5. – Esercizi su: ***relazioni di ordine***.

Esercizio 5.1

Nell’insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ sia $\subseteq$ la relazione di “inclusione”, e sia

$$\mathrm{B} := \{\{2,3,10\},\ \{1,2,3,4\},\ \{1,2,3,5\},\ \{2,3,4,5\},\ \{2,3,4,5,6\},\ \{2,3,4,5,6,10\}\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

– se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se B ha estremo inferiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo inferiore;

– se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se B ha estremo superiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo superiore.

Si indichi infine una qualsiasi limitazione superiore per B in A.

Esercizio 5.2

Nell’insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ delle coppie ordinate di numeri naturali, sia $\preceq$ la relazione di ordine così definita:

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \quad \text{se e soltanto se} \quad \big((x_1 \leq x_2)\ \wedge\ (y_1 \leq y_2)\big)\,.$$

Non è richiesta la verifica che $\preceq$ è effettivamente una relazione di ordine in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Si dica, motivando la risposta, se $\preceq$ è una relazione di ordine totale in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Posto inoltre

$$\mathbf{A} := \{(12,36),\ (10,12),\ (18,20),\ (23,24)\}$$

si dica, motivando la risposta:

– se **A** ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;
– se **A** ha estremo inferiore in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ed in tal caso qual è tale estremo inferiore;
– se **A** ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;
– se **A** ha estremo superiore in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ed in tal caso qual è tale estremo superiore.

Si indichi infine una qualsiasi limitazione superiore per **A** in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Esercizio 5.3

Nell'insieme $\mathcal{P}$ di tutti i poligoni del piano, sia ρ la relazione così definita:

$\mathrm{P}_1 \rho \mathrm{P}_2$ se e soltanto se il perimetro di P_1 è minore o uguale a quello di P_2 .

Si dica, motivando la risposta, se ρ è una relazione di ordine in $\mathcal{P}$. Nel caso che lo sia, si precisi se di ordine parziale o totale.

Esercizio 5.4

Nell'insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ sia $\subseteq$ la relazione di "inclusione", e sia

$$\mathrm{B} \coloneqq \{\{2,4\},\ \{2,3,4\},\ \{1,2,4\},\ \{2,3,4,5\},\ \{2,3,4,6\},\ \{2,3,4,7\}\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

– se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se B ha estremo inferiore, ed in tal caso qual è l'estremo inferiore;

– se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se B ha estremo superiore, ed in tal caso qual è l'estremo superiore.

Esercizio 5.5

Nell'insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ sia $\subseteq$ la relazione di "inclusione", e sia

$$\mathrm{B} \coloneqq \{\{2,3,7,10\},\ \{2,3,6,7,10\},\ \{3,6,7\},\ \{3,6\},\ \{2,3,6,9\}\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

– se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se B ha estremo inferiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo inferiore;

– se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se B ha estremo superiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo superiore.

Si indichi infine una qualsiasi limitazione superiore per B in A.

Esercizio 5.6

Nell’insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sia $\preceq$ la relazione di ordine così definita:

$$(a,b) \preceq (c,d) \quad \text{se e soltanto se} \quad a \leq c \quad \text{e} \quad b \leq d$$

(dove $\leq$ è l’usuale relazione di ordine totale definita in $\mathbb{N}$). Non è richiesto di verificare che $\preceq$ è effettivamente una relazione di ordine in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sia

$$\mathrm{A} := \{(3,7),\ (2,5),\ (4,9),\ (8,8),\ (7,10)\}\ .$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\preceq$:

– se A ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se A ha estremo inferiore, ed in tal caso qual è l’estremo inferiore;

– se A ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se A ha estremo superiore, ed in tal caso qual è l’estremo superiore.

Esercizio 5.7

Nell’insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ sia $\subseteq$ la relazione di “inclusione”, e sia

$$\mathrm{B} := \{\{3,4,10\},\ \{1,2,3,4\},\ \{1,3,4,6\},\ \{2,3,4,6\},\ \{2,3,4,5,6\},\ \{2,3,4,5,6,10\}\}\ .$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

– se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se B ha estremo inferiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo inferiore;

– se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se B ha estremo superiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo superiore.

Si indichi infine una qualsiasi limitazione superiore per B in A.

Esercizio 5.8

Nell’insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ sia $\subseteq$ la relazione di “inclusione”, e sia

$$\mathrm{B} := \{\{3,5\},\ \{3,4,5\},\ \{1,3,5\},\ \{2,3,4,5\},\ \{3,4,5,6\},\ \{3,4,5,7\}\}\ .$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

– se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se B ha estremo inferiore, ed in tal caso qual è l’estremo inferiore;

– se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se B ha estremo superiore, ed in tal caso qual è l’estremo superiore.

Esercizio 5.9

Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ delle coppie ordinate di numeri naturali, sia $\preceq$ la relazione di ordine così definita:

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \quad \text{se e soltanto se} \quad \big((x_1 \leq x_2) \wedge (y_1 \leq y_2)\big) .$$

Non è richiesta la verifica che $\preceq$ è effettivamente una relazione di ordine in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Si dica, motivando la risposta, se $\preceq$ è una relazione di ordine totale in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Posto inoltre

$$\mathbf{A} := \{(24, 25),\ (23, 26),\ (34, 31),\ (27, 30)\}$$

si dica, motivando la risposta:

– se **A** ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;
– se **A** ha estremo inferiore in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ed in tal caso qual è tale estremo inferiore;
– se **A** ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;
– se **A** ha estremo superiore in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ed in tal caso qual è tale estremo superiore.

Si indichi infine una qualsiasi limitazione inferiore per **A** in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Esercizio 5.10

Nell'insieme $\mathcal{P}$ di tutti i pentagoni del piano, sia ρ la relazione così definita:

$\mathrm{P}_1 \rho \mathrm{P}_2$ se e soltanto se l'area di P_1 è minore o uguale a quella di P_2.

Si dica, motivando la risposta, se ρ è una relazione di ordine in $\mathcal{P}$. Nel caso che lo sia, si precisi se di ordine parziale o totale.

Esercizio 5.11

Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sia $\preceq$ la relazione di ordine così definita:

$$(a, b) \preceq (c, d) \quad \text{se e soltanto se} \quad a \leq c \ \text{ e } \ b \leq d$$

(dove $\leq$ è l'usuale relazione di ordine totale definita in $\mathbb{N}$). Non è richiesto di verificare che $\preceq$ è effettivamente una relazione di ordine in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sia

$$\mathrm{A} := \{(2, 7),\ (3, 4),\ (5, 6),\ (5, 7),\ (4, 6)\} .$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\preceq$:

– se A ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se A ha estremo inferiore, ed in tal caso qual è l'estremo inferiore;

– se A ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se A ha estremo superiore, ed in tal caso qual è l'estremo superiore.

Esercizio 5.12

Nell'insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ sia $\subseteq$ la relazione di "inclusione", e sia

$$\mathrm{B} := \{\{3,4\},\ \{2,3,4\},\ \{1,3,4\},\ \{2,3,4,5\},\ \{2,3,4,6\},\ \{2,3,4,7\}\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

– se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se B ha estremo inferiore, ed in tal caso qual è l'estremo inferiore;

– se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se B ha estremo superiore, ed in tal caso qual è l'estremo superiore.

Esercizio 5.13

Nell'insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ sia $\subseteq$ la relazione di "inclusione", e sia

$$\mathrm{B} := \{\{3,5,8,10\},\ \{3,5,6,9,10\},\ \{6,9,10\},\ \{6,9\},\ \{2,5,6,9\}\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

– se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se B ha estremo inferiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo inferiore;

– se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se B ha estremo superiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo superiore.

Si indichi infine una qualsiasi limitazione superiore per B in A.

Esercizio 5.14

Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sia $\preceq$ la relazione di ordine così definita:

$$(a,b) \preceq (c,d) \quad \text{se e soltanto se} \quad a \leq c \quad \text{e} \quad b \leq d$$

(dove $\leq$ è l'usuale relazione di ordine totale definita in $\mathbb{N}$). Non è richiesto di verificare che $\preceq$ è effettivamente una relazione di ordine in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sia

$$\mathrm{A} := \{(3,8),\ (4,5),\ (6,7),\ (6,8),\ (5,7)\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\preceq$:

– se A ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;
– se A ha estremo inferiore, ed in tal caso qual è l'estremo inferiore;
– se A ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;
– se A ha estremo superiore, ed in tal caso qual è l'estremo superiore.

Esercizio 5.15

Nell’insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ sia $\subseteq$ la relazione di “inclusione”, e sia

$$\mathrm{B} := \{\{1,3,6,8\},\ \{2,3,6,8,9\},\ \{2,3,9\},\ \{2,9\},\ \{2,5,8,9\}\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

– se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se B ha estremo inferiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo inferiore;

– se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se B ha estremo superiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo superiore.

Si indichi infine una qualsiasi limitazione superiore per B in A.

Esercizio 5.16

Nell’insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ sia $\subseteq$ la relazione di “inclusione”, e sia

$$\mathrm{B} := \{\{4,5\},\ \{3,4,5\},\ \{1,4,5\},\ \{2,3,4,5\},\ \{3,4,5,6\},\ \{3,4,5,7\}\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

– se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se B ha estremo inferiore, ed in tal caso qual è l’estremo inferiore;

– se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se B ha estremo superiore, ed in tal caso qual è l’estremo superiore.

Esercizio 5.17

Nell’insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ sia $\subseteq$ la relazione di “inclusione”, e sia

$$\mathrm{B} := \{\{1,4,6,9\},\ \{1,2,5,8,9\},\ \{2,5,6\},\ \{2,5\},\ \{1,2,5,8\}\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

– se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se B ha estremo inferiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo inferiore;

– se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se B ha estremo superiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo superiore.

Si indichi infine una qualsiasi limitazione superiore per B in A.

Esercizio 5.18

Nell’insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sia $\preceq$ la relazione di ordine così definita:

$$(a, b) \preceq (c, d) \quad \text{se e soltanto se} \quad a \leq c \quad \text{e} \quad b \leq d$$

(dove $\leq$ è l’usuale relazione di ordine totale definita in $\mathbb{N}$). Non è richiesto di verificare che $\preceq$ è effettivamente una relazione di ordine in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sia

$$\mathrm{A} \coloneqq \{(2, 6),\ (1, 4),\ (3, 8),\ (7, 7),\ (6, 9)\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\preceq$:

– se A ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se A ha estremo inferiore, ed in tal caso qual è l’estremo inferiore;

– se A ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se A ha estremo superiore, ed in tal caso qual è l’estremo superiore.