2. – Esercizi su: ***dimostrazioni per induzione***.

Esercizio 2.1

Si dimostri che per ogni numero naturale n si ha

$$1+\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1}\,.$$

Esercizio 2.2

Si dimostri che per ogni numero naturale n

$$13^{2n} - 168n - 1 \quad \text{è divisibile per } 28\,224\,.$$

Esercizio 2.3

Sia $\mathbf{X} := \{x \in \mathbb{N} \,/\, x > 6\}$. Si dimostri che

$$3^n < n!$$

per ogni $n \in \mathbf{X}$.

Esercizio 2.4

Si dimostri che per ogni numero naturale n si ha

$$2 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} 3^i\right) = 3^{n+1} - 1\,.$$

Esercizio 2.5

Si dimostri che per ogni numero naturale n

$$11^{2n} - 120n - 1 \quad \text{è divisibile per } 14\,400\,.$$

Esercizio 2.6

Si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \ \leq \ 2 - \frac{1}{n} .$$

Esercizio 2.7

Per ogni numero naturale k, sia $a_k := \frac{k(k+1)}{2}$.

Si dica, motivando la risposta, se è vero che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} .$$

Esercizio 2.8

Si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 2$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} .$$

Esercizio 2.9

Si dimostri che per ogni numero naturale n si ha

$$4 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} 5^i \right) = 5^{n+1} - 1 .$$

Esercizio 2.10

Si dimostri che per ogni numero naturale n

$$4^{2n} - 15n - 1 \quad \text{è divisibile per } 225 .$$

Esercizio 2.11

Sia $\mathbf{X} := \{x \in \mathbb{N} \,/\, x > 8\}$. Si dimostri che

$$4^n < n!$$

per ogni $n \in \mathbf{X}$.

Esercizio 2.12

Si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 2$ è

$$\sum_{k=1}^{n} 5^k = \tfrac{5^{n+1}-5}{4}\,.$$

Esercizio 2.13

Si dimostri che per ogni numero naturale n si ha

$$6 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} 7^i \right) = 7^{n+1} - 1\,.$$

Esercizio 2.14

Si dimostri che per ogni numero naturale n

$$3^{2n} - 8n - 1 \quad \text{è divisibile per } 64\,.$$

Esercizio 2.15

Si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 2$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} 6^k = \tfrac{6^{n+1}-6}{5}\,.$$

Esercizio 2.16

Si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 2$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} 8^k = \tfrac{8^{n+1}-8}{7}\,.$$