5. – Soluzione degli esercizi su: *relazioni di ordine*.

Esercizio 5.1

Nell’insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ sia $\subseteq$ la relazione di “inclusione”, e sia

$$\mathrm{B} := \{\{2,3,10\},\ \{1,2,3,4\},\ \{1,2,3,5\},\ \{2,3,4,5\},\ \{2,3,4,5,6\},\ \{2,3,4,5,6,10\}\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

– se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se B ha estremo inferiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo inferiore;

– se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se B ha estremo superiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo superiore.

Si indichi infine una qualsiasi limitazione superiore per B in A.

Soluzione – Poiché nessun elemento di B è incluso in ogni elemento di B, B non ha minimo. Per trovare l’(eventuale) estremo inferiore di B in A, dobbiamo trovare tutte le limitazioni inferiori di B in A, cioè tutti i sottoinsiemi di $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ che sono inclusi in ogni elemento di B.

Sia X un tale sottoinsieme: deve essere in particolare $\mathrm{X} \subset \{2,3,10\}$, quindi $\mathrm{X} = \emptyset$, oppure $\mathrm{X} = \{2\}$, oppure $\mathrm{X} = \{3\}$, oppure $\mathrm{X} = \{10\}$, oppure $\mathrm{X} = \{2,3\}$, oppure $\mathrm{X} = \{2,10\}$, oppure $\mathrm{X} = \{3,10\}$, oppure $\mathrm{X} = \{2,3,10\}$. Inoltre deve essere $\mathrm{X} \subset \{1,2,3,4\}$ e quindi restano soltanto le possibilità $\emptyset$, $\{2\}$, $\{3\}$ e $\{2,3\}$. È immediato che questi quattro insiemi sono inclusi in ogni elemento di B, e dunque sono tutte e sole le limitazioni inferiori di B in A. Poiché questi quattro insiemi sono tutti inclusi in $\{2,3\}$, quest’ultimo insieme è la massima limitazione inferiore di B in A, cioè è l’estremo inferiore di B in A.

Poiché non esiste nessun elemento di B nel quale tutti gli elementi di B siano inclusi, B non ha massimo. Per trovare l’(eventuale) estremo superiore di B in A, dobbiamo trovare tutte le limitazioni superiori di B in A, cioè tutti i sottoinsiemi di $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ che contengono ogni elemento di B.

Sia X un tale sottoinsieme: ad esso devono appartenere 2, 3 e 10 (perché $\{2,3,10\} \subset \mathrm{X}$); ma devono appartenervi anche 1 e 4 (perché $\{1,2,3,4\} \subset \mathrm{X}$); e anche 5 (perché $\{1,2,3,5\} \subset \mathrm{X}$); e anche 6 (perché $\{2,3,4,5,6\} \subset \mathrm{X}$). Dunque $\{1,2,3,4,5,6,10\} \subset \mathrm{X}$.

D’altra parte, ogni elmento di B è incluso in $\{1,2,3,4,5,6,10\}$ che qundi è una limitazione superiore per B in A e, per quanto abbiamo osservato, è in effetti la minima limitazione superiore per B in A, cioè è l’estremo superiore per B in A.

Esercizio 5.2

Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ delle coppie ordinate di numeri naturali, sia $\preceq$ la relazione di ordine così definita:

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \quad \text{se e soltanto se} \quad \big((x_1 \leq x_2) \ \wedge \ (y_1 \leq y_2)\big)\,.$$

Non è richiesta la verifica che $\preceq$ è effettivamente una relazione di ordine in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Si dica, motivando la risposta, se $\preceq$ è una relazione di ordine totale in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Posto inoltre

$$\mathbf{A} := \{(12,36),\ (10,12),\ (18,20),\ (23,24)\}$$

si dica, motivando la risposta:

- se **A** ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;
- se **A** ha estremo inferiore in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ed in tal caso qual è tale estremo inferiore;
- se **A** ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;
- se **A** ha estremo superiore in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ed in tal caso qual è tale estremo superiore.

Si indichi infine una qualsiasi limitazione superiore per **A** in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Soluzione – La $\preceq$ non è una relazione di ordine totale in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ perché esistono in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ elementi non confrontabili, ad esempio $(12,36)$ e $(23,24)$.

L'elemento $(10,12)$ è il minimo (e quindi anche l'estremo inferiore) di **A**. L'insieme **A** non ha massimo, e le sue limitazioni superiori in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sono tutte le coppie di numeri naturali della forma (x,y) con $23 \leq x$ e $36 \leq y$; dunque l'estremo superiore di **A** in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è $(23,36)$ (che quindi è anche un esempio di limitazione superiore).

Esercizio 5.3

Nell'insieme $\mathcal{P}$ di tutti i poligoni del piano, sia ρ la relazione così definita:

$P_1 \rho P_2$ se e soltanto se il perimetro di P_1 è minore o uguale a quello di P_2.

Si dica, motivando la risposta, se ρ è una relazione di ordine in $\mathcal{P}$. Nel caso che lo sia, si precisi se di ordine parziale o totale.

Soluzione – Affinché una relazione sia di ordine essa deve in particolare essere antisimmetrica, cioè: comunque presi P_1 e P_2, se vale che $P_1 \rho P_2$ e anche che $P_2 \rho P_1$ deve necessariamente essere $P_1 = P_2$. Poiché esistono poligoni distinti con lo stesso perimetro, ρ non è antisimmetrica e dunque certamente non è una relazione di ordine.

Esercizio 5.4

Nell’insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ sia $\subseteq$ la relazione di “inclusione”, e sia

$$B \coloneqq \{\{2,4\},\ \{2,3,4\},\ \{1,2,4\},\ \{2,3,4,5\},\ \{2,3,4,6\},\ \{2,3,4,7\}\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

- se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;
- se B ha estremo inferiore, ed in tal caso qual è l’estremo inferiore;
- se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;
- se B ha estremo superiore, ed in tal caso qual è l’estremo superiore.

Soluzione – Poiché $\{2,4\}$ è contenuto in ogni elemento di B, $\{2,4\}$ è il minimo di B. Poiché il minimo di un insieme, se esiste, è anche estremo inferiore per quell’insieme, $\{2,4\}$ è anche l’estremo inferiore di B.

Poiché non esiste nessun $X \in B$ tale che $\{2,3,4,6\} \subset X$ e $\{2,3,4,7\} \subset X$, B non ha massimo. Ogni limitazione superiore per B deve contenere tutti gli elementi di B, quindi ad essa devono appartenere $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7. Pertanto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ è l’unica limitazione superiore di B, ed è quindi l’estremo superiore di B.

Esercizio 5.5

Nell’insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ sia $\subseteq$ la relazione di “inclusione”, e sia

$$B \coloneqq \{\{2,3,7,10\},\ \{2,3,6,7,10\},\ \{3,6,7\},\ \{3,6\},\ \{2,3,6,9\}\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

- se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;
- se B ha estremo inferiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo inferiore;
- se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;
- se B ha estremo superiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo superiore.

Si indichi infine una qualsiasi limitazione superiore per B in A.

Soluzione – B non ha minimo, perché nessun elemento di B è in relazione con tutti gli elementi di B; le limitazioni inferiori di B in A sono $\emptyset$ e $\{3\}$, dunque l’estremo inferiore di B in A è $\{3\}$.

B non ha massimo, perché non c’è alcun elemento di B con cui tutti gli elementi di B siano in relazione; le limitazioni superiori di B in A (cioè gli elementi di A con cui tutti gli elementi di B sono in relazione) sono i sottoinsiemi di $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ a cui appartengono $2, 3, 6, 7, 9$ e 10; l’estremo superiore di B in A (che quindi è anche una limitazione superiore per B in A) è dunque

$$\{2,3,6,7,9,10\}.$$

Esercizio 5.6

Nell’insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sia $\preceq$ la relazione di ordine così definita:

$$(a, b) \preceq (c, d) \quad \text{se e soltanto se} \quad a \leq c \quad \text{e} \quad b \leq d$$

(dove $\leq$ è l’usuale relazione di ordine totale definita in $\mathbb{N}$). Non è richiesto di verificare che $\preceq$ è effettivamente una relazione di ordine in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sia

$$\mathrm{A} := \{(3,7),\ (2,5),\ (4,9),\ (8,8),\ (7,10)\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\preceq$:

– se A ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se A ha estremo inferiore, ed in tal caso qual è l’estremo inferiore;

– se A ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se A ha estremo superiore, ed in tal caso qual è l’estremo superiore.

Soluzione – Poiché $(2,5) \preceq (a,b)$ per ogni $(a,b) \in$ A, $(2,5)$ è il minimo di B. Poiché il minimo di un insieme, se esiste, è anche estremo inferiore per quell’insieme, $(2,5)$ è anche l’estremo inferiore di B.

Poiché non esiste nessun $(c,d) \in$ A tale che $(8,8) \preceq (c,d)$ e $(7,10) \preceq (c,d)$, A non ha massimo. Ogni limitazione superiore per A è della forma (c,d) con $8 \leq c$ e $10 \leq d$, quindi l’estremo superiore di A è $(8,\ 10)$.

Esercizio 5.7

Nell’insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ sia $\subseteq$ la relazione di “inclusione”, e sia

$$\mathrm{B} := \{\{3,4,10\},\ \{1,2,3,4\},\ \{1,3,4,6\},\ \{2,3,4,6\},\ \{2,3,4,5,6\},\ \{2,3,4,5,6,10\}\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

– se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se B ha estremo inferiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo inferiore;

– se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se B ha estremo superiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo superiore.

Si indichi infine una qualsiasi limitazione superiore per B in A.

Soluzione – Poiché nessun elemento di B è incluso in ogni elemento di B, B non ha minimo. Per trovare l’(eventuale) estremo inferiore di B in A, dobbiamo trovare tutte le limitazioni inferiori di B in A, cioè tutti i sottoinsiemi di $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ che sono inclusi in ogni elemento di B.

Sia X un tale sottoinsieme: deve essere in particolare $X \subset \{3, 4, 10\}$, quindi $X = \emptyset$, oppure $X = \{3\}$, oppure $X = \{4\}$, oppure $X = \{10\}$, oppure $X = \{3, 4\}$, oppure $X = \{3, 10\}$, oppure $X = \{4, 10\}$, oppure $X = \{3, 4, 10\}$. Inoltre deve essere $X \subset \{1, 2, 3, 4\}$ e quindi restano soltanto le possibilità $\emptyset$, $\{3\}$, $\{4\}$ e $\{3, 4\}$. È immediato che questi quattro insiemi sono inclusi in ogni elemento di B, e dunque sono tutte e sole le limitazioni inferiori di B in A. Poiché questi quattro insiemi sono tutti inclusi in $\{3, 4\}$, quest’ultimo insieme è la massima limitazione inferiore di B in A, cioè è l’estremo inferiore di B in A.

Poiché non esiste nessun elemento di B nel quale tutti gli elementi di B siano inclusi, B non ha massimo. Per trovare l’(eventuale) estremo superiore di B in A, dobbiamo trovare tutte le limitazioni superiori di B in A, cioè tutti i sottoinsiemi di $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ che contengono ogni elemento di B.

Sia X un tale sottoinsieme: ad esso devono appartenere 3, 4 e 10 (perché $\{3, 4, 10\} \subset X$); ma devono appartenervi anche 1 e 2 (perché $\{1, 2, 3, 4\} \subset X$); e anche 6 (perché $\{1, 3, 4, 6\} \subset X$); e anche 5 (perché $\{2, 3, 4, 5, 6\} \subset X$). Dunque $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\} \subset X$.

D’altra parte, ogni elmento di B è incluso in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\}$ che qundi è una limitazione superiore per B in A e, per quanto abbiamo osservato, è in effetti la minima limitazione superiore per B in A, cioè è l’estremo superiore per B in A.

Esercizio 5.8

Nell’insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ sia $\subseteq$ la relazione di “inclusione”, e sia

$$B := \{\{3,5\},\ \{3,4,5\},\ \{1,3,5\},\ \{2,3,4,5\},\ \{3,4,5,6\},\ \{3,4,5,7\}\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

– se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se B ha estremo inferiore, ed in tal caso qual è l’estremo inferiore;

– se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se B ha estremo superiore, ed in tal caso qual è l’estremo superiore.

Soluzione – Poiché $\{3, 5\}$ è contenuto in ogni elemento di B, $\{3, 5\}$ è il minimo di B. Poiché il minimo di un insieme, se esiste, è anche estremo inferiore per quell’insieme, $\{3, 5\}$ è anche l’estremo inferiore di B.

Poiché non esiste nessun $X \in B$ tale che $\{3, 4, 5, 6\} \subset X$ e $\{3, 4, 5, 7\} \subset X$, B non ha massimo. Ogni limitazione superiore per B deve contenere tutti gli elementi di B, quindi ad essa devono appartenere 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Pertanto $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ è l’unica limitazione superiore di B, ed è quindi l’estremo superiore di B.

Esercizio 5.9

Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ delle coppie ordinate di numeri naturali, sia $\preceq$ la relazione di ordine così definita:

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \quad \text{se e soltanto se} \quad ((x_1 \le x_2) \wedge (y_1 \le y_2)) .$$

Non è richiesta la verifica che $\preceq$ è effettivamente una relazione di ordine in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Si dica, motivando la risposta, se $\preceq$ è una relazione di ordine totale in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Posto inoltre

$$\mathbf{A} := \{(24, 25),\ (23, 26),\ (34, 31),\ (27, 30)\}$$

si dica, motivando la risposta:

- se **A** ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;
- se **A** ha estremo inferiore in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ed in tal caso qual è tale estremo inferiore;
- se **A** ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;
- se **A** ha estremo superiore in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ed in tal caso qual è tale estremo superiore.

Si indichi infine una qualsiasi limitazione inferiore per **A** in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Soluzione – La $\preceq$ non è una relazione di ordine totale in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ perché esistono in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ elementi non confrontabili, ad esempio $(23, 26)$ e $(24, 25)$.

L'insieme **A** non ha minimo, e le sue limitazioni inferiori in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sono tutte le coppie di numeri naturali della forma (x, y) con $x \le 23$ e $y \le 25$; dunque l'estremo inferiore di **A** in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è $(23, 25)$ (che quindi è anche un esempio di limitazione inferiore). L'elemento $(34, 31)$ è il massimo (e quindi anche l'estremo superiore) di **A**.

Esercizio 5.10

Nell'insieme $\mathcal{P}$ di tutti i pentagoni del piano, sia ρ la relazione così definita:

$\mathrm{P}_1 \rho \mathrm{P}_2$ se e soltanto se l'area di P_1 è minore o uguale a quella di P_2.

Si dica, motivando la risposta, se ρ è una relazione di ordine in $\mathcal{P}$. Nel caso che lo sia, si precisi se di ordine parziale o totale.

Soluzione – Affinché una relazione sia di ordine essa deve in particolare essere antisimmetrica, cioè: comunque presi P_1 e P_2, se vale che $\mathrm{P}_1 \rho \mathrm{P}_2$ e anche che $\mathrm{P}_2 \rho \mathrm{P}_1$ deve necessariamente essere $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2$. Poiché esistono pentagoni distinti con la stessa area, ρ non è antisimmetrica e dunque certamente non è una relazione di ordine.

Esercizio 5.11

Nell’insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sia $\preceq$ la relazione di ordine così definita:

$$(a, b) \preceq (c, d) \quad \text{se e soltanto se} \quad a \leq c \quad \text{e} \quad b \leq d$$

(dove $\leq$ è l’usuale relazione di ordine totale definita in $\mathbb{N}$). Non è richiesto di verificare che $\preceq$ è effettivamente una relazione di ordine in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sia

$$\mathrm{A} := \{(2,7),\ (3,4),\ (5,6),\ (5,7),\ (4,6)\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\preceq$:

– se A ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;
– se A ha estremo inferiore, ed in tal caso qual è l’estremo inferiore;
– se A ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;
– se A ha estremo superiore, ed in tal caso qual è l’estremo superiore.

Soluzione – Poiché non esiste nessun $(a, b) \in \mathrm{A}$ tale che

$$(a, b) \preceq (3, 4) \text{ e } (a, b) \preceq (2, 7),$$

A non ha minimo. Ogni limitazione inferiore per A è della forma (a, b) con $a \leq 2$ e $b \leq 4$, quindi l’estremo inferiore di A è $(2, 4)$.

Poiché $(a, b) \preceq (5, 7)$ per ogni $(a, b) \in \mathrm{A}$, $(5, 7)$ è il massimo di A. Poiché il massimo di un insieme, se esiste, è anche estremo superiore per quell’insieme, $(5, 7)$ è anche l’estremo superiore di B.

Esercizio 5.12

Nell’insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ sia $\subseteq$ la relazione di “inclusione”, e sia

$$\mathrm{B} := \{\{3,4\},\ \{2,3,4\},\ \{1,3,4\},\ \{2,3,4,5\},\ \{2,3,4,6\},\ \{2,3,4,7\}\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

– se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;
– se B ha estremo inferiore, ed in tal caso qual è l’estremo inferiore;
– se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;
– se B ha estremo superiore, ed in tal caso qual è l’estremo superiore.

Soluzione – Poiché $\{3, 4\}$ è contenuto in ogni elemento di B, $\{3, 4\}$ è il minimo di B. Poiché il minimo di un insieme, se esiste, è anche estremo inferiore per quell’insieme, $\{3, 4\}$ è anche l’estremo inferiore di B.

Poiché non esiste nessun $\mathrm{X} \in \mathrm{B}$ tale che $\{2, 3, 4, 6\} \subset \mathrm{X}$ e $\{2, 3, 4, 7\} \subset \mathrm{X}$, B non ha massimo. Ogni limitazione superiore per B deve contenere tutti gli elementi di B, quindi ad essa devono appartenere $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7 . Pertanto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ è l’unica limitazione superiore di B, ed è quindi l’estremo superiore di B.

Esercizio 5.13

Nell’insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ sia $\subseteq$ la relazione di “inclusione”, e sia

$$\mathrm{B} := \{\{3,5,8,10\},\ \{3,5,6,9,10\},\ \{6,9,10\},\ \{6,9\},\ \{2,5,6,9\}\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

– se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;
– se B ha estremo inferiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo inferiore;
– se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;
– se B ha estremo superiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo superiore.

Si indichi infine una qualsiasi limitazione superiore per B in A.

Soluzione – B non ha minimo né massimo; l’unica limitazione inferiore (e quindi anche l’estremo inferiore) di B in A è $\emptyset$, l’estremo superiore di B in A (che quindi è anche una limitazione superiore per B in A) è

$$\{2,3,5,6,8,9,10\}.$$

Esercizio 5.14

Nell’insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sia $\preceq$ la relazione di ordine così definita:

$$(a,b) \preceq (c,d) \quad \text{se e soltanto se} \quad a \leq c \quad \text{e} \quad b \leq d$$

(dove $\leq$ è l’usuale relazione di ordine totale definita in $\mathbb{N}$). Non è richiesto di verificare che $\preceq$ è effettivamente una relazione di ordine in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sia

$$\mathrm{A} := \{(3,8),\ (4,5),\ (6,7),\ (6,8),\ (5,7)\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\preceq$:

– se A ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;
– se A ha estremo inferiore, ed in tal caso qual è l’estremo inferiore;
– se A ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;
– se A ha estremo superiore, ed in tal caso qual è l’estremo superiore.

Soluzione – Poiché non esiste nessun $(a,b) \in \mathrm{A}$ tale che

$$(a,b) \preceq (3,8) \text{ e } (a,b) \preceq (4,5),$$

A non ha minimo. Ogni limitazione inferiore per A è della forma (a,b) con $a \leq 3$ e $b \leq 5$, quindi l’estremo inferiore di A è $(3,\ 5)$.

Poiché $(a,b) \preceq (6,8)$ per ogni $(a,b) \in \mathrm{A}$, $(6,8)$ è il massimo di A. Poiché il massimo di un insieme, se esiste, è anche estremo superiore per quell’insieme, $(6,8)$ è anche l’estremo superiore di B.

Esercizio 5.15

Nell’insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ sia $\subseteq$ la relazione di “inclusione”, e sia

$$\mathrm{B} := \{\{1,3,6,8\},\ \{2,3,6,8,9\},\ \{2,3,9\},\ \{2,9\},\ \{2,5,8,9\}\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

– se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;
– se B ha estremo inferiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo inferiore;
– se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;
– se B ha estremo superiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo superiore.

Si indichi infine una qualsiasi limitazione superiore per B in A.

Soluzione – B non ha minimo, perché nessun elemento di B è in relazione con tutti gli elementi di B; l’unica limitazione inferiore di B in A è $\emptyset$, dunque l’estremo inferiore di B in A è $\emptyset$.

B non ha massimo, perché non c’è alcun elemento di B con cui tutti gli elementi di B siano in relazione; le limitazioni superiori di B in A (cioè gli elementi di A con cui tutti gli elementi di B sono in relazione) sono i sottoinsiemi di $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ a cui appartengono $1,2,3,5,6,8$ e 9; l’estremo superiore di B in A (che quindi è anche una limitazione superiore per B in A) è dunque

$$\{1,2,3,5,6,8,9\}.$$

Esercizio 5.16

Nell’insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ sia $\subseteq$ la relazione di “inclusione”, e sia

$$\mathrm{B} := \{\{4,5\},\ \{3,4,5\},\ \{1,4,5\},\ \{2,3,4,5\},\ \{3,4,5,6\},\ \{3,4,5,7\}\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

– se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;
– se B ha estremo inferiore, ed in tal caso qual è l’estremo inferiore;
– se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;
– se B ha estremo superiore, ed in tal caso qual è l’estremo superiore.

Soluzione – Poiché $\{4,5\}$ è contenuto in ogni elemento di B, $\{4,5\}$ è il minimo di B. Poiché il minimo di un insieme, se esiste, è anche estremo inferiore per quell’insieme, $\{4,5\}$ è anche l’estremo inferiore di B.

Poiché non esiste nessun $\mathrm{X} \in \mathrm{B}$ tale che $\{3,4,5,6\} \subset \mathrm{X}$ e $\{3,4,5,7\} \subset \mathrm{X}$, B non ha massimo. Ogni limitazione superiore per B deve contenere tutti gli elementi di B, quindi ad essa devono appartenere $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ e 7. Pertanto $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ è l’unica limitazione superiore di B, ed è quindi l’estremo superiore di B.

Esercizio 5.17

Nell'insieme A di tutti i sottoinsiemi di $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$ sia $\subseteq$ la relazione di "inclusione", e sia

$$\mathrm{B} := \{\{1,4,6,9\},\ \{1,2,5,8,9\},\ \{2,5,6\},\ \{2,5\},\ \{1,2,5,8\}\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\subseteq$, :

– se B ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se B ha estremo inferiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo inferiore;

– se B ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se B ha estremo superiore in A, ed in tal caso qual è tale estremo superiore.

Si indichi infine una qualsiasi limitazione superiore per B in A .

Soluzione – B non ha minimo né massimo; l'unica limitazione inferiore (e quindi anche l'estremo inferiore) di B in A è $\emptyset$, l'estremo superiore di B in A (che quindi è anche una limitazione superiore per B in A) è

$$\{1,2,4,5,\ 6,8,9\}.$$

Esercizio 5.18

Nell'insieme $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sia $\preceq$ la relazione di ordine così definita:

$$(a,b)\preceq(c,d) \quad \text{se e soltanto se} \quad a\leq c \quad \text{e} \quad b\leq d$$

(dove $\leq$ è l'usuale relazione di ordine totale definita in $\mathbb{N}$). Non è richiesto di verificare che $\preceq$ è effettivamente una relazione di ordine in $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Sia

$$\mathrm{A} := \{(2,6),\ (1,4),\ (3,8),\ (7,7),\ (6,9)\}\,.$$

Si dica, motivando la risposta, con riferimento alla relazione $\preceq$:

– se A ha minimo, ed in tal caso qual è il minimo;

– se A ha estremo inferiore, ed in tal caso qual è l'estremo inferiore;

– se A ha massimo, ed in tal caso qual è il massimo;

– se A ha estremo superiore, ed in tal caso qual è l'estremo superiore.

Soluzione – Poiché $(1,4)\preceq(a,b)$ per ogni $(a,b)\in$ A, $(1,4)$ è il minimo di B. Poiché il minimo di un insieme, se esiste, è anche estremo inferiore per quell'insieme, $(1,4)$ è anche l'estremo inferiore di B.

Poiché non esiste nessun $(c,d)\in$ A tale che $(7,7)\preceq(c,d)$ e $(6,9)\preceq(c,d)$, A non ha massimo. Ogni limitazione superiore per A è della forma (c,d) con $7\leq c$ e $9\leq d$, quindi l'estremo superiore di A è (7, 9).