ES. Stabilire il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.

Sia $a_n \doteq (n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}$. oss: $a_n > 0 \ \forall n$

inoltre $a_n = \dfrac{(n+1)-n}{(n+1)^{\frac{n-1}{n}} + (n+1)^{\frac{n-2}{n}} n^{\frac{1}{n}} + \dots + (n+1)^{\frac{1}{n}} n^{\frac{n-2}{n}} + n^{\frac{n-1}{n}}} < \dfrac{1}{n \cdot n^{\frac{n-1}{n}}}$

infatti $a_n \cdot n\, n^{\frac{n-1}{n}} = \dfrac{n \cdot \cancel{n^{\frac{n-1}{n}}}}{\cancel{n^{\frac{n-1}{n}}}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}}_{>1} + \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-2}{n}}}_{>1} + \dots + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} + 1\right)} < 1$

e per il criterio del confronto si ha $\sum a_n$ converge essendo $\sum \frac{1}{n^{2-\frac{1}{n}}}$ convergente

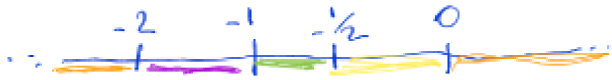
infatti poiché $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}$ si ha $n^{2-\frac{1}{n}} > n^{2-\frac{1}{2}} = n^{3/2}$

da cui $\frac{1}{n^{2-\frac{1}{n}}} < \frac{1}{n^{3/2}}$ e $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge essendo serie armonica generalizzata.

ES. Stabilire il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin x^n}{(1+x)^n}$ al variare di $x \in \mathbb{R}$.

oss: $\left|\dfrac{\sin x^n}{(1+x)^n}\right| \le \left(\dfrac{1}{|1+x|}\right)^n$ quindi se $\frac{1}{|1+x|} < 1$ allora la serie è ASS. conv. per il criterio del confronto. e quindi anche convergente

cioè se $\boxed{x > 0} \vee \boxed{x < -2}$ la serie conv. ASS.



Supp: $\begin{cases} x < 0 \\ |x| < 1 \end{cases}$ cioè $-1 < x < 0$

allora $\dfrac{\sin x^n}{x^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ da cui $\dfrac{\sin x^n}{(1+x)^n} = O\left(\dfrac{x^n}{(1+x)^n}\right)$ e $-\dfrac{x^n}{(1+x)^n} \le \dfrac{\sin x^n}{(1+x)^n} \le \dfrac{x^n}{(1+x)^n}$

quindi se $\left|\frac{x}{1+x}\right| < 1$ allora la serie converge cioè $\left|1 - \frac{1}{1+x}\right| < 1$ cioè

$-1 < 1 - \frac{1}{1+x} < 1$ cioè $-2 < -\frac{1}{1+x} < 0$ cioè $0 < \frac{1}{1+x} < 2$ cioè $x+1 > \frac{1}{2}$ $x > -\frac{1}{2}$

da cui: se $\boxed{-\frac{1}{2} < x < 0}$ allora la serie è ASS. conv.

Se invece $\boxed{-1 < x < -1/2}$ allora $\dfrac{\sin x^n}{(1+x)^n} = \dfrac{\sin x^n}{x^n} \cdot \dfrac{x^n}{(1+x)^n} = \dfrac{\sin x^n}{x^n} \cdot \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^n}$

$-2 < \frac{1}{x} < -1$

$-1 < 1 + \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow \left|1+\frac{1}{x}\right| < 1 \Rightarrow \left|\dfrac{\sin x^n}{(1+x)^n}\right| = \left|\dfrac{\sin x^n}{x^n}\right| \cdot \dfrac{1}{\left|1+\frac{1}{x}\right|^n} \not\to 0$

quindi non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza e la serie non converge.

Sia $\boxed{-2<x<-1}$ allora $-1<1+x<0$ da cui $|1+x|<1$ e $|x|>1$

da cui $|x|^n \to +\infty$ e $\sin(x)^n \not\to 0$

e $\left|\frac{\sin x^n}{(1+x)^n}\right| \not\to 0$. Quindi la serie non può convergere.

Restano da studiare i casi

$x=0 \Longrightarrow$ si ottiene la serie nulla quindi conv.

$x=-1/2 \Longrightarrow \frac{\sin(-1/2)^n}{(1-\frac{1}{2})^n} = \frac{\sin(-\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{2})^n} \not\to 0$ quindi la serie non conv.

$x=-1 \Longrightarrow$ la succ non è definita

$x=-2 \Longrightarrow \frac{\sin((-2)^n)}{(-2+1)^n} = (-1)^n \sin((-2)^n) \underset{\uparrow}{=} \sin 2^n \not\to 0$ quindi la serie non converge.

la funzione $\sin t$ è dispari

E5. Stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sqrt[n]{e}}}$

Sia $a_n = \frac{1}{n^{\sqrt[n]{e}}}$. $a_n > 0$.

considero $n a_n = \frac{1}{n^{\sqrt[n]{e}-1}}$

ora: $\sqrt[n]{e}-1 = \frac{e-1}{\underbrace{e^{\frac{n-1}{n}}+e^{\frac{n-2}{n}}+\dots+e^{\frac{1}{n}}+1}_{n \text{ termini}}}$

$< ne$

$> n$

da cui $n^{\sqrt[n]{e}-1} < n^{\frac{e-1}{n}}$

$> n^{\frac{e-1}{e}\frac{1}{n}}$

da cui
$$\frac{1}{n^{\frac{e-1}{e}\frac{1}{n}}} < \frac{1}{n^{\sqrt[n]{e}-1}} < \frac{1}{n^{\frac{e-1}{e}\frac{1}{n}}}$$

$\searrow \; 1 \; \swarrow$

Segue $\frac{1}{n^{\sqrt[n]{e}-1}} \to 1$ cioè $na_n \to 1$ da cui, per il criterio del confronto asintotico si ha

$\sum a_n$ ha lo stesso comportamento di $\sum \frac{1}{n}$

e quindi diverge.