-Putnam per stabilire se $\neg\varphi$ è soddisfacibile:

pivot b:

clausole non contenenti né b né $\neg b$: $\{\neg c, d\}$, $\{\neg c, f\}$, $\{a, \neg e\}$, $\{a, \neg f\}$, $\{c\}$;

$\text{Ris}_b(\{b, \neg c, \neg f\}, \{\neg b\}) = \{\neg c, \neg f\}$;

$$\{\{\neg c, d\},\ \{\neg c, f\},\ \{a, \neg e\},\ \{a, \neg f\},\ \{c\},\ \{\neg c, \neg f\}\}$$

pivot c:

clausole non contenenti né c né $\neg c$: $\{a, \neg e\}$, $\{a, \neg f\}$;

Ris$_c(\{\neg c, d\}, \{c\}) = \{d\}$;
Ris$_c(\{\neg c, f\}, \{c\}) = \{f\}$;
Ris$_c(\{\neg c, \neg f\}, \{c\}) = \{\neg f\}$;

$$\{\{a, \neg e\},\ \{a, \neg f\},\ \{d\},\ \{f\},\ \{\neg f\}\}$$

pivot d:

clausole non contenenti né c né $\neg c$: $\{a, \neg e\}$, $\{a, \neg f\}$, $\{f\}$, $\{\neg f\}$;

Non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{a, \neg e\},\ \{a, \neg f\},\ \{f\},\ \{\neg f\}\}$$

Poiché $\{\neg f\} \subset \{a, \neg f\}$, la clausola $\{a, \neg f\}$ può essere soppressa (cfr. oss. 2.9.7 negli appunti di logica), e siamo ricondotti a considerare l’insieme di clausole

$$\{\{a, \neg e\},\ \{f\},\ \{\neg f\}\}$$

pivot f:

clausole non contenenti né f né $\neg f$: $\{a, \neg e\}$;

Ris$_f(\{f\}, \{\neg f\}) = []$;

$$\{\{a, \neg e\},\ []\}$$

Abbiamo ottenuto un insieme di clausole non soddisfacibile (perché vi appare la clausola vuota): pertanto nemmeno l’insieme di clausole dal quale siamo partiti è soddisfacibile; dunque $\neg\varphi$ non è soddisfacibile, e φ è una tautologia.

Esercizio L1.19

Siano a, b, p, q, s e t variabili proposizionali, e sia

$\varphi_1 := (a \to q) \wedge (p \to b) \wedge (s \to t) \wedge (t \to p) \wedge (q \vee s \vee t)$;
$\varphi_2 := (a \vee b \vee p) \wedge \neg(q \wedge s \wedge t)$;
$\psi := a \to b$.

Si dica, motivando la risposta, se ψ è conseguenza logica di $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

Soluzione – Si ha che

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} \vDash \psi$$

se e soltanto se $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \neg\psi$ non è soddisfacibile.

D’altro lato,

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \neg\psi =$$

$$= (a \to q) \wedge (p \to b) \wedge (s \to t) \wedge (t \to p) \wedge (q \vee s \vee t) \wedge (a \vee b \vee p) \wedge \neg(q \wedge s \wedge t) \wedge \neg(a \to b) \equiv$$

$$\equiv (\neg a \vee q) \wedge (\neg p \vee b) \wedge (\neg s \vee t) \wedge (\neg t \vee p) \wedge (q \vee s \vee t) \wedge (a \vee b \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg s \vee \neg t) \wedge (a \wedge \neg b)\,.$$

Quest’ultima formula è in FNC e si traduce nel seguente insieme di clausole:

$$\{\{\neg a, q\},\ \{\neg p, b\},\ \{\neg s, t\},\ \{\neg t, p\},\ \{q, s, t\},\ \{a, b, p\},\ \{\neg q, \neg s, \neg t\},\ \{a\},\ \{\neg b\}\}$$

Poiché $\{a\} \subset \{a, b, p\}$, la clausola $\{a, b, p\}$ può essere soppressa (cfr. oss. 2.9.7 negli appunti di logica), e siamo ricondotti a considerare l'insieme di clausole

$$\{\{\neg a, q\},\ \{\neg p, b\},\ \{\neg s, t\},\ \{\neg t, p\},\ \{q, s, t\},\ \{\neg q, \neg s, \neg t\},\ \{a\},\ \{\neg b\}\}$$

Utilizziamo l'algoritmo di Davis-Putnam per decidere se tale insieme di clausole è soddisfacibile.

Pivot a:

clausole non contenenti né a né $\neg a$: $\{\neg p, b\}$, $\{\neg s, t\}$, $\{\neg t, p\}$, $\{q, s, t\}$, $\{\neg q, \neg s, \neg t\}$, $\{\neg b\}$;

$\text{Ris}_a(\{\neg a, q\}, \{a\}) = \{q\}$;

$$\{\{\neg p, b\},\ \{\neg s, t\},\ \{\neg t, p\},\ \{q, s, t\},\ \{\neg q, \neg s, \neg t\},\ \{\neg b\},\ \{q\}\}$$

Pivot b:

clausole non contenenti né b né $\neg b$: $\{\neg s, t\}$, $\{\neg t, p\}$, $\{q, s, t\}$, $\{\neg q, \neg s, \neg t\}$, $\{q\}$;

$\text{Ris}_b(\{\neg p, b\}, \{\neg b\}) = \{\neg p\}$;

$$\{\{\neg s, t\},\ \{\neg t, p\},\ \{q, s, t\},\ \{\neg q, \neg s, \neg t\},\ \{q\},\ \{\neg p\}\}$$

Pivot p:

clausole non contenenti né p né $\neg p$: $\{\neg s, t\}$, $\{q, s, t\}$, $\{\neg q, \neg s, \neg t\}$, $\{q\}$;

$\text{Ris}_p(\{\neg t, p\}, \{\neg p\}) = \{\neg t\}$;

$$\{\{\neg s, t\},\ \{q, s, t\},\ \{\neg q, \neg s, \neg t\},\ \{q\},\ \{\neg t\}\}$$

Poiché $\{q\} \subset \{q, s, t\}$ e $\{q\} \subset \{q, s, t\}$, le clausole $\{q, s, t\}$ e $\{q, s, t\}$ possono essere soppresse, e siamo ricondotti a considerare l'insieme di clausole

$$\{\{\neg s, t\},\ \{q\},\ \{\neg t\}\}$$

Pivot q:

clausole non contenenti né q né $\neg q$: $\{\neg s, t\}$, $\{\neg t\}$;

Non ci sono risolventi da calcolare!

$$\{\{\neg s, t\},\ \{\neg t\}\}$$

Pivot t:

$\text{Ris}_t(\{\neg s, t\}, \{\neg t\}) = \{\neg s\}$;

$$\{\{\neg s\}\}$$

Pivot s:

$$\{\,\}\,.$$

Avendo ottenuto l'insieme vuoto di clausole, possiamo concludere che K è soddisfacibile : .dunque ψ non è conseguenza logica di $\{\varphi_1, \varphi_2\}$. Qualunque valutazione di verità v che soddisfi K soddisfa sia φ_1 che φ_2 e non soddisfa ψ; possiamo trovarne una ripercorrendo "a ritroso" il percorso seguito nell'algoritmo di Davis-Putnam. Si trova che deve essere

$$v(s) := 0,\quad v(t) := 0,\quad v(q) := 1,\quad v(p) := 0,\quad v(b) := 0 \quad \text{e} \quad v(a) := 1\,.$$

Esercizio L1.20

I glottologi stanno studiando certi caratteristiche fonetiche delle lettere, alcune delle quali sono state classificate come *lettere grufie*. Non preciseremo qui la definizione di “grufia” per una lettera; ci basterà sapere che:

(i) se “f” è una lettera grufia, anche “g” e “i” sono lettere grufie;

(ii) se almeno una fra la “h” e la “i” è una lettera grufia, allora “d” non è una lettera grufia;

(iii) se non è grufia né la “f” né la “h”, allora “e” è una lettera grufia.

Definendo opportune variabili proposizionali per formalizzare i fatti esposti in (i), (ii) e (iii), si dica, motivando la risposta, se dalle (i), (ii) e (iii) si può dedurre come conseguenza logica (oppure no) che

(°) se “d” è una lettera grufia, anche “e” lo è.

Soluzione – Introduciamo le seguenti variabili proposizionali:

$p_1 :=$ “f è una lettera grufia”; $p_2 :=$ “g è una lettera grufia”;

$p_3 :=$ “i è una lettera grufia”; $p_4 :=$ “h è una lettera grufia”;

$p_5 :=$ “d è una lettera grufia”; $p_6 :=$ “e è una lettera grufia”.

Le (i), (ii), (iii) e (°) si possono allora scrivere come

(i) $p_1 \to (p_2 \wedge p_3)$; ovvero, in forma normale congiuntiva: $((\neg p_1) \vee p_2) \wedge ((\neg p_1) \vee p_3)$;

(ii) $(p_3 \vee p_4) \to (\neg p_5)$; ovvero, in FNC: $((\neg p_3) \vee (\neg p_5)) \wedge ((\neg p_4) \vee (\neg p_5))$;

(iii) $((\neg p_1) \wedge (\neg p_4)) \to p_6$; ovvero, in FNC: $p_1 \vee p_4 \vee p_6$;

(°) $p_5 \to p_6$; ovvero, in FNC: $(\neg p_5) \vee p_6$.

Ci viene chiesto di stabilire se è vero che

$$\{((\neg p_1) \vee p_2) \wedge ((\neg p_1) \vee p_3),\ \ ((\neg p_3) \vee (\neg p_5)) \wedge ((\neg p_4) \vee (\neg p_5)),\ \ p_1 \vee p_4 \vee p_6\} \models (\neg p_5) \vee p_6$$

ossia se non è soddisfacibile la formula (già in FNC)

$$((\neg p_1) \vee p_2) \wedge ((\neg p_1) \vee p_3) \wedge ((\neg p_3) \vee (\neg p_5)) \wedge ((\neg p_4) \vee (\neg p_5)) \wedge (p_1 \vee p_4 \vee p_6) \wedge p_5 \wedge \neg p_6.$$

Trasformando tale formula in un insieme di clausole, possiamo applicare l’algoritmo di Davis-Putnam:

$$\{\{\neg p_1, p_2\},\ \ \{\neg p_1, p_3\},\ \ \{\neg p_3, \neg p_5\},\ \ \{\neg p_4, \neg p_5\},\ \ \{p_1, p_4, p_6\},\ \ \{p_5\},\ \ \{\neg p_6\}\}.$$

Pivot p_5:

clausole non contenenti né p_5 né $\neg p_5$: $\{\neg p_1, p_2\}$, $\{\neg p_1, p_3\}$, $\{p_1, p_4, p_6\}$, $\{\neg p_6\}$;

$\text{Ris}_{p_5}(\{\neg p_3, \neg p_5\}, \{p_5\}) = \{\neg p_3\}$;

$\text{Ris}_{p_5}(\{\neg p_4, \neg p_5\}, \{p_5\}) = \{\neg p_4\}$;

$$\{\{\neg p_1, p_2\},\ \ \{\neg p_1, p_3\},\ \ \{p_1, p_4, p_6\},\ \ \{\neg p_6\},\ \ \{\neg p_3\},\ \ \{\neg p_4\}\}$$

Pivot p_3:

clausole non contenenti né p_3 né $\neg p_3$: $\{\neg p_1, p_2\}$, $\{p_1, p_4, p_6\}$, $\{\neg p_6\}$, $\{\neg p_4\}$;

$\mathrm{Ris}_{p_3}(\{\neg p_1, p_3\}, \{\neg p_3\}) = \{\neg p_1\}$;

$$\{\{\neg p_1, p_2\}, \quad \{p_1, p_4, p_6\}, \quad \{\neg p_6\}, \quad \{\neg p_4\}, \quad \{\neg p_1\}\}$$

Poiché $\{\neg p_1\} \subset \{\neg p_1, p_2\}$, la clausola $\{\neg p_1, p_2\}$ può essere soppressa (cfr. oss. 2.9.7 negli appunti di logica), e siamo ricondotti a considerare l'insieme di clausole

$$\{\{p_1, p_4, p_6\}, \quad \{\neg p_6\}, \quad \{\neg p_4\}, \quad \{\neg p_1\}\}$$

Pivot p_1:

clausole non contenenti né p_1 né $\neg p_1$: $\{\neg p_6\}$, $\{\neg p_4\}$;

$\mathrm{Ris}_{p_1}(\{p_1, p_4, p_6\}, \{\neg p_1\}) = \{p_4, p_6\}$;

$$\{\{\neg p_6\}, \quad \{\neg p_4\}, \quad \{p_4, p_6\}\}$$

Pivot p_6:

clausole non contenenti né p_6 né $\neg p_6$: $\{\neg p_4\}$;

$\mathrm{Ris}_{p_6}(\{\neg p_6\}, \{p_4, p_6\}) = \{p_4\}$;

$$\{\{\neg p_4\}, \quad \{p_4\}\}$$

Pivot p_4:

$\mathrm{Ris}_{p_4}(\{\neg p_4\}, \{p_4\}) = [\,]$;

$$\{[\,]\}$$

Abbiamo ottenuto un insieme di clausole non soddisfacibile (perché vi appare la clausola vuota): pertanto nemmeno l'insieme di clausole dal quale siamo partiti è soddisfacibile; dunque (°) è conseguenza logica delle (i), (ii) e (iii).

Esercizio L1.21

Siano α, β formule della logica proposizionale. Posto

$$\psi_1 \coloneqq \alpha \vee (\beta \wedge (\neg\beta))$$

e

$$\psi_2 \coloneqq \alpha \wedge (\beta \to (\alpha \to \beta))$$

si dica, motivando la risposta, se

(i) ψ_1 è conseguenza logica di ψ_2 ;
(ii) ψ_2 è conseguenza logica di ψ_1 ;
(iii) ψ_1 e ψ_2 sono logicamente equivalenti.

Soluzione – Scriviamo la tabella che esprime i valori di verità di ψ_1 e ψ_2 in funzione dei valori di verità di α e β:

α	β	$\neg\beta$	$\beta \wedge (\neg\beta)$	$\alpha \vee (\beta \wedge (\neg\beta))$	$\alpha \to \beta$	$\beta \to (\alpha \to \beta)$	$\alpha \wedge (\beta \to (\alpha \to \beta))$
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1

Poiché ogni valutazione di verità che rende vera ψ_2 rende vera anche ψ_1, ψ_1 è conseguenza logica di ψ_2; poiché ogni valutazione di verità che rende vera ψ_1 rende vera anche ψ_2, ψ_2 è conseguenza logica di ψ_1; poiché ψ_1 è conseguenza logica di ψ_2 e ψ_2 è conseguenza logica di ψ_1, ψ_1 e ψ_2 sono logicamente equivalenti.

Esercizio L1.22

Siano a, b, c, x e y variabili proposizionali. Si stabilisca, motivando la risposta, se

$$(a \to b) \wedge (a \vee x) \wedge y \wedge ((a \wedge (x \to c)) \vee b) \vDash b \wedge y\,.$$

Soluzione – Sappiamo che

$$(a \to b) \wedge (a \vee x) \wedge y \wedge ((a \wedge (x \to c)) \vee b) \vDash b \wedge y$$

se e soltanto se la formula

$$\varphi := (a \to b) \wedge (a \vee x) \wedge y \wedge ((a \wedge (x \to c)) \vee b) \wedge \neg(b \wedge y)$$

non è soddisfacibile.

Scriviamo φ in FNC, trasformiamola in un insieme di clausole e verifichiamo con l'algoritmo di Davis-Putnam se tale insieme di clausole è soddisfacibile. Si ha

$$\varphi \equiv (\neg a \vee b) \wedge (a \vee x) \wedge y \wedge ((a \wedge (\neg x \vee c)) \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg y) \equiv$$
$$\equiv (\neg a \vee b) \wedge (a \vee x) \wedge y \wedge (a \vee b) \wedge (\neg x \vee c \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg y)$$

e questa scrittura dà luogo al seguente insieme di clausole:

$$\{\{\neg a, b\}, \{a, x\}, \{y\}, \{a, b\}, \{b, c, \neg x\}, \{\neg b, \neg y\}\}\,.$$

Pivot y:

clausole non contenenti né y né $\neg y$: $\{\neg a, b\}$, $\{a, x\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c, \neg x\}$;

$\text{Ris}_y(\{y\}, \{\neg b, \neg y\}) = \{\neg b\}$;

$$\{\{\neg a, b\}, \{a, x\}, \{a, b\}, \{b, c, \neg x\}, \{\neg b\}\}$$

Pivot b:

clausole non contenenti né b né $\neg b$: $\{a, x\}$;

$\text{Ris}_b(\{\neg a, b\}, \{\neg b\}) = \{\neg a\}$;
$\text{Ris}_b(\{a, b\}, \{\neg b\}) = \{a\}$;
$\text{Ris}_b(\{b, c, \neg x\}\}, \{\neg b\}) = \{c, \neg x\}$;

$$\{\{a, x\}, \{\neg a\}, \{a\}, \{c, \neg x\}\}$$

Poiché $\{a\} \subset \{a, x\}$, la clausola $\{a, x\}$ può essere soppressa (cfr. oss. 2.9.7 negli appunti di logica), e siamo ricondotti a considerare l’insieme di clausole

$$\{\{\neg a\}, \{a\}, \{c, \neg x\}\}$$

Pivot a:

clausole non contenenti né a né $\neg a$: $\{c, \neg x\}$;

$\text{Ris}_a(\{\neg a\}, \{a\}) = []$;

$$\{\{c, \neg x\}, []\} .$$

Abbiamo ottenuto un insieme di clausole non soddisfacibile (perché vi appare la clausola vuota): pertanto nemmeno l’insieme di clausole dal quale siamo partiti è soddisfacibile; dunque la formula $b \wedge y$ è conseguenza logica della formula $(a \to b) \wedge (a \vee x) \wedge y \wedge ((a \wedge (x \to c)) \vee b)$.

Esercizio L1.23

Siano a, b, c, d, p e q variabili proposizionali. Si dica, motivando la risposta, se il seguente insieme K di clausole è soddisfacibile; e nel caso che la risposta sia affermativa si trovi una valutazione di verità che lo soddisfa:

$$\text{K} := \{\{a, \neg b\},\ \{b\},\ \{a, c, d\},\ \{p, \neg q\},\ \{c, \neg d\},\ \{\neg a, \neg c, \neg d\},\ \{q, \neg c\},\ \{\neg p\},\ \{b, p, q\}\}$$

Soluzione – Utilizziamo l’algoritmo di Davis-Putnam.

Pivot b:

clausole non contenenti né b né $\neg b$: $\{a, c, d\}$, $\{p, \neg q\}$, $\{c, \neg d\}$, $\{\neg a, \neg c, \neg d\}$, $\{q, \neg c\}$, $\{\neg p\}$;

$\text{Ris}_b(\{a, \neg b\}, \{b\}) = \{a\}$;

$\text{Ris}_b(\{a, \neg b\}, \{b, p, q\}) = \{a, p, q\}$ (si sopprime perché include la clausola precedente) ;

$$\{\{a, c, d\},\ \{p, \neg q\},\ \{c, \neg d\},\ \{\neg a, \neg c, \neg d\},\ \{q, \neg c\},\ \{\neg p\},\ \{a\}\}$$

Poiché $\{a\} \subset \{a, c, d\}$, la clausola $\{a, c, d\}$ può essere soppressa (cfr. oss. 2.9.7 negli appunti di logica), e siamo ricondotti a considerare l’insieme di clausole

$$\{\{p, \neg q\},\ \{c, \neg d\},\ \{\neg a, \neg c, \neg d\},\ \{q, \neg c\},\ \{\neg p\},\ \{a\}\}$$

Pivot a:

clausole non contenenti né a né $\neg a$: $\{p, \neg q\}$, $\{c, \neg d\}$, $\{q, \neg c\}$, $\{\neg p\}$;

$\text{Ris}_a(\{\neg b, \neg c, \neg d\}, \{a\}) = \{\neg c, \neg d\}$;

$$\{\{p, \neg q\},\ \{c, \neg d\},\ \{q, \neg c\},\ \{\neg p\},\ \{\neg c, \neg d\}\}$$

Pivot p:

clausole non contenenti né p né $\neg p$: $\{c, \neg d\}$, $\{q, \neg c\}$, $\{\neg c, \neg d\}$;

$\text{Ris}_p(\{p, \neg q\}, \{\neg p\}) = \{\neg q\}$;

$$\{\{c, \neg d\},\ \{q, \neg c\},\ \{\neg c, \neg d\},\ \{\neg q\}\}$$

Pivot q:

clausole non contenenti né q né $\neg q$: $\{c, \neg d\}$, $\{\neg c, \neg d\}$;

$\text{Ris}_q(\{q, \neg c\}, \{\neg q\}) = \{\neg c\}$;

$$\{\{c, \neg d\},\ \{\neg c, \neg d\},\ \{\neg c\}\}$$

Poiché $\{\neg c\} \subset \{\neg c, \neg d\}$, la clausola $\{\neg c, \neg d\}$ può essere soppressa, e siamo ricondotti a considerare l'insieme di clausole

$$\{\{c, \neg d\},\ \{\neg c\}\}$$

Pivot c:

$\text{Ris}_c(\{c, \neg d\}, \{\neg c\}) = \{\neg d\}$;

$$\{\{\neg d\}\}$$

Pivot d:

$$\{\}\,.$$

Avendo ottenuto l'insieme vuoto di clausole, possiamo concludere che K è soddisfacibile. Una valutazione v che soddisfa K si definisce sulle variabili procedendo “a ritroso” dall'ultimo insieme di clausole via via fino al primo. Si può porre

$$v(d) := 0,\quad v(c) := 0,\quad v(q) := 0,\quad v(p) := 0,\quad v(a) := 1 \quad \text{e} \quad v(b) := 1\,.$$