

6. – Soluzione degli esercizi su: *massimo comun divisore e minimo comune multiplo.*Esercizio 6.1

Sia

$$A := \{11, 47\,399, 243\,111\}.$$

Rispetto alla relazione di ordine “divide” definita in  $\mathbb{N}$ , si dica

- se  $A$  ha estremo inferiore in  $\mathbb{N}$ , e in tal caso qual è l’estremo inferiore di  $A$  in  $\mathbb{N}$ ;
- se  $A$  ha estremo superiore in  $\mathbb{N}$ , e in tal caso qual è l’estremo superiore di  $A$  in  $\mathbb{N}$ .

*Soluzione* – Poiché 11 divide sia 47 399 che 243 111 (come è facile verificare direttamente), 11 è il minimo di  $A$  e dunque anche l’estremo inferiore di  $A$  in  $\mathbb{N}$ .

Poiché 47 399 non divide 243 111, 243 111 non divide 47 399 e nessuno di questi due numeri divide 11,  $A$  non ha massimo; l’estremo superiore di  $A$  in  $\mathbb{N}$  è il minimo comune multiplo fra 47 399 e 243 111, per calcolare il quale bisogna prima trovare  $\text{MCD}(47\,399, 243\,111)$ . A questo scopo applichiamo l’algoritmo di Euclide:

$$243\,111 = 47\,399 \cdot 5 + 6\,116;$$

$$47\,399 = 6\,116 \cdot 7 + 4\,587;$$

$$6\,116 = 4\,587 \cdot 1 + 1\,529;$$

$$4\,587 = 1\,529 \cdot 3.$$

Dunque  $\text{MCD}(47\,399, 243\,111) = 1\,529$  e quindi l’estremo superiore di  $A$  in  $\mathbb{N}$  è

$$\frac{47\,399 \cdot 243\,111}{1\,529} = \frac{47\,399}{1\,529} \cdot 243\,111 = 31 \cdot 243\,111 = 7\,536\,441.$$

Esercizio 6.2

Si trovi il massimo comun divisore tra 1 186 728 963 e 55 637 502.

*Soluzione* – Utilizziamo l’algoritmo di Euclide. Si ha

$$1\,186\,728\,963 = 55\,637\,502 \cdot 21 + 18\,341\,421;$$

$$55\,637\,502 = 18\,341\,421 \cdot 3 + 613\,239;$$

$$18\,341\,421 = 613\,239 \cdot 29 + 557\,490;$$

$$613\,239 = 557\,490 \cdot 1 + 55\,749;$$

$$557\,490 = 55\,749 \cdot 10 + 0.$$

Il massimo comun divisore tra 1 186 728 963 e 55 637 502 è dunque 55 749.

**Esercizio 6.3**

Si trovino il massimo comun divisore tra 1 183 254 681 e 55 992 954.

*Soluzione* – Utilizziamo l’algoritmo di Euclide. Si ha

$$1\,183\,254\,681 = 55\,992\,954 \cdot 21 + 7\,402\,647;$$

$$55\,992\,954 = 7\,402\,647 \cdot 7 + 4\,174\,425;$$

$$7\,402\,647 = 4\,174\,425 \cdot 1 + 3\,228\,222;$$

$$4\,174\,425 = 3\,228\,222 \cdot 1 + 946\,203;$$

$$3\,228\,222 = 946\,203 \cdot 3 + 389\,613;$$

$$946\,203 = 389\,613 \cdot 2 + 166\,977;$$

$$389\,613 = 166\,977 \cdot 2 + 55\,659;$$

$$166\,977 = 55\,659 \cdot 3 + 0.$$

Il massimo comun divisore tra 1 183 254 681 e 55 992 954 è dunque 55 659.

**Esercizio 6.4**

Si trovi il minimo comune multiplo tra 853 751 e 870 473 .

*Soluzione* – Troviamo prima il massimo comun divisore, attraverso l’algoritmo di Euclide. Si ha

$$870\,473 = 853\,751 \cdot 1 + 16\,722;$$

$$853\,751 = 16\,722 \cdot 51 + 929;$$

$$16\,722 = 929 \cdot 18 + 0.$$

Dunque il massimo comun divisore fra 853 751 e 870 473 è 929 ; il minimo comune multiplo è

$$\frac{853\,751}{929} \cdot 870\,473 = 919 \cdot 870\,473 = 799\,964\,687.$$

**Esercizio 6.5**

Sia

$$A := \{13, 55\,211, 283\,179\}.$$

Rispetto alla relazione di ordine “divide” definita in  $\mathbb{N}$ , si dica

- se  $A$  ha estremo inferiore in  $\mathbb{N}$ , e in tal caso qual è l’estremo inferiore di  $A$  in  $\mathbb{N}$  ;
- se  $A$  ha estremo superiore in  $\mathbb{N}$ , e in tal caso qual è l’estremo superiore di  $A$  in  $\mathbb{N}$  .

*Soluzione* – Poiché 13 divide sia 55 211 che 283 179 (come è facile verificare direttamente), 13 è il minimo di A e dunque anche l'estremo inferiore di A in  $\mathbb{N}$ .

Poiché 55 211 non divide 283 179, 283 179 non divide 55 211 e nessuno di questi due numeri divide 13, A non ha massimo; l'estremo superiore di A in  $\mathbb{N}$  è il minimo comune multiplo fra 55 211 e 283 179, per calcolare il quale bisogna prima trovare  $\text{MCD}(55\,211, 283\,179)$ . A questo scopo applichiamo l'algoritmo di Euclide:

$$283\,179 = 55\,211 \cdot 5 + 7\,124;$$

$$55\,211 = 7\,124 \cdot 7 + 5\,343;$$

$$7\,124 = 5\,343 \cdot 1 + 1\,781;$$

$$5\,343 = 1\,781 \cdot 3.$$

Dunque  $\text{MCD}(55\,211, 283\,179) = 1\,529$  e quindi l'estremo superiore di A in  $\mathbb{N}$  è

$$\frac{55\,211 \cdot 283\,179}{1\,529} = \frac{55\,211}{1\,529} \cdot 283\,179 = 31 \cdot 283\,179 = 8\,778\,549.$$

### Esercizio 6.6

Si trovi il minimo comune multiplo tra 853 751 e 861 103.

*Soluzione* – Troviamo prima il massimo comun divisore, attraverso l'algoritmo di Euclide. Si ha

$$861\,103 = 853\,751 \cdot 1 + 7\,352;$$

$$853\,751 = 7\,352 \cdot 116 + 919;$$

$$7\,352 = 919 \cdot 8 + 0.$$

Dunque il massimo comun divisore fra 853 751 e 861 103 è 919; il minimo comune multiplo è

$$\frac{853\,751}{919} \cdot 861\,103 = 929 \cdot 861\,103 = 799\,964\,687.$$

### Esercizio 6.7

Si trovi il massimo comun divisore tra 1 186 984 407 e 55 649 478.

*Soluzione* – Utilizziamo l'algoritmo di Euclide. Si ha

$$1\,186\,984\,407 = 55\,649\,478 \cdot 21 + 18\,345\,369;$$

$$55\,649\,478 = 18\,345\,369 \cdot 3 + 613\,371;$$

$$18\,345\,369 = 613\,371 \cdot 29 + 557\,610;$$

$$613\,371 = 557\,610 \cdot 1 + 55\,761;$$

$$557\,610 = 55\,761 \cdot 10 + 0.$$

Il massimo comun divisore tra 1 186 984 407 e 55 649 478 è dunque 55 761.

**Esercizio 6.8**

Nell'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali, sia  $|$  la relazione “divide” e sia

$$\mathbf{B} := \{5, 9, 45, 700\,200, 1\,627\,965\}.$$

Si trovi l'estremo superiore di  $\mathbf{B}$  in  $\mathbb{N}$  rispetto alla relazione  $|$ .

*Soluzione* – Poiché 5, 9 e 45 dividono sia 700 200 che 1 627 965, siamo ricondotti a calcolare l'estremo superiore di  $\{700\,200, 1\,627\,965\}$  in  $\mathbb{N}$  rispetto alla relazione  $|$ , cioè il minimo comune multiplo tra 700 200 e 1 627 965.

A tale scopo, calcoliamo in primo luogo il MCD fra 1 627 965 e 700 200:

$$1\,627\,965 = 700\,200 \cdot 2 + 227\,565;$$

$$700\,200 = 227\,565 \cdot 3 + 17\,505;$$

$$227\,565 = 17\,505 \cdot 13 + 0.$$

Il massimo comun divisore fra 1 627 965 e 700 200 è dunque 17 505; il minimo comune multiplo cercato è dunque

$$\frac{1\,627\,965 \cdot 700\,200}{17\,505} = \frac{1\,627\,965}{17\,505} \cdot 700\,200 = 93 \cdot 700\,200 = 65\,118\,600.$$

**Esercizio 6.9**

Sia

$$A := \{17, 69\,037, 354\,093\}.$$

Rispetto alla relazione di ordine “divide” definita in  $\mathbb{N}$ , si dica

- se  $A$  ha estremo inferiore in  $\mathbb{N}$ , e in tal caso qual è l'estremo inferiore di  $A$  in  $\mathbb{N}$ ;
- se  $A$  ha estremo superiore in  $\mathbb{N}$ , e in tal caso qual è l'estremo superiore di  $A$  in  $\mathbb{N}$ .

*Soluzione* – Poiché 17 divide sia 69 037 che 354 093 (come è facile verificare direttamente), 17 è il minimo di  $A$  e dunque anche l'estremo inferiore di  $A$  in  $\mathbb{N}$ .

Poiché 69 037 non divide 354 093, 354 093 non divide 69 037 e nessuno di questi due numeri divide 17,  $A$  non ha massimo; l'estremo superiore di  $A$  in  $\mathbb{N}$  è il minimo comune multiplo fra 69 037 e 354 093, per calcolare il quale bisogna prima trovare MCD(69 037, 354 093). A questo scopo applichiamo l'algoritmo di Euclide:

$$354\,093 = 69\,037 \cdot 5 + 8\,908;$$

$$69\,037 = 8\,908 \cdot 7 + 6\,681;$$

$$8\,908 = 6\,681 \cdot 1 + 2\,227;$$

$$6\,681 = 2\,227 \cdot 3.$$

Dunque MCD(69 037, 354 093) = 2 227 e quindi l'estremo superiore di  $A$  in  $\mathbb{N}$  è

$$\frac{69\,037 \cdot 354\,093}{2\,227} = \frac{69\,037}{2\,227} \cdot 354\,093 = 31 \cdot 354\,093 = 10\,976\,883.$$

**Esercizio 6.10**

Si trovi il minimo comune multiplo tra 3 127 e 9 617.

*Soluzione* – Calcoliamo con l’algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra 9 617 e 3 127.

$$9\,617 = 3\,127 \cdot 3 + 236;$$

$$3\,127 = 236 \cdot 13 + 59;$$

$$236 = 59 \cdot 4.$$

Il massimo comun divisore fra 9 617 e 3 127 è dunque 59; il loro minimo comune multiplo è allora

$$\frac{9\,617 \cdot 3\,127}{59} = \frac{9\,617}{59} \cdot 3\,127 = 163 \cdot 3\,127 = 509\,701.$$

**Esercizio 6.11**

Sia

$$A := \{19, 74\,803, 383\,667\}.$$

Rispetto alla relazione di ordine “divide” definita in  $\mathbb{N}$ , si dica

- se  $A$  ha estremo inferiore in  $\mathbb{N}$ , e in tal caso qual è l’estremo inferiore di  $A$  in  $\mathbb{N}$ ;
- se  $A$  ha estremo superiore in  $\mathbb{N}$ , e in tal caso qual è l’estremo superiore di  $A$  in  $\mathbb{N}$ .

*Soluzione* – Poiché 19 divide sia 74 803 che 383 667 (come è facile verificare direttamente), 13 è il minimo di  $A$  e dunque anche l’estremo inferiore di  $A$  in  $\mathbb{N}$ .

Poiché 74 803 non divide 383 667, 383 667 non divide 74 803 e nessuno di questi due numeri divide 13,  $A$  non ha massimo; l’estremo superiore di  $A$  in  $\mathbb{N}$  è il minimo comune multiplo fra 74 803 e 383 667, per calcolare il quale bisogna prima trovare  $\text{MCD}(74\,803, 383\,667)$ . A questo scopo applichiamo l’algoritmo di Euclide:

$$383\,667 = 74\,803 \cdot 5 + 9\,652;$$

$$74\,803 = 9\,652 \cdot 7 + 7\,239;$$

$$9\,652 = 7\,239 \cdot 1 + 2\,413;$$

$$7\,239 = 2\,413 \cdot 3.$$

Dunque  $\text{MCD}(74\,803, 383\,667) = 2\,413$  e quindi l’estremo superiore di  $A$  in  $\mathbb{N}$  è

$$\frac{74\,803 \cdot 383\,667}{2\,413} = \frac{74\,803}{2\,413} \cdot 383\,667 = 31 \cdot 383\,667 = 11\,893\,677.$$

**Esercizio 6.12**

Si trovi il massimo comun divisore tra 1 187 161 689 e 55 956 738.

*Soluzione* – Utilizziamo l’algoritmo di Euclide. Si ha

$$1\,187\,161\,689 = 55\,956\,738 \cdot 21 + 12\,070\,191;$$

$$55\,956\,738 = 12\,070\,191 \cdot 4 + 7\,675\,974;$$

$$12\,070\,191 = 7\,675\,974 \cdot 1 + 4\,394\,217;$$

$$7\,675\,974 = 4\,394\,217 \cdot 1 + 3\,281\,757;$$

$$4\,394\,217 = 3\,281\,757 \cdot 1 + 1\,112\,460;$$

$$3\,281\,757 = 1\,112\,460 \cdot 2 + 1\,056\,837;$$

$$1\,112\,460 = 1\,056\,837 \cdot 1 + 55\,623;$$

$$1\,056\,837 = 55\,623 \cdot 19 + 0.$$

Il massimo comun divisore tra 1 187 161 689 e 55 956 738 è dunque 55 623.

**Esercizio 6.13**

Si trovi il minimo comune multiplo tra 3 233 e 9 943.

*Soluzione* – Calcoliamo con l’algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra 9 943 e 3 233.

$$9\,943 = 3\,233 \cdot 3 + 244; \quad 3\,233 = 244 \cdot 13 + 61; \quad 244 = 61 \cdot 4.$$

Il massimo comun divisore fra 9 943 e 3 233 è dunque 61; il loro minimo comune multiplo è allora

$$\frac{9\,943 \cdot 3\,233}{61} = \frac{9\,943}{61} \cdot 3\,233 = 163 \cdot 3\,233 = 526\,979.$$

**Esercizio 6.14**

Si esprima sotto forma di frazione ridotta ai minimi termini il risultato della seguente operazione:

$$\frac{1}{4\,404\,171} + \frac{1}{4\,961\,661}.$$

*Soluzione* – Calcoliamo il minimo comune multiplo fra i denominatori, e a tale scopo individuiamone il massimo comun divisore utilizzando l’algoritmo di Euclide.

Poiché

$$4\,961\,661 = 1 \cdot 4\,404\,171 + 557\,490;$$

$$4\,404\,171 = 7 \cdot 557\,490 + 501\,741;$$

$$557\,490 = 1 \cdot 501\,741 + 55\,749;$$

$$501\,741 = 9 \cdot 55\,749 + 0$$

si ha  $\text{MCD}(4\,404\,171, 4\,961\,661) = 55\,749$ , cosicché

$$4\,404\,171 = 55\,749 \cdot 79, \quad 4\,961\,661 = 55\,749 \cdot 89$$

e

$$\text{mcm}(4\,404\,171, 4\,961\,661) = 79 \cdot 89 \cdot 55\,749 = 391\,971\,219.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\,404\,171} + \frac{1}{4\,961\,661} &= \frac{89}{391\,971\,219} + \frac{79}{391\,971\,219} = \\ &= \frac{168}{391\,971\,219}. \end{aligned}$$

Per ridurre ai minimi termini questa frazione, dobbiamo trovare il massimo comun divisore fra numeratore e denominatore. Utilizziamo ancora una volta l'algoritmo di Euclide: poiché

$$391\,971\,219 = 168 \cdot 2\,333\,162 + 3;$$

$$168 = 56 \cdot 3 + 0$$

si ha  $\text{MCD}(391\,971\,219, 168) = 3$ , cosicché il risultato della somma, ridotto ai minimi termini, è

$$\frac{56}{130\,657\,073}.$$

### Esercizio 6.15

Si trovi il minimo comune multiplo tra 3 127 e 9 487.

*Soluzione* – Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra 9 487 e 3 127.

$$9\,487 = 3\,127 \cdot 3 + 106;$$

$$3\,127 = 106 \cdot 29 + 53;$$

$$106 = 53 \cdot 2.$$

Il massimo comun divisore fra 9 487 e 3 127 è dunque 53; il loro minimo comune multiplo è allora

$$\frac{9\,487 \cdot 3\,127}{53} = \frac{9\,487}{53} \cdot 3\,127 = 179 \cdot 3\,127 = 559\,733.$$

**Esercizio 6.16**

Nell'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali, sia  $|$  la relazione “divide” e sia

$$\mathbf{B} := \{5, 9, 45, 714\,600, 1\,661\,445\}.$$

Si trovi l'estremo superiore di  $\mathbf{B}$  in  $\mathbb{N}$  rispetto alla relazione  $|$ .

*Soluzione* – Poiché 5, 9 e 45 dividono sia 714 600 che 1 661 445, siamo ricondotti a calcolare l'estremo superiore di  $\{714\,600, 1\,661\,445\}$  in  $\mathbb{N}$  rispetto alla relazione  $|$ , cioè il minimo comune multiplo tra 714 600 e 1 661 445.

A tale scopo, calcoliamo in primo luogo il MCD fra 1 661 445 e 714 600 :

$$1\,661\,445 = 714\,600 \cdot 2 + 232\,245;$$

$$714\,600 = 232\,245 \cdot 3 + 17\,865;$$

$$232\,245 = 17\,865 \cdot 13 + 0.$$

Il massimo comun divisore fra 1 661 445 e 714 600 è dunque 17 865; il minimo comune multiplo cercato è dunque

$$\frac{1\,661\,445 \cdot 714\,600}{17\,865} = \frac{1\,661\,445}{17\,865} \cdot 714\,600 = 93 \cdot 714\,600 = 66\,457\,800.$$

**Esercizio 6.17**

Si trovi il minimo comune multiplo tra 2 491 e 7 661.

*Soluzione* – Calcoliamo con l'algoritmo di Euclide il massimo comun divisore fra 7 661 e 2 491.

$$7\,661 = 2\,491 \cdot 3 + 188;$$

$$2\,491 = 188 \cdot 13 + 47;$$

$$188 = 47 \cdot 4.$$

Il massimo comun divisore fra 7 661 e 2 491 è dunque 47; il loro minimo comune multiplo è allora

$$\frac{7\,661 \cdot 2\,491}{47} = \frac{7\,661}{47} \cdot 2\,491 = 163 \cdot 2\,491 = 406\,033.$$

**Esercizio 6.18**

Si esprima sotto forma di frazione ridotta ai minimi termini il risultato della seguente operazione:

$$\frac{1}{4\,627\,167} + \frac{1}{5\,407\,653}.$$

*Soluzione* – Calcoliamo il minimo comune multiplo fra i denominatori, e a tale scopo individuiamone il massimo comun divisore utilizzando l'algoritmo di Euclide.

Poiché

$$5\,407\,653 = 1 \cdot 4\,627\,167 + 780\,486;$$

$$4\,627\,167 = 5 \cdot 780\,486 + 724\,737;$$

$$780\,486 = 1 \cdot 724\,737 + 55\,749;$$

$$724\,737 = 13 \cdot 55\,749 + 0$$

si ha  $\text{MCD}(5\,407\,653, 4\,627\,167) = 55\,749$ , cosicché

$$5\,407\,653 = 55\,749 \cdot 97, \quad 4\,627\,167 = 55\,749 \cdot 83$$

e

$$\text{mcm}(5\,407\,653, 4\,627\,167) = 83 \cdot 97 \cdot 55\,749 = 448\,835\,199.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\,627\,167} + \frac{1}{5\,407\,653} &= \frac{97}{448\,835\,199} + \frac{83}{448\,835\,199} = \\ &= \frac{180}{448\,835\,199}. \end{aligned}$$

Per ridurre ai minimi termini questa frazione, dobbiamo trovare il massimo comun divisore fra numeratore e denominatore. Utilizziamo ancora una volta l'algoritmo di Euclide: poiché

$$448\,835\,199 = 180 \cdot 2\,493\,528 + 159;$$

$$180 = 159 \cdot 1 + 21;$$

$$159 = 21 \cdot 7 + 12;$$

$$21 = 12 \cdot 1 + 9;$$

$$12 = 9 \cdot 1 + 3;$$

$$9 = 3 \cdot 3 + 0$$

si ha  $\text{MCD}(448\,835\,199, 180) = 3$ , cosicché il risultato della somma, ridotto ai minimi termini, è

$$\frac{60}{149\,611\,733}.$$

**Esercizio 6.19**

Nella *silicon valley* del piccolo stato del Calisota, la principale industria locale ha prodotto in esclusiva nel 2015 diversi esemplari del nuovo potente elaboratore HAL957A, alcuni dei quali sono stati esportati in Brutopia mentre altri hanno trovato collocazione nel mercato interno.

Complessivamente, per la produzione di tali esemplari sono stati impiegati 362 179 circuiti integrati del tipo MB314 e 399 199 circuiti integrati del tipo VP707.

Quanti esemplari dell’elaboratore HAL957A sono stati prodotti in Calisota nel 2012?

*Soluzione* – Sia  $n$  il numero di esemplari dell’elaboratore HAL957A prodotti in Calisota nel 2015. Per ogni esemplare sono stati utilizzati  $\frac{362179}{n}$  circuiti integrati del tipo MB314 e  $\frac{399199}{n}$  circuiti integrati del tipo VP707, e questi numeri devono essere numeri interi: pertanto  $n$  divide sia 362 179 che 399 199, e quindi divide il loro massimo comun divisore.

Calcoliamo il massimo comun divisore fra 399 199 e 362 179:

$$399\,199 = 1 \cdot 362\,179 + 37\,020;$$

$$362\,179 = 9 \cdot 37\,020 + 28\,999;$$

$$37\,020 = 1 \cdot 28\,999 + 8\,021;$$

$$28\,999 = 3 \cdot 8\,021 + 4\,936;$$

$$8\,021 = 1 \cdot 4\,936 + 3\,085;$$

$$4\,936 = 1 \cdot 3\,085 + 1\,851;$$

$$3\,085 = 1 \cdot 1\,851 + 1\,234;$$

$$1\,851 = 1 \cdot 1\,234 + 617;$$

$$1\,234 = 2 \cdot 617 + 0.$$

Dunque  $n$  deve essere un divisore di 617. Osserviamo ora che 617 è un numero primo (perché, come si verifica direttamente, non è divisibile né per 2 né per 3 né per 5 né per 7 né per 11 né per 13 né per 17 né per 19 né per 23, mentre  $29 \cdot 29 = 841 > 617$ ). Pertanto  $n = 1$  oppure  $n = 617$ . Ma nell’enunciato del problema si parla di “diversi” esemplari, quindi  $n > 1$ ; inevitabilmente, perciò,  $n = 617$ .