3. – Soluzione degli esercizi su: ***successioni definite per ricorrenza***.

Esercizio 3.1

Sia (a_n) la successione definita ricorsivamente da

$$a_0 := 2\,; \qquad a_1 := 3\,; \qquad a_{n+1} := 3a_n + 10a_{n-1}\,.$$

Si esprima in forma compatta il generico termine a_n della successione, e si verifichi per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata.

Soluzione – Si deve considerare l'equazione di secondo grado

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

che si risolve con la formula

$$x := \tfrac{3 \pm \sqrt{9+4\cdot 10}}{2} = \tfrac{3\pm 7}{2}$$

e quindi ammette le due soluzioni $\alpha = 5$ e $\beta = -2$. Il generico termine della successione sarà della forma

$$a_n = h \cdot 5^n + k \cdot (-2)^n$$

dove h e k si ricavano dalle relazioni

$$\begin{cases} h + k = 2 \\ 5h - 2k = 3 \end{cases}$$

cosicché $h = k = 1$. Dunque

$$a_n = 5^n + (-2)^n\,.$$

Verifichiamo infine per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata. Per come è definita la successione,

$$a_2 := 3a_1 + 10a_0 = 3 \cdot 3 + 10 \cdot 2 = 29 \quad \text{e} \quad a_3 := 3a_2 + 10a_1 = 117\,.$$

Per l'espressione che abbiamo trovato,

$$a_3 = 5^3 + (-2)^3 = 125 - 8 = 117\,.$$

Esercizio 3.2

Sia (a_n) la successione definita ricorsivamente da

$$a_0 := 2\,; \qquad a_1 := 5\,; \qquad a_{n+1} := 10a_n - 25a_{n-1}\,.$$

Si esprima in forma compatta il generico termine a_n della successione, e si verifichi per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata.

Soluzione – Si deve considerare l'equazione di secondo grado

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

che si può scrivere come

$$(x-5)^2 = 0$$

e quindi ammette l'unica soluzione $\alpha = 5$. Il generico termine della successione sarà della forma

$$a_n = (h+nk) \cdot 5^n$$

dove h e k si ricavano dalle relazioni

$$\begin{cases} h = 2 \\ 5(h+k) = 5 \end{cases}$$

cosicché $h = 2$ e $k = -1$. Dunque

$$a_n = (2-n) \cdot 5^n .$$

Verifichiamo infine per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata. Per come è definita la successione,

$$a_2 := -25a_0 + 10a_1 = -50 + 50 = 0 \quad \text{e} \quad a_3 := -25a_1 + 10a_2 = -125 .$$

Per l'espressione che abbiamo trovato,

$$a_3 = (2-3)5^3 = -5^3 = -125 .$$

$\boxed{\text{Esercizio 3.3}}$

Sia (a_n) la successione definita ricorsivamente da

$$a_0 := 2 ; \qquad a_1 := 5 ; \qquad a_{n+1} := -9a_{n-1} + 6a_n .$$

Si esprima in forma compatta il generico termine a_n della successione, e si verifichi per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata.

Soluzione – Si deve considerare l'equazione di secondo grado

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

che si può scrivere come

$$(x-3)^2 = 0$$

e quindi ammette l'unica soluzione $\alpha = 3$.

Il generico termine della successione sarà della forma

$$a_n = (h+nk) \cdot 3^n$$

dove h e k si ricavano dalle relazioni

$$\begin{cases} h = 2 \\ 3(h+k) = 5 \end{cases}$$

cosicché $h = 2$ e $k = -\frac{1}{3}$. Dunque

$$a_n = (2 - \tfrac{n}{3}) \cdot 3^n .$$

Verifichiamo infine per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata. Per come è definita la successione,

$$a_2 := -9a_0 + 6a_1 = -18 + 30 = 12 \quad \text{e} \quad a_3 := -9a_1 + 6a_2 = -45 + 72 = 27.$$

Per l'espressione che abbiamo trovato,

$$a_3 = (2 - \tfrac{3}{3})3^3 = 3^3 = 27\,.$$

Esercizio 3.4

Sia (a_n) la successione definita ricorsivamente da

$$a_0 := 6\,; \qquad a_1 := 19\,; \qquad a_{n+1} := 10a_{n-1} - 3a_n\,.$$

Si esprima in forma compatta il generico termine a_n della successione, e si verifichi per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata.

Soluzione – Si deve considerare l'equazione di secondo grado

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

che si risolve con la formula

$$x := \tfrac{-3 \pm \sqrt{9+4\cdot 10}}{2} = \tfrac{-3\pm 7}{2}$$

e quindi ammette le due soluzioni $\alpha = 2$ e $\beta = -5$. Il generico termine della successione sarà della forma

$$a_n = h \cdot 2^n + k \cdot (-5)^n$$

dove h e k si ricavano dalle relazioni

$$\begin{cases} h + k = 6 \\ 2h - 5k = 19 \end{cases}$$

cosicché $h = 7$ e $k = -1$. Dunque

$$a_n = 7 \cdot 2^n - (-5)^n\,.$$

Verifichiamo infine per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata. Per come è definita la successione,

$$a_2 := 10a_0 - 3a_1 = 10 \cdot 6 - 3 \cdot 19 = 3 \quad \text{e} \quad a_3 := 10a_1 - 3a_2 = 181\,.$$

Per l'espressione che abbiamo trovato,

$$a_3 = 7 \cdot 2^3 - (-5)^3 = 56 - (-125) = 181\,.$$

Esercizio 3.5

Sia (a_n) la successione definita ricorsivamente da

$$a_0 := 2\,; \qquad a_1 := -4\,; \qquad a_{n+1} := 8(a_n - 2a_{n-1})\,.$$

Si esprima in forma compatta il generico termine a_n della successione, e si verifichi per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata.

Soluzione – Si deve considerare l’equazione di secondo grado

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

che si può scrivere come

$$(x-4)^2 = 0$$

e quindi ammette l’unica soluzione $\alpha = 4$. Il generico termine della successione sarà della forma

$$a_n = (h + nk) \cdot 4^n$$

dove h e k si ricavano dalle relazioni

$$\begin{cases} h = 2 \\ 4(h+k) = -4 \end{cases}$$

cosicché $h = 2$ e $k = -3$. Dunque

$$a_n = (2 - 3n) \cdot 4^n \,.$$

Verifichiamo infine per $n := 3$ la correttezza dell’espressione trovata. Per come è definita la successione,

$$a_2 := 8(a_1 - 2a_0) = 8 \cdot (-8) = -64 \quad \text{e} \quad a_3 := 8(a_2 - 2a_1) = -448 \,.$$

Per l’espressione che abbiamo trovato,

$$a_3 = (2 - 3 \cdot 3)4^3 = -7 \cdot 64 = -448 \,.$$

Esercizio 3.6

Sia (a_n) la successione definita ricorsivamente da

$$a_0 := 1\,; \qquad a_1 := 4\,; \qquad a_{n+1} := -9a_{n-1} - 6a_n \,.$$

Si esprima in forma compatta il generico termine a_n della successione, e si verifichi per $n := 3$ la correttezza dell’espressione trovata.

Soluzione – Si deve considerare l’equazione di secondo grado

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

che si può scrivere come

$$(x+3)^2 = 0$$

e quindi ammette l’unica soluzione $\alpha = -3$. Il generico termine della successione sarà della forma

$$a_n = (h + nk)(-3)^n$$

dove h e k si ricavano dalle relazioni

$$\begin{cases} h = 1 \\ -3(h+k) = 4 \end{cases}$$

cosicché $h = 1$ e $k = -\frac{7}{3}$. Dunque

$$a_n = (1 - \tfrac{7}{3}n)(-3)^n \,.$$

Verifichiamo infine per $n := 3$ la correttezza dell’espressione trovata. Per come è definita la successione,

$$a_2 := -9a_0 - 6a_1 = -9 - 24 = -33 \quad \text{e} \quad a_3 := -9a_1 - 6a_2 = -36 + 198 = 162.$$

Per l’espressione che abbiamo trovato,

$$a_3 = (1 - \tfrac{7}{3}3)(-3)^3 = -6 \cdot (-3)^3 = 162\,.$$

Esercizio 3.7

Sia (a_n) la successione definita ricorsivamente da

$$a_0 := 3\,; \qquad a_1 := 4\,; \qquad a_{n+1} := 8a_n - 16a_{n-1}\,.$$

Si esprima in forma compatta il generico termine a_n della successione, e si verifichi per $n := 3$ la correttezza dell’espressione trovata.

Soluzione – Si deve considerare l’equazione di secondo grado

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

che si può scrivere come

$$(x-4)^2 = 0$$

e quindi ammette l’unica soluzione $\alpha = 4$. Il generico termine della successione sarà della forma

$$a_n = (h + nk) \cdot 4^n$$

dove h e k si ricavano dalle relazioni

$$\begin{cases} h = 3 \\ 4(h+k) = 4 \end{cases}$$

cosicché $h = 3$ e $k = -2$. Dunque

$$a_n = (3 - 2n) \cdot 4^n\,.$$

Verifichiamo infine per $n := 3$ la correttezza dell’espressione trovata. Per come è definita la successione,

$$a_2 := 8(a_1 - 2a_0) = 8 \cdot (-2) = -16 \quad \text{e} \quad a_3 := 8(a_2 - 2a_1) = -192\,.$$

Per l’espressione che abbiamo trovato,

$$a_3 = (3 - 2 \cdot 3)4^3 = -3 \cdot 64 = -192\,.$$

Esercizio 3.8

Sia (a_n) la successione definita ricorsivamente da

$$a_0 := 1\,; \qquad a_1 := 0\,; \qquad a_{n+1} := a_{n-1} - a_n\,.$$

Si esprima in forma compatta il generico termine a_n della successione, e si verifichi per $n := 3$ la correttezza dell’espressione trovata.

Soluzione – Si deve considerare l'equazione di secondo grado

$$x^2 + x - 1 = 0$$

che si risolve con la formula

$$x := \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

e quindi ammette le due soluzioni $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \varphi - 1$ e $\beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -\varphi$. Il generico termine della successione sarà della forma

$$a_n = h \cdot (\varphi - 1)^n + k \cdot (-\varphi)^n$$

dove h e k si ricavano dalle relazioni

$$\begin{cases} h + k = 1 \\ h(\varphi - 1) + k(-\varphi) = 0 \end{cases}$$

cosicché $h = \frac{\varphi}{\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$ e $k = \frac{\varphi - 1}{\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$. Dunque

$$a_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$

Verifichiamo infine per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata. Per come è definita la successione,

$$a_2 := a_0 - a_1 = 1 - 0 = 1 \quad \text{e} \quad a_3 := a_1 - a_2 = 0 - 1 = -1 .$$

Per l'espressione che abbiamo trovato,

$$a_3 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{-5+3\sqrt{5}}{10} + \frac{-5-3\sqrt{5}}{10} = -1 .$$

Esercizio 3.9

Sia (a_n) la successione definita ricorsivamente da

$$a_0 := 6 ; \qquad a_1 := 42 ; \qquad a_{n+1} := 7a_n - 9a_{n-1} .$$

Si esprima in forma compatta il generico termine a_n della successione, e si verifichi per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata.

Soluzione – Si deve considerare l'equazione di secondo grado

$$x^2 - 7x + 9 = 0$$

che si risolve con la formula

$$x := \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4\cdot 9}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}$$

e quindi ammette le due soluzioni $\alpha = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$ e $\beta = \frac{7-\sqrt{13}}{2}$. Il generico termine della successione sarà della forma

$$a_n = h \cdot \left(\frac{7+\sqrt{13}}{2}\right)^n + k \cdot \left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)^n$$

dove h e k si ricavano dalle relazioni

$$\begin{cases} h+k=6 \\ h\cdot\frac{7+\sqrt{13}}{2}+k\cdot\frac{7-\sqrt{13}}{2}=42 \end{cases}$$

cosicché $h=3+21\frac{\sqrt{13}}{2}$ e $k=3-21\frac{\sqrt{13}}{2}$. Dunque

$$a_n=\left(3+21\frac{\sqrt{13}}{13}\right)\cdot\left(\frac{7+\sqrt{13}}{2}\right)^n+\left(3-21\frac{\sqrt{13}}{13}\right)\left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)^n.$$

Verifichiamo infine per $n:=3$ la correttezza dell'espressione trovata. Per come è definita la successione,

$$a_2:=7a_1-9a_0=7\cdot42-9\cdot6=240 \quad \text{e} \quad a_3:=7a_2-9a_1=1\,302\,.$$

Per l'espressione che abbiamo trovato,

$$a_3=\left(3+21\frac{\sqrt{13}}{13}\right)\cdot\left(\frac{7+\sqrt{13}}{2}\right)^3+\left(3-21\frac{\sqrt{13}}{13}\right)\left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)^3=$$

$$=\left(651+\frac{2\,397}{13}\sqrt{13}\right)+\left(651-\frac{2\,397}{13}\sqrt{13}\right)=1\,302\,.$$

Esercizio 3.10

Sia (a_n) la successione definita ricorsivamente da

$$a_0:=4\,; \qquad a_1:=15\,; \qquad a_{n+1}:=10a_n-25a_{n-1}\,.$$

Si esprima in forma compatta il generico termine a_n della successione, e si verifichi per $n:=3$ la correttezza dell'espressione trovata.

Soluzione – Si deve considerare l'equazione di secondo grado

$$x^2-10x+25=0$$

che si può scrivere come

$$(x-5)^2=0$$

e quindi ammette l'unica soluzione $\alpha=5$. Il generico termine della successione sarà della forma

$$a_n=(h+nk)\cdot5^n$$

dove h e k si ricavano dalle relazioni

$$\begin{cases} h=4 \\ 5(h+k)=15 \end{cases}$$

cosicché $h=4$ e $k=-1$. Dunque

$$a_n=(4-n)\cdot5^n\,.$$

Verifichiamo infine per $n := 3$ la correttezza dell’espressione trovata. Per come è definita la successione,

$a_2 := -25a_0 + 10a_1 = -100 + 150 = 50$ e $a_3 := -25a_1 + 10a_2 = -375 + 500 = 125$.

Per l’espressione che abbiamo trovato,

$$a_3 = (4-3)5^3 = 5^3 = 125\,.$$

Esercizio 3.11

Sia (a_n) la successione definita ricorsivamente da

$a_0 := 4\,;\qquad a_1 := 6\,;\qquad a_{n+1} := 6a_n - 9a_{n-1}\,.$

Si esprima in forma compatta il generico termine a_n della successione, e si verifichi per $n := 3$ la correttezza dell’espressione trovata.

Soluzione – Si deve considerare l’equazione di secondo grado

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

che si può scrivere come

$$(x-3)^2 = 0$$

e quindi ammette l’unica soluzione $\alpha = 3$. Il generico termine della successione sarà della forma

$$a_n = (h + nk)\cdot 3^n$$

dove h e k si ricavano dalle relazioni

$$\begin{cases} h = 4 \\ 3(h+k) = 6 \end{cases}$$

cosicché $h = 4$ e $k = -2$. Dunque

$$a_n = (4 - 2n)\cdot 3^n\,.$$

Verifichiamo infine per $n := 3$ la correttezza dell’espressione trovata. Per come è definita la successione,

$$a_2 := -9a_0 + 6a_1 = -36 + 36 = 0 \quad \text{e} \quad a_3 := -9a_1 + 6a_2 = -54.$$

Per l’espressione che abbiamo trovato,

$$a_3 = (4-6)\cdot 3^3 = (-2)\cdot 3^3 = -54\,.$$

Esercizio 3.12

Sia (a_n) la successione definita ricorsivamente da

$a_0 := 0\,;\qquad a_1 := 3\,;\qquad a_{n+1} := 10a_n - 22a_{n-1}\,.$

Si esprima in forma compatta il generico termine a_n della successione, e si verifichi per $n := 3$ la correttezza dell’espressione trovata.

Soluzione – Si deve considerare l'equazione di secondo grado

$$x^2 - 10x + 22 = 0$$

che si risolve con la formula

$$x := 5 \pm \sqrt{25 - 22} = 5 \pm \sqrt{3}$$

e quindi ammette le due soluzioni $\alpha = 5 + \sqrt{3}$ e $\beta = 5 - \sqrt{3}$. Il generico termine della successione sarà della forma

$$a_n = h \cdot \left(5 + \sqrt{3}\right)^n + k \cdot \left(5 - \sqrt{3}\right)^n$$

dove h e k si ricavano dalle relazioni

$$\begin{cases} h + k = 0 \\ h \cdot \left(5 + \sqrt{3}\right) + k \cdot \left(5 - \sqrt{3}\right) = 3 \end{cases}$$

cosicché $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $k = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dunque

$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(5 + \sqrt{3}\right)^n - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(5 - \sqrt{3}\right)^n .$$

Verifichiamo infine per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata. Per come è definita la successione,

$$a_2 := 10a_1 - 22a_0 = 10 \cdot 3 - 22 \cdot 0 = 30 \quad \text{e} \quad a_3 := 10a_2 - 22a_1 = 10 \cdot 30 - 22 \cdot 3 = 234 .$$

Per l'espressione che abbiamo trovato,

$$a_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(5 + \sqrt{3}\right)^3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(5 - \sqrt{3}\right)^3 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(170 + 78\sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(170 - 78\sqrt{3}\right) = 117 + 117 = 234 .$$

Esercizio 3.13

Sia (a_n) la successione definita ricorsivamente da

$a_0 := 6 ;$

$a_1 := 15 ;$

$a_{n+1} := 5a_n - 3a_{n-1} .$

Si esprima in forma compatta il generico termine a_n della successione, e si verifichi per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata.

Soluzione – Si deve considerare l'equazione di secondo grado

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

che si risolve con la formula

$$x := \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

e quindi ammette le due soluzioni $\alpha = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$ e $\beta = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$. Il generico termine della successione sarà della forma

$$a_n = h \cdot \left(\tfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^n + k \cdot \left(\tfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right)^n$$

dove h e k si ricavano dalle relazioni

$$\begin{cases} h + k = 6 \\ h \cdot \frac{5+\sqrt{13}}{2} + k \cdot \frac{5-\sqrt{13}}{2} = 15 \end{cases}$$

cosicché $h = k = 3$. Dunque

$$a_n = 3 \cdot \left(\tfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\tfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right)^n .$$

Verifichiamo infine per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata. Per come è definita la successione,

$$a_2 := 5a_1 - 3a_0 = 5 \cdot 15 - 3 \cdot 6 = 57 \quad \text{e} \quad a_3 := 5a_2 - 3a_1 = 5 \cdot 57 - 3 \cdot 15 = 240 .$$

Per l'espressione che abbiamo trovato,

$$a_3 = 3 \cdot \left(\tfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\tfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right)^3 =$$
$$= \left(120 + 33\sqrt{13}\right) + \left(120 - 33\sqrt{13}\right) = 240 .$$

Esercizio 3.14

Sia (a_n) la successione definita ricorsivamente da

$$a_0 := 1 ; \qquad a_1 := 12 ; \qquad a_{n+1} := 8(a_n - 2a_{n-1}) .$$

Si esprima in forma compatta il generico termine a_n della successione, e si verifichi per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata.

Soluzione – Si deve considerare l'equazione di secondo grado

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

che si può scrivere come

$$(x-4)^2 = 0$$

e quindi ammette l'unica soluzione $\alpha = 4$. Il generico termine della successione sarà della forma

$$a_n = (h + nk) \cdot 4^n$$

dove h e k si ricavano dalle relazioni

$$\begin{cases} h = 1 \\ 4(h+k) = 12 \end{cases}$$

cosicché $h = 1$ e $k = 2$. Dunque

$$a_n = (1 + 2n) \cdot 4^n .$$

Verifichiamo infine per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata. Per come è definita la successione,

$$a_2 := 8(a_1 - 2a_0) = 8 \cdot (10) = 80 \quad \text{e} \quad a_3 := 8(a_2 - 2a_1) = 448\,.$$

Per l'espressione che abbiamo trovato,

$$a_3 = (1 + 2 \cdot 3)4^3 = 7 \cdot 64 = 448\,.$$

Esercizio 3.15

Sia (a_n) la successione definita ricorsivamente da

$$a_0 := 2\,; \qquad a_1 := -9\,; \quad a_{n+1} := -9a_{n-1} - 6a_n\,.$$

Si esprima in forma compatta il generico termine a_n della successione, e si verifichi per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata.

Soluzione – Si deve considerare l'equazione di secondo grado

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

che si può scrivere come

$$(x+3)^2 = 0$$

e quindi ammette l'unica soluzione $\alpha = -3$. Il generico termine della successione sarà della forma

$$a_n = (h + nk)(-3)^n$$

dove h e k si ricavano dalle relazioni

$$\begin{cases} h = 2 \\ -3(h+k) = -9 \end{cases}$$

cosicché $h = 2$ e $k = 1$. Dunque

$$a_n = (2 + n)(-3)^n\,.$$

Verifichiamo infine per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata. Per come è definita la successione,

$$a_2 := -9a_0 - 6a_1 = -18 + 54 = 36 \quad \text{e} \quad a_3 := -9a_1 - 6a_2 = 81 - 216 = -135.$$

Per l'espressione che abbiamo trovato,

$$a_3 = (2+3)(-3)^3 = 5 \cdot (-3)^3 = -135\,.$$

Esercizio 3.16

Sia (a_n) la successione definita ricorsivamente da

$$a_0 := 1\,; \qquad a_1 := 0\,; \qquad a_{n+1} := 8a_n - 16a_{n-1}\,.$$

Si esprima in forma compatta il generico termine a_n della successione, e si verifichi per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata.

Soluzione – Si deve considerare l'equazione di secondo grado

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

che si può scrivere come

$$(x-4)^2 = 0$$

e quindi ammette l'unica soluzione $\alpha = 4$. Il generico termine della successione sarà della forma

$$a_n = (h + nk) \cdot 4^n$$

dove h e k si ricavano dalle relazioni

$$\begin{cases} h = 1 \\ 4(h+k) = 0 \end{cases}$$

cosicché $h = 1$ e $k = -1$. Dunque

$$a_n = (1-n) \cdot 4^n\,.$$

Verifichiamo infine per $n := 3$ la correttezza dell'espressione trovata. Per come è definita la successione,

$$a_2 := 8(a_1 - 2a_0) = 8 \cdot (-2) = -16 \quad \text{e} \quad a_3 := 8(a_2 - 2a_1) = -128\,.$$

Per l'espressione che abbiamo trovato,

$$a_3 = (1-3)4^3 = -2 \cdot 64 = -128\,.$$