Esercizi IAS-foglio 3

(D. Bubboloni) 18/11/2019

Esercizi sul prodotto semidiretto, gruppi di matrici, gruppi risolubili.
G denota sempre un gruppo. Inoltre

$$D_{2n} =< x > \ltimes < a >$$

è il gruppo diedrale di ordine $2n$ con $|a| = n$, $|x| = 2$ e azione di $< x >$ su $< a >$ individuata da $a^x = a^{-1}$.

0. Sia $C \leq G$ ciclico con $|C| = p^n$ per p primo e $n \in \mathbb{N}$. Sia $x \in G$, tale che $x^p \in C$ e x^p non generi C. Allora esiste $y \in C$ tale che $x^p = y^p$.

1. Provare che i sottogruppi normali di $G = D_{2n}$ sono tutti e soli i seguenti:

i) se n dispari: G e i sottogruppi di $< a >$.

ii) se n pari: G e i sottogruppi di $< a >$, $< a^2, x >$ e $< a^2, ax >$.

2. $D_{4n} \simeq D_{2n} \times C_2$ se e solo se n èdispari.

3. Sia $N \trianglelefteq G$ e H un suo complemento. Provare che ogni coniugato di H è un complemento di N.

4. Sia G un gruppo e $A \leq G$ tale che per ogni $a \in A$ e ogni $x, y \in G$ valga $[a, x, y] = 1$. Provare che $G' \leq C_G(A)$.

5. Sia G un gruppo e $A \trianglelefteq G$ con A abeliano. Provare che:

a) per ogni $x \in G$ fissato, la mappa che associa ad ogni $a \in A$ il commutatore $[a, x]$ èun omomorfismo di A in sédi nucleo $C_A(x)$.

b) $\frac{A}{C_A(x)} \simeq [A, \langle x \rangle]$

6. Sia U il gruppo delle matrici unitriangolari di dimensione 3 sul campo finito F. Si consideri il suo sottogruppo W avente zeri sulla sovradiagonale e un qualsiasi $b \in F$ in posizione $(1, 3)$, considerato a lezione. Sappiamo che $W \trianglelefteq U$ con quoziente isomorfo a $(F^2, +)$. Pertanto U èuna estensione di W tramite $(F^2, +)$. Si rifletta sull'essere tale estensione split o non split.

7. Dire se $GL_7(7)$ ammette un elemento X di ordine $a = \text{mcm}(7^4-1, 7^3-1)$ e dire come possa essere costruito. Determinare a. Dire se $X \in SL_7(7)$.

8. Sia Z il centro di $GL_n(q)$. Provare che $SL_n(q)Z \leq GL_n(q)$ e determinarne la taglia. Sotto quali condizioni, si ha $SL_n(q)Z = GL_n(q)$? Si forniscano esempi di casi in cui vale l'uguaglianza e si provi che in tal caso il prodotto è diretto.

9. Provare che, dato F campo, nel gruppo $G := F^* \ltimes F$, il sottogruppo F é normale minimale. Dedurne la serie derivata di G.
(*Suggerimento: si sfrutti il risultato secondo cui* $1 \neq N \trianglelefteq G$ *è normale minimale in* G *se e solo se* $\langle x \rangle^G = G$.)

10. Sfruttando le proprietà dei gruppi ciclici provare che $\sum_{d|n} \phi(d) = n$, dove ϕ è la funzione toziente di Eulero.

11. Si consideri in $G = GL_n(q)$, $q = p^k$, il sottoinsieme P delle matrici che ammettono il vettore $e_1 = [1, 0, \ldots, 0]^T \in F_q^n$ come autovettore. Si provi che P è un sottogruppo di G contenente il p-Sylow di G. Si determini l' indice di P in G. P è uno dei cosiddetti sottogruppi parabolici di $GL_n(q)$. Descrivere l'insieme

$$\bigcup_{X \in GL_n(q)} P^X.$$