2. – Soluzione degli esercizi su: ***dimostrazioni per induzione***.

Esercizio 2.1

Si dimostri che per ogni numero naturale n si ha

$$1 + \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1}\,.$$

Soluzione – Procediamo per induzione su n. Se $n \coloneqq 0$, l'uguaglianza da dimostrare diventa

$$1 + 2^0 = 2^{0+1}$$

ossia

$$1 + 1 = 2$$

quindi è vera. Supponiamo allora che (ipotesi di induzione) l'uguaglianza sia vera per n, e dimostriamola per $n+1$. Vogliamo quindi provare che

$$1 + \sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{n+2}\,.$$

Si ha in effetti

$$1 + \sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 1 + \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} = \text{(applicando l'ipotesi di induzione)} = 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}$$

come si voleva.

Esercizio 2.2

Si dimostri che per ogni numero naturale n

$$13^{2n} - 168n - 1 \quad \text{è divisibile per } 28\,224\,.$$

Soluzione – Procediamo per induzione su n.

Se $n \coloneqq 0$, $\quad 13^{2\cdot 0} - 168 \cdot 0 - 1 = 1 - 1 = 0$ è certamente divisibile per $28\,224$.

Supposto allora che $13^{2n} - 168n - 1$ sia divisibile per $28\,224$, dimostriamo che anche

$$13^{2(n+1)} - 168(n+1) - 1$$

lo è.

In effetti,

$$13^{2(n+1)} - 168(n+1) - 1 = 13^{2n+2} - 168n - 168 - 1 = 13^{2n} \cdot 13^2 - 168n - 168 - 1 =$$

$$= 13^{2n} \cdot 169 - 169 \cdot 168n + 168 \cdot 168n - 169 = 169(13^{2n} - 168n - 1) + 168^2 n$$

e questo numero è divisibile per $28\,224$ ($= 168^2$) tenendo conto dell'ipotesi di induzione.

Esercizio 2.3

Sia $\mathbf{X} \coloneqq \{x \in \mathbb{N} \,/\, x > 6\}$. Si dimostri che

$$3^n < n!$$

per ogni $n \in \mathbf{X}$.

Soluzione – Procediamo per induzione su n applicando il teorema 2.3.1 con $n_0 \coloneqq 7$.

Verifichiamo in primo luogo che

$$3^7 < 7!\,.$$

In effetti, $3^7 = 2\,187 < 5\,040 = 7!$.

Adesso supponiamo l'asserto vero per n e dimostriamolo per $n+1$. Dobbiamo cioè provare che

$$3^{n+1} < (n+1)!$$

supponendo che sia $3^n < n!$ e $6 < n$. Si ha

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n < 3 \cdot (n!)$$

moltiplicando per 3 ambo i membri dell'ipotesi di induzione (come è lecito fare, perché $3 > 0$). D'altro lato, moltiplicando per $n!$ ambo i membri della disuguaglianza $3 < n+1$ (come è lecito fare, perché $n! > 0$) si trova che

$$3 \cdot (n!) < (n+1) \cdot (n!) = (n+1)!$$

e dunque

$$3^{n+1} < (n+1)!$$

come si voleva.

Esercizio 2.4

Si dimostri che per ogni numero naturale n si ha

$$2 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} 3^i\right) = 3^{n+1} - 1\,.$$

Soluzione – Procediamo per induzione su n. Se $n \coloneqq 0$, l'uguaglianza da dimostrare diventa $2 \cdot 3^0 = 3^{0+1} - 1$ ossia $2 = 3 - 1$ quindi è vera.

Supponiamo allora che (ipotesi di induzione) l'uguaglianza sia vera per n, e dimostriamola per $n+1$. Vogliamo quindi provare che

$$2 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n+1} 3^i\right) = 3^{n+2} - 1\,.$$

Si ha in effetti

$$2 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n+1} 3^i\right) = 2 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} 3^i\right) + 2 \cdot 3^{n+1} = \text{(applicando l'ipotesi di induzione)} =$$

$$= 3^{n+1} - 1 + 2 \cdot 3^{n+1} = 3 \cdot 3^{n+1} - 1 = 3^{n+2} - 1$$

come si voleva.

Esercizio 2.5

Si dimostri che per ogni numero naturale n

$$11^{2n} - 120n - 1 \quad \text{è divisibile per } 14\,400\,.$$

Soluzione – Procediamo per induzione su n.

Se $n := 0$, $\quad 11^{2\cdot 0} - 120\cdot 0 - 1 = 1 - 1 = 0$ è certamente divisibile per $14\,400$.

Supposto allora che $11^{2n} - 120n - 1$ sia divisibile per $14\,400$, dimostriamo che anche

$$11^{2(n+1)} - 120(n+1) - 1$$

lo è.

In effetti,

$$11^{2(n+1)} - 120(n+1) - 1 = 11^{2n+2} - 120n - 120 - 1 = 11^{2n}\cdot 11^2 - 120n - 120 - 1 =$$

$$= 11^{2n}\cdot 121 - 121\cdot 120n + 120\cdot 120n - 121 = 121(11^{2n} - 120n - 1) + 120^2 n$$

e questo numero è divisibile per $14\,400$ ($= 120^2$) tenendo conto dell'ipotesi di induzione.

Esercizio 2.6

Si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \;\le\; 2 - \frac{1}{n}\,.$$

Soluzione – Procediamo per induzione su n. Per $n = 1$ si deve verificare che

$$\frac{1}{1^2} \;\le\; 2 - \frac{1}{1}$$

cioè $\;1 \le 1\;$ e ciò è immediato. Supponiamo allora che l'asserto sia vero per n e proviamolo per $n+1$. L'ipotesi di induzione è

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \;\le\; 2 - \frac{1}{n}$$

e dobbiamo provare che

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \;\le\; 2 - \frac{1}{n+1}\,.$$

Ricordando l'ipotesi di induzione possiamo scrivere che

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \le 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}\,.$$

Per provare l'asserto basterà allora mostrare che

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \;\le\; 2 - \frac{1}{n+1}$$

ossia che

$$\frac{1}{(n+1)^2} \le \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

ma quest'ultima disuguaglianza è ovvia perché $(n+1)^2 \ge n(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2.7

Per ogni numero naturale k, sia $a_k := \frac{k(k+1)}{2}$.

Si dica, motivando la risposta, se è vero che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \ .$$

Soluzione – L'uguaglianza proposta si dimostra facilmente per induzione su n.

È vera per $n := 0$, perché $\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0 = \frac{0(0+1)(0+2)}{6}$.

Supponiamo allora (ipotesi di induzione) che sia $\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ e dimostriamo che $\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$.

In effetti,

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{3(n+1)(n+2)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

come si voleva dimostrare.

Esercizio 2.8

Si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 2$ è

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \ .$$

Soluzione – Indichiamo con P(n) l'uguaglianza proposta, che si deve dimostrare vera per ogni numero naturale $n \geq 2$. Conviene procedere per induzione su n .

Per $n = 2$ si deve verificare che

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{2+2}{2^2}$$

ossia che

$$\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} = 2 - \frac{4}{4} \ .$$

In effetti,

$$\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1 = 2 - \frac{4}{4} \ .$$

Adesso supponiamo che P(n) sia vera, e dimostriamo che è vera anche P($n+1$). Si ha

$$\sum_{k=1}^{n+1} \tfrac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{k}{2^k} + \tfrac{n+1}{2^{n+1}}$$

ma per l'ipotesi di induzione è

$$\sum_{k=1}^{n} \tfrac{k}{2^k} = 2 - \tfrac{n+2}{2^n}$$

dunque

$$\sum_{k=1}^{n+1} \tfrac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{k}{2^k} + \tfrac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \tfrac{n+2}{2^n} + \tfrac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \left(\tfrac{n+2}{2^n} - \tfrac{n+1}{2^{n+1}}\right) =$$

$$2 - \tfrac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} = 2 - \tfrac{n+3}{2^{n+1}} = 2 - \tfrac{(n+1)+2}{2^{n+1}}$$

ossia la P($n+1$) come si doveva dimostrare.

$\boxed{\text{Esercizio 2.9}}$

Si dimostri che per ogni numero naturale n si ha

$$4 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} 5^i\right) = 5^{n+1} - 1\,.$$

Soluzione – Procediamo per induzione su n. Se $n := 0$, l'uguaglianza da dimostrare diventa

$$4 \cdot 5^0 = 5^{0+1} - 1$$

ossia

$$4 = 5 - 1$$

quindi è vera. Supponiamo allora che (ipotesi di induzione) l'uguaglianza sia vera per n, e dimostriamola per $n+1$. Vogliamo quindi provare che

$$4 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n+1} 5^i\right) = 5^{n+2} - 1\,.$$

Si ha in effetti

$$4 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n+1} 5^i\right) = 4 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} 5^i\right) + 4 \cdot 5^{n+1} = \text{(applicando l'ipotesi di induzione)} =$$

$$= 5^{n+1} - 1 + 4 \cdot 5^{n+1} = 5 \cdot 5^{n+1} - 1 = 5^{n+2} - 1$$

come si voleva.

Esercizio 2.10

Si dimostri che per ogni numero naturale n

$$4^{2n} - 15n - 1 \quad \text{è divisibile per } 225\,.$$

Soluzione – Procediamo per induzione su n.

Se $n := 0$, $\quad 4^{2\cdot 0} - 15 \cdot 0 - 1 = 1 - 1 = 0$ è certamente divisibile per 225.

Supposto allora che $4^{2n} - 15n - 1$ sia divisibile per 225, dimostriamo che anche

$$4^{2(n+1)} - 15(n+1) - 1$$

lo è.

In effetti,

$$4^{2(n+1)} - 15(n+1) - 1 = 4^{2n+2} - 15n - 15 - 1 = 4^{2n} \cdot 4^2 - 15n - 16 =$$

$$= 4^{2n} \cdot 16 - 16 \cdot 15n + 15 \cdot 15n - 16 = 16(4^{2n} - 15n - 1) + 15^2 n$$

e questo numero è divisibile per 225 ($= 15^2$) tenendo conto dell'ipotesi di induzione.

Esercizio 2.11

Sia $\mathbf{X} := \{x \in \mathbb{N} \,/\, x > 8\}$. Si dimostri che

$$4^n < n!$$

per ogni $n \in \mathbf{X}$.

Soluzione – Procediamo per induzione su n applicando il teorema 2.3.1 con $n_0 := 9$.

Verifichiamo in primo luogo che

$$4^9 < 9!\,.$$

In effetti, $4^9 = 262\,144 < 362\,880 = 9!$.

Adesso supponiamo l'asserto vero per n e dimostriamolo per $n+1$. Dobbiamo cioè provare che

$$4^{n+1} < (n+1)!$$

supponendo che sia $\; 4^n < n! \;$ e $\; 8 < n$. Si ha

$$4^{n+1} = 4 \cdot 4^n < 4 \cdot (n!)$$

moltiplicando per 4 ambo i membri dell'ipotesi di induzione (come è lecito fare, perché $4 > 0$). D'altro lato, moltiplicando per $n!$ ambo i membri della disuguaglianza $4 < n+1$ (come è lecito fare, perché $n! > 0$) si trova che

$$4 \cdot (n!) < (n+1) \cdot (n!) = (n+1)!$$

e dunque

$$4^{n+1} < (n+1)!$$

come si voleva.

Esercizio 2.12

Si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 2$ è

$$\sum_{k=1}^{n} 5^k = \frac{5^{n+1}-5}{4} .$$

Soluzione – Indichiamo con P(n) l'uguaglianza proposta, che si deve dimostrare vera per ogni numero naturale $n \geq 2$. Conviene procedere per induzione su n .

Per $n = 2$ si deve verificare che

$$\sum_{k=1}^{2} 5^k = \frac{5^{2+1}-5}{4}$$

ossia che

$$5^1 + 5^2 = \frac{5^3-5}{4} .$$

In effetti,

$$5^1 + 5^2 = 5 + 25 = 30 = \frac{125-5}{4} .$$

Adesso supponiamo che P(n) sia vera, e dimostriamo che è vera anche P($n+1$), cioè che

$$\sum_{k=1}^{n+1} 5^k = \frac{5^{n+2}-5}{4} .$$

Si ha

$$\sum_{k=1}^{n+1} 5^k = \sum_{k=1}^{n} 5^k + 5^{n+1}$$

ma per l'ipotesi di induzione è

$$\sum_{k=1}^{n+1} 5^k = \frac{5^{n+1}-5}{4}$$

dunque

$$\sum_{k=1}^{n+1} 5^k = \sum_{k=1}^{n} 5^k + 5^{n+1} = \frac{5^{n+1}-5}{4} + 5^{n+1} = \frac{5^{n+1}-5+4 \cdot 5^{n+1}}{4} =$$

$$\frac{5 \cdot 5^{n+1}-5}{4} = \frac{5^{n+2}-5}{4}$$

ossia la P($n+1$) come si doveva dimostrare.

Esercizio 2.13

Si dimostri che per ogni numero naturale n si ha

$$6 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} 7^i \right) = 7^{n+1} - 1 .$$

Soluzione – Procediamo per induzione su n. Se $n := 0$, l'uguaglianza da dimostrare diventa

$$6 \cdot 7^0 = 7^{0+1} - 1$$

ossia

$$6 = 7 - 1$$

quindi è vera. Supponiamo allora che (ipotesi di induzione) l'uguaglianza sia vera per n, e dimostriamola per $n+1$. Vogliamo quindi provare che

$$6 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n+1} 7^i \right) = 7^{n+2} - 1\,.$$

Si ha in effetti

$$6 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n+1} 7^i \right) = 6 \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} 7^i \right) + 6 \cdot 7^{n+1} = \text{(applicando l'ipotesi di induzione)} =$$

$$= 7^{n+1} - 1 + 6 \cdot 7^{n+1} = 7 \cdot 7^{n+1} - 1 = 7^{n+2} - 1$$

come si voleva.

Esercizio 2.14

Si dimostri che per ogni numero naturale n

$$3^{2n} - 8n - 1 \quad \text{è divisibile per } 64\,.$$

Soluzione – Procediamo per induzione su n.

Se $n := 0$, $3^{2\cdot 0} - 8 \cdot 0 - 1 = 1 - 1 = 0$ è certamente divisibile per 64.

Supposto allora che $3^{2n} - 8n - 1$ sia divisibile per 64, dimostriamo che anche

$$3^{2(n+1)} - 8(n+1) - 1$$

lo è.

In effetti, $3^{2(n+1)} - 8(n+1) - 1 = 3^{2n+2} - 8n - 8 - 1 = 3^{2n} \cdot 3^2 - 8n - 8 - 1 =$

$$= 3^{2n} + 3^{2n} \cdot 8 - 8n - 8 - 1 = (3^{2n} - 8n - 1) + 3^{2n} \cdot 8 - 8 =$$

$$= (3^{2n} - 8n - 1) + 8(3^{2n} - 1)$$

L'espresssione dentro la prima parentesi è divisibile per 64 in base all'ipotesi di induzione; dobbiamo dunque dimostrare che $8(3^{2n} - 1)$ è anch'esso divisibile per 64, cioè che $3^{2n} - 1$ è divisibile per 8. Ma si ha

$$3^{2n} - 1 = (3^2)^n - 1$$

ed è ben noto che questa espressione è divisibile per $3^2 - 1$, cioè per 8.

Esercizio 2.15

Si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 2$ è

$$\sum_{k=1}^{n} 6^k = \frac{6^{n+1}-6}{5} \ .$$

Soluzione – Indichiamo con P(n) l'uguaglianza proposta, che si deve dimostrare vera per ogni numero naturale $n \geq 2$. Conviene procedere per induzione su n .

Per $n = 2$ si deve verificare che

$$\sum_{k=1}^{2} 6^k = \frac{6^{2+1}-6}{5}$$

ossia che

$$6^1 + 6^2 = \frac{6^3-6}{5} \ .$$

In effetti,

$$6^1 + 6^2 = 6 + 36 = 42 = \frac{216-6}{5} \ .$$

Adesso supponiamo che P(n) sia vera, e dimostriamo che è vera anche P($n+1$), cioè che

$$\sum_{k=1}^{n+1} 6^k = \frac{6^{n+2}-6}{5} \ .$$

Si ha

$$\sum_{k=1}^{n+1} 6^k = \sum_{k=1}^{n} 6^k + 6^{n+1}$$

ma per l'ipotesi di induzione è

$$\sum_{k=1}^{n+1} 6^k = \frac{6^{n+1}-6}{5}$$

dunque

$$\sum_{k=1}^{n+1} 6^k = \sum_{k=1}^{n} 6^k + 6^{n+1} = \frac{6^{n+1}-6}{5} + 6^{n+1} = \frac{6^{n+1}-6+5\cdot 6^{n+1}}{5} =$$

$$\frac{6\cdot 6^{n+1}-6}{5} = \frac{6^{n+2}-6}{5}$$

ossia la P($n+1$) come si doveva dimostrare.

Esercizio 2.16

Si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 2$ è

$$\sum_{k=1}^{n} 8^k = \frac{8^{n+1}-8}{7} \; .$$

Soluzione – Indichiamo con P(n) l’uguaglianza proposta, che si deve dimostrare vera per ogni numero naturale $n \geq 2$. Conviene procedere per induzione su n.

Per $n = 2$ si deve verificare che

$$\sum_{k=1}^{2} 8^k = \frac{8^{2+1}-8}{7}$$

ossia che

$$8^1 + 8^2 = \frac{8^3-8}{7} \; .$$

In effetti,

$$8^1 + 8^2 = 8 + 64 = 72 = \frac{512-8}{7} \; .$$

Adesso supponiamo che P(n) sia vera, e dimostriamo che è vera anche P($n+1$), cioè che

$$\sum_{k=1}^{n+1} 8^k = \frac{8^{n+2}-8}{7} \; .$$

Si ha

$$\sum_{k=1}^{n+1} 8^k = \sum_{k=1}^{n} 8^k + 8^{n+1}$$

ma per l’ipotesi di induzione è

$$\sum_{k=1}^{n+1} 8^k = \frac{8^{n+1}-8}{7}$$

dunque

$$\sum_{k=1}^{n+1} 8^k = \sum_{k=1}^{n} 8^k + 8^{n+1} = \frac{8^{n+1}-8}{7} + 8^{n+1} = \frac{8^{n+1}-8+7\cdot 8^{n+1}}{7} =$$

$$\frac{8\cdot 8^{n+1}-8}{7} = \frac{8^{n+2}-8}{7}$$

ossia la P($n+1$) come si doveva dimostrare.